

УДК 539.389

Й.БРИЛЛА, В.С.САРКИСЯН

СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

В работах [1,2] исследовано распределение напряжений под жестким штампом, жестко сцепленным с упругой анизотропной полуплоскостью. Показано, что симметрично нагруженный штамп под горизонтальной нагрузкой поворачивается. Чтобы исключить это явление необходимо штамп нагрузить несимметрично. В этой работе рассматривается распределение напряжений под жестким штампом на вязкоупругой анизотропной полуплоскости. Применением преобразования Лапласа, используя теорию развития в ряды Дирихле для обратного преобразования и ортогонализацию экспоненциальных функций по Эрдели [3]; получили коэффициенты ряда Дирихле в замкнутой форме [4] в зависимости от значений решения для дискретных значений параметра преобразования ρ , значит, от решений упругих задач с различными константами материала. Таким образом, получена модификация метода разделения переменных, полезная для решения проблем математической физики, зависящих от времени.

§ 1. Основные уравнения и соотношения. Рассмотрим плоскую задачу для вязкоупругой анизотропной среды. Тогда соотношения между деформациями (ϵ_{ij}) и напряжениями (σ_{ij}) в анизотропном, имеющем одну плоскость упругой симметрии, вязкоупругом теле можно взять в таком виде [5,6]:

$$\epsilon_{ij}(t) = \int_0^t J_{ijkl}(t-\tau) \frac{\partial \sigma_{kl}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad \langle i, j, k, l \rangle = 1; 2, \quad (1.1)$$

где J_{ijkl} — тензор функции ползучести.

Как известно, условия равновесия будут удовлетворены, если [7,8]

$$\sigma_{ij} = \mathfrak{C}_{ik} \mathfrak{C}_{jl} F_{,kl}, \quad (1.2)$$

а из условий совместности остается только

$$\epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} = 2\epsilon_{12,12}. \quad (1.3)$$

Здесь \mathfrak{C}_{im} — элементы альтернирующего тензора ($\mathfrak{C}_{11} = \mathfrak{C}_{22} = 0$, $\mathfrak{C}_{12} = -\mathfrak{C}_{21} = 1$), F — функция напряжений ($F_{,kl} = \partial^2 F / \partial x_k \partial x_l$). Тогда из (1.3) с учетом (1.1) и (1.2) находим

$$\mathfrak{C}_{im} \mathfrak{C}_{jn} \mathfrak{C}_{kl} \mathfrak{C}_{ls} \int_0^t J_{ijkl}(t-\tau) \frac{\partial F_{,mnls}}{\partial \tau} d\tau = 0. \quad (1.4)$$

Затем, учитывая свойства тензора функции ползучести и вводя следующие обозначения:

$$\begin{aligned} J_{22}(t-\tau) &= J_{2222}(t-\tau), & J_{26}(t-\tau) &= 2J_{2212}(t-\tau), \\ J_{11}(t-\tau) &= J_{1111}(t-\tau), & J_{16}(t-\tau) &= 2J_{1112}(t-\tau), \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$J_{12}(t-\tau) = J_{1122}(t-\tau), \quad J_{66}(t-\tau) = 4J_{1212}(t-\tau),$$

получим

$$\int_0^t \left\{ J_{22}(t-\tau) \frac{\partial F_{,1111}}{\partial \tau} - 2J_{26}(t-\tau) \frac{\partial F_{,1112}}{\partial \tau} + [2J_{12}(t-\tau) + J_{66}(t-\tau)] \frac{\partial F_{,1122}}{\partial \tau} - 2J_{16}(t-\tau) \frac{\partial F_{,1222}}{\partial \tau} + J_{11}(t-\tau) \frac{\partial F_{,2222}}{\partial \tau} \right\} d\tau = 0 \quad (1.6)$$

или

$$J_{22}(t) * \frac{\partial F_{,1111}(t)}{\partial \tau} - 2J_{26}(t) * \frac{\partial F_{,1112}(t)}{\partial \tau} + [2J_{12}(t) + J_{66}(t)] * \frac{\partial F_{,1122}(t)}{\partial \tau} - 2J_{16}(t) * \frac{\partial F_{,1222}(t)}{\partial \tau} + J_{11}(t) * \frac{\partial F_{,2222}(t)}{\partial \tau} = 0. \quad (1.7)$$

Здесь сверткой функций $a(t)$ и $b(t)$ называется $c(t)$, определяемая равенством

$$c(t) = \int_0^t a(t-\tau) b(\tau) d\tau, \quad (1.8)$$

или символически обозначается

$$c(t) = a(t) * b(t). \quad (1.9)$$

Введем преобразование Лапласа $f(t)$ функции действительного переменного $t (0 \leq t < \infty)$ [3,9]:

$$\tilde{f}(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (p = \sigma + i\tau). \quad (1.10)$$

Тогда, применяя преобразование (1.10) к (1.1) и (1.6), учитывая теоремы о свертке Бореля [4], после некоторых преобразований окончательно находим

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}(p) = p \tilde{J}_{ijkl}(p) \tilde{\sigma}_{kl}(p), \quad \bullet \quad (1.11)$$

$$\tilde{J}_{22}(p) \tilde{F}_{,1111}(p) - 2\tilde{J}_{26}(p) \tilde{F}_{,1112}(p) + [2\tilde{J}_{12}(p) + \tilde{J}_{66}(p)] \tilde{F}_{,1122}(p) - 2\tilde{J}_{16}(p) \tilde{F}_{,1222}(p) + \tilde{J}_{11}(p) \tilde{F}_{,2222}(p) = 0. \quad (1.12)$$

В общем случае задавая вид тензора функции ползучести $J_{ijkl}(t)$, применяя преобразования Лапласа и имея значение $\tilde{J}_{ijkl}(p)$, решаем дифференциальные уравнения (1.12), затем учитывая теорему обращения, устанавливаем значения функции $F(x_1, x_2, t)$, следовательно, и картину напряжения и деформации для конкретной краевой задачи.

§2. Вязкоупругая анизотропная полуплоскость. Пусть имеем анизотропную вязкоупругую полуплоскость $y > 0$, которая нагружена на границе $y = 0$ силами $n(x, t)$ и $s(x, t)$, т.е.

$$\sigma_{22} = -n(x, t), \quad \sigma_{12} = -s(x, t) \quad \text{на } y = 0 \quad (2.1)$$

с нулевыми начальными условиями.

Применяя преобразования Лапласа, видим, что решения рассматриваемой задачи можно представить в виде [7,10]

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}'(z_1) &= \frac{1}{2\pi i (\mu_1 - \mu_2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_2 \tilde{n}(\zeta) + \tilde{s}(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta, \\ \tilde{\Psi}'(z_2) &= -\frac{1}{2\pi i (\mu_1 - \mu_2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_1 \tilde{n}(\zeta) + \tilde{s}(\zeta)}{\zeta - z_2} d\zeta, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где μ_1 и μ_2 — корни характеристического уравнения

$$\tilde{J}_{11} \mu^4 - 2\tilde{J}_{16} \mu^3 + (2\tilde{J}_{12} + \tilde{J}_{66}) \mu^2 - 2\tilde{J}_{26} \mu + \tilde{J}_{22} = 0, \quad (2.3)$$

а

$$z_1 = x + \mu_1 y, \quad z_2 = x + \mu_2 y. \quad (2.4)$$

Следует отметить, что в отличие от анизотропной упругой полуплоскости в случае анизотропной вязкоупругой полуплоскости корни μ_1, μ_2 являются функциями от параметра преобразования p . В дальнейшем для простоты записи будем обозначать

$$\mu_i \equiv \mu_i(p), \quad z_i \equiv z_i(p),$$

$$\Phi'(z_i) \equiv \Phi'[z_i(p)], \quad \Psi'(z_i) \equiv \Psi'[z_i(p)]. \quad (2.5)$$

Тогда для компонент напряжений и перемещений будем иметь

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{11} &= 2Re[\mu_1^2 \tilde{\Phi}'(z_1) + \mu_2^2 \tilde{\Psi}'(z_2)], \\ \tilde{\sigma}_{22} &= 2Re[\tilde{\Phi}'(z_1) + \tilde{\Psi}'(z_2)], \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{12} &= -2Re[\mu_1 \tilde{\Phi}'(z_1) + \mu_2 \tilde{\Psi}'(z_2)], \\ \tilde{u} &= 2Re[n_1 \tilde{\Phi}'(z_1) + n_2 \tilde{\Psi}'(z_2)] - \gamma_0 y + \alpha_0, \\ \tilde{v} &= 2Re[g_1 \tilde{\Phi}(z_1) + g_2 \tilde{\Psi}(z_2)] + \gamma_0 y + \beta_0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} n_i &= p(\tilde{J}_{11} \mu_i^2 + \tilde{J}_{12} - \tilde{J}_{16} \mu_i), \\ g_i &= p(\tilde{J}_{12} \mu_i + \frac{\tilde{J}_{22}}{\mu_i} - \tilde{J}_{26}), \end{aligned} \quad (2.8)$$

а $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ — произвольные постоянные, которые определяют жесткое перемещение полуплоскости.

В дальнейшем при выделении действительных и мнимых частей в (2.6) и (2.7) принимаем, что параметр преобразования p действителен.

§3. Смешанная краевая задача. Рассмотрим смешанную краевую задачу для вязкоупругой анизотропной полуплоскости. Обозначим через

$L = \sum_{i=1}^n L_i$ конечное множество интервалов $L_i = (a_i, b_i)$ края $y=0$ полуплос-

кости $y>0$, а остаток — $K = \sum_{j=0}^n K_j = \sum_{i=0}^n (b_i, a_{i+1})$, где $b_0 = -\infty, a_{n+1} = \infty$.

Пусть имеем следующие краевые условия:

$$n(x, t) = 0, \quad s(x, t) = 0 \quad \text{на } K,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f_1(x, t), \quad \frac{\partial v}{\partial x} = f_2(x, t) \quad \text{на } L. \quad (3.1)$$

Предположим, что $f_1(x, t)$ и $f_2(x, t)$ удовлетворяют условию Гельдера на L и для них существует преобразование Лапласа. Определим $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$ на L с помощью (2.7) при $\gamma_0 = 0$.

Используя формулы Сохоцкого-Племеля [9], для краевых значений интеграла Коши и соотношения

$$Re \frac{n_1 - n_2}{\mu_1 - \mu_2} = 0, \quad Re \frac{g_1 \mu_2 - g_2 \mu_1}{\mu_1 - \mu_2} = 0, \quad (3.2)$$

которые можно доказать, используя соотношения между корнями и

коэффициентами характеристического уравнения, для трансформации Лапласа получим

$$\begin{aligned} B_1 \tilde{p}(x) + \frac{A_1}{\pi} \int \frac{\tilde{p}(\zeta)}{\zeta-x} d\zeta + \frac{A_3}{\pi} \int \frac{\tilde{s}(\zeta)}{\zeta-x} d\zeta &= \tilde{f}_1(x), \\ -B_1 \tilde{s}(x) + \frac{A_2}{\pi} \int \frac{\tilde{p}(\zeta)}{\zeta-x} d\zeta + \frac{A_1}{\pi} \int \frac{\tilde{s}(\zeta)}{\zeta-x} d\zeta &= \tilde{f}_2(x), \end{aligned} \quad (3.3)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_1 &= Im \frac{n_1 \mu_2 - n_2 \mu_1}{\mu_1 - \mu_2}, & A_2 &= Im \frac{n_1 - n_2}{\mu_1 - \mu_2}, \\ A_3 &= Im \frac{g_1 \mu_2 - g_2 \mu_1}{\mu_1 - \mu_2}, & A_4 &= Im \frac{g_1 - g_2}{\mu_1 - \mu_2}, \\ B_1 &= Re \frac{n_1 \mu_2 - n_2 \mu_1}{\mu_1 - \mu_2}, & B_2 &= Re \frac{g_1 - g_2}{\mu_1 - \mu_2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

и использованы соотношения [1,2,7]

$$A_1 = A_4, \quad B_1 = -B_4. \quad (3.5)$$

Определим N из условия

$$N = -\frac{A_2 + NA_1}{A_1 + NA_3}, \quad (3.6)$$

т.е.

$$N_{1,2} = \frac{-A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - A_2 A_3}}{A_3}. \quad (3.7)$$

Умножая второе уравнение системы (3.3) на N и суммируя к первому уравнению, получим

$$B_1 [\tilde{p}(x) - N\tilde{s}(x)] - \frac{D}{\pi i} \int \frac{\tilde{p}(\zeta) - N\tilde{s}(\zeta)}{\zeta-x} d\zeta = \tilde{f}(x), \quad (3.8)$$

где

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x) + N\tilde{f}_2(x), \quad D^2 = A_2 A_3 - A_1^2. \quad (3.9)$$

Можно доказать [1], что

$$N_2 = \bar{N}_1, \quad (3.10)$$

т.е. при $N_1 = N$ получим $N_2 = \bar{N}$.

Таким образом, поставленную задачу мы свели к решению сингулярного интегрального уравнения второго рода с интегрированием по разрывным интервалам.

Для решения этого уравнения введем кусочно-голоморфную функцию

$$\tilde{F}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\tilde{p}(\zeta) - N\tilde{s}(\zeta)}{\zeta-x} d\zeta, \quad (3.11)$$

которая зависит от параметра p .

Из формулы Сохоцкого-Племеля [9] получим

$$\tilde{p}(x) - N\tilde{s}(x) = \tilde{F}^+(x) - \tilde{F}^-(x),$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{n}(\zeta) - N\bar{s}(\zeta)}{\zeta - x} d\zeta = \bar{F}^+(x) + \bar{F}^-(x). \quad (3.12)$$

Подставляя (3.12) в (3.8), получим

$$(B_1 - 2D)\bar{F}^+(x) - (B_1 + 2D)\bar{F}^-(x) = \bar{f}(x). \quad (3.13)$$

Итак, мы получили неоднородную задачу Гильберта-Римана, решение которой имеет вид

$$\bar{F}(z) = \frac{1}{2\pi i (B_1 - 2D)\bar{X}(z)} \int_L \frac{\bar{X}^+(\zeta) f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{\bar{P}_{n-1}(z)}{\bar{X}(z)}, \quad (3.14)$$

где

$$\bar{X}(z) = \prod_{j=1}^n (z - a_j)^{1-m} (z - b_j)^m, \quad (3.15)$$

$$m = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{B_1 - 2D}{B_1 + 2D}. \quad (3.16)$$

В отличие от решения упругой анизотропной полуплоскости $D, B_1, m, \bar{X}(z), P_{n-1}(z)$ являются функциями от параметра преобразования ρ .

Аргумент $\ln(B_1 - 2D)/(B_1 + 2D)$ представим в виде $\rho_{n-1}(z)$ — произвольного полинома порядка $n-1$ в интервале $[0, 2\pi]$ с коэффициентами, зависящими от параметра преобразования ρ .

Аналогично для $N_2 = \bar{N}$ получим

$$\bar{\bar{F}}(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{n}(\zeta) - \bar{N}\bar{s}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (3.17)$$

и

$$\bar{\bar{F}}(z) = -\frac{1}{2\pi i (B_1 + 2D)\bar{\bar{X}}(z)} \int_L \frac{\bar{\bar{X}}^+(\zeta) \bar{\bar{f}}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{\bar{\bar{P}}_{n-1}(z)}{\bar{\bar{X}}(z)}, \quad (3.18)$$

где

$$\bar{\bar{X}}(z) = \prod_{j=1}^n (z - a_j)^{1-\bar{m}} (z - b_j)^{\bar{m}}, \quad (3.19)$$

$$\bar{m} = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{B_1 + 2D}{B_1 - 2D}. \quad (3.20)$$

Сравнивая $\bar{F}(z), \bar{\bar{F}}(z)$ и $\bar{\Phi}'(z_1), \bar{\Psi}'(z_2)$, получим

$$\Phi'(z) = \frac{1}{(\mu_1 - \mu_2)(N - \bar{N})} [(1 + \mu_2 \bar{N})\bar{F}(z) + (1 + \mu_1 N)\bar{\bar{F}}(z_1)],$$

$$\Psi'(z) = -\frac{1}{(\mu_1 - \mu_2)(\bar{N} - N)} [(1 + \mu_1 \bar{N})\bar{F}(z_2) + (1 + \mu_2 N)\bar{\bar{F}}(z_2)]. \quad (3.21)$$

Функции $\bar{F}(z)$ и $\bar{\bar{F}}(z)$ поэтому являются решениями смешанной краевой задачи не только на краях, но и внутри полуплоскости.

На краях получим

$$\bar{n}(x) - N\bar{s}(x) = \frac{1}{B_1 + 2D} [\bar{f}(x) + 2D\bar{F}^+(x)] \quad (3.22)$$

или после деления —

$$\bar{n}(x) = -\frac{2}{B_1 + 2D} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\bar{N}}{N - \bar{N}} [\bar{f}(x) + 2D\bar{F}^+(x)] \right\},$$

$$\tilde{s}(x) = -\frac{2}{B_1+2D} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{N-N} [\tilde{f}(x) + 2D\tilde{F}^+(x)] \right\}. \quad (3.23)$$

§4. Предельные значения решения и обратное преобразование Лапласа. Точное обратное преобразование Лапласа решить очень сложно. Поэтому для обратного преобразования решения надо использовать приближенные методы. Для квазистатических задач удобно использовать приближенные методы, основанные на действительных значениях параметра преобразования.

Предельные значения решения для времени $t=0$ и $t=\infty$ легко находятся. Эти значения получаются при использовании теоремы Таубера [10] из решения в виде преобразования Лапласа.

При $t=0$ получим

$$\begin{aligned} n(x,0) &= -\frac{2}{B_{10}+2D_0} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\bar{N}_0}{N_0-N_0} [f(x,0) + 2D_0F^+(x,0)] \right\}, \\ s(x,0) &= -\frac{2}{B_{10}+2D_0} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{N_0-N_0} [f(x,0) + 2D_0F^+(x,0)] \right\}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где корни характеристического уравнения и соответствующие им коэффициенты интегрального уравнения найдем, если в характеристическое уравнение (1.12) подставим $\tilde{J}_{ij}(p)$ вместо $J_{ij}(0)$.

Для $t=\infty$

$$\begin{aligned} n(x,\infty) &= -\frac{2}{B_{ii}+2D_i} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\bar{N}_i}{N_i-N_i} [f(x,\infty) + 2D_iF^+(x,\infty)] \right\}, \\ s(x,\infty) &= -\frac{2}{B_{ii}+2D_i} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{N_i-N_i} [f(x,\infty) + 2D_iF^+(x,\infty)] \right\}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где соответствующие значения находятся после подстановки в характеристическое уравнение $J_{ij}(\infty)$ вместо $\tilde{J}_{ij}(p)$.

Приближенные обратные преобразования решений (3.21) и (3.23) можем определить следующим образом.

Преобразование Лапласа искомого решения обозначим через $\tilde{H}(z,p)$. Предположим, что существуют пределы $H(z,0)$ и $H(z,\infty)$ и обозначим

$$\Delta H(z,t) = H(z,t) - H(z,\infty) \quad (4.3)$$

и

$$h(z,t) = \Delta H(z,t) - A_0(z) \exp(-p_0 t), \quad (4.4)$$

где $A_0(z)$ — неизвестная функция, которую определим из выражения $h(z)$ в форме ряда Дирихле

$$h_n(z,t) = \sum_{i=1}^n A_i(z) \exp(-p_i t), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = h(z,t). \quad (4.5)$$

По Палею и Винеру [12], последовательность полная в $L_2(0,\infty)$, когда последовательность $\{p_i\}_1^\infty$ выполняет условие

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{1+p_i^2} = \infty \quad (4.6)$$

Это условие выполнимо, если для $n \geq N > 0$ и $a > 0$ имеет место

$$p_n + p_n^{-1} \leq \frac{n}{a}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty. \quad (4.7)$$

После ортогонализации последовательности $\{\exp(-p_i t)\}_1^\infty$ [11] и некоторых преобразований получим

$$A_i = \sum_{k=1}^n c_{ik} \tilde{h}(x, p_k) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (4.8)$$

где

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n d_{ij} d_{kj}, \quad (4.9)$$

$$d_{ij} = (2p_j)^{1/2} \prod_{l=1}^{j-1} (p_i + p_l) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^j (p_i - p_k)^{-1} \quad (4.10)$$

для $i \leq j, j \leq n$; $d_{ij} = 0$ для $i > j$ и $\tilde{h}(z, p_n)$ преобразование Лапласа

$$h(z, t) \quad \text{для } p = p_n. \quad (4.11)$$

В выражение $H(z, t)$ входит неизвестная функция, которую следует определить. Если положим $A_0(z) = 0$, получим сразу приближенное обратное преобразование $H(z, t)$. Но это приближенное обратное преобразование не приобретает точного значения $H(x, 0)$ при $t = 0$, которое можно определить из теоремы Таубера (4.1).

Чтобы обратное преобразование приобретало точное значение в $t = 0$, надо определить $A_0(z)$ из условия

$$H(z, 0) = h(z, 0) + A_0(z) + H(z, \infty) = \sum_{i=1}^n A_i(z) + A_0(z) + H(z, \infty), \quad (4.12)$$

тогда, учитывая (4.4) и (4.6), получим

$$A_i(z) = \sum_{k=1}^n c_{ik} [\Delta \tilde{H}(z, p_k) - A_0(z) (p_k + p_0)^{-1}]. \quad (4.13)$$

Подставляя (4.13) в (4.10) и после преобразований будем иметь

$$A_0(z) = [H(z, 0) - H(z, \infty) - \sum_{i,k=1}^n c_{ik} \Delta \tilde{H}(z, p_k)] [1 - \sum_{i,k=1}^n c_{ik} (p_0 + p_k)^{-1}]^{-1}. \quad (4.14)$$

Обратное преобразование функции $\tilde{H}(z, p)$ определяется в виде

$$H(z, t) = H(z, \infty) + \sum_{i,k=1}^n \{c_{ik} \Delta \tilde{H}(z, p_k) \exp(-p_i t) - A_0(z) [c_{ik} (p_0 + p_k)^{-1} \exp(-p_i t) - \exp(-p_0 t)]\}. \quad (4.15)$$

Для определения решения как функции $F(z, t)$, так и распределений напряжений в касательной трещине $n(x, t)$ и $s(x, t)$ надо определить решение преобразования Лапласа для дискретных значений параметра p . В случае квазистатических задач целесообразно выбирать только действительные значения параметра p , что приводит к решению последовательности упругих контактных задач, для которых мы определили решение в работах [1, 2, 10, 13], и, пользуясь (4.13), получим решение вязкоупругой контактной задачи. Учитывая полность системы экспоненциальных функций, можем получить произвольное точное решение.

§5. Распределение напряжений под штампом с прямолинейным краем на вязкоупругой анизотропной полуплоскости. Имеем следующие краевые условия в случае одного штампа с прямолинейным краем (рис.1):

$$n(x,t) = 0, \quad s(x,t) = 0 \quad \text{на } K, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = k(t) \quad (k(0) = 0) \quad \text{на } L.$$

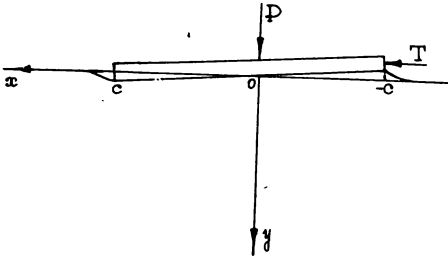


Рис.1.

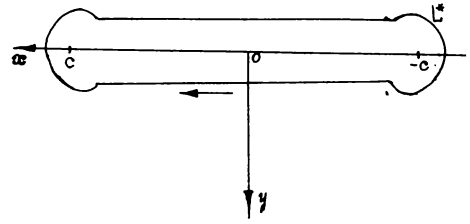


Рис.2.

При решении ограничимся только случаем однородных краевых условий. Подставляя краевые условия $f(x) = NK(t)$ в общее решение (3.14), получим

$$\tilde{F}(z, p) = \frac{N\bar{k}(p)}{2\pi i (B - 2D)\tilde{X}(z)} \int_{-c}^c \frac{\tilde{X}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{a_0}{\tilde{X}(z)}, \quad (5.2)$$

где

$$\tilde{X}(z) = (z+c)^{1-m} (z-c)^m. \quad (5.3)$$

После преобразования интеграла (5.2) в интеграл Коши с кривой интегрирования (рис.2) получим

$$\tilde{F}(z, p) = \frac{N\bar{k}}{2\pi i (1 - e^{-2\pi im}) (B - 2D)\tilde{X}(z)} \int_L \frac{\tilde{X}^+(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{a_0}{\tilde{X}(z)}. \quad (5.4)$$

Вне L $\tilde{X}(z)$ — голоморфная функция с главной частью, которая в бесконечности равна

$$\tilde{G}_\infty(z) = z - (1 - 2m)c. \quad (5.5)$$

После интегрирования получим

$$\tilde{F}(z, p) = -\frac{N\bar{k}}{2D} \left[1 - \frac{z - (1 - 2m)c}{\tilde{X}(z)} \right] + \frac{a_0}{\tilde{X}(z)} \quad (5.6)$$

Постоянную a_0 определим из условия равновесия в вертикальном и горизонтальном направлениях. После преобразования соответствующего интеграла в интеграл Коши и после вычисления получим

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i} (\tilde{P} - N\tilde{T}), \quad (5.7)$$

значит

$$\tilde{F}(z, p) = \frac{N\bar{k}}{2D} \left[1 - \frac{z + 2ic\theta}{(z+c)^{\frac{1}{2}+i\theta} (z-c)^{\frac{1}{2}-i\theta}} \right] - \frac{\tilde{P} - N\tilde{T}}{2\pi i (z+c)^{\frac{1}{2}+i\theta} (z-c)^{\frac{1}{2}-i\theta}}, \quad (5.8)$$

где мы использовали обозначение

$$m = \frac{1}{2} - i\theta. \quad (5.9)$$

В введенных формулах все величины, зависящие от постоянных материала, являются функциями параметра преобразования p .

При вычислении комплексно-сопряженных значений параметр преобразования Лапласа p считаем действительным.

Для преобразования Лапласа напряжений в интервале контакта получим

$$\begin{aligned}\tilde{n}(x,p) &= \frac{ch\pi\theta}{D(c^2-x^2)^{1/2}} \left[\frac{A_2}{D}\tilde{k}x + \frac{D\tilde{P}}{\pi} \right] \cos\varphi + \\ &+ \left[-\frac{2A_2\theta}{D}\tilde{k}c + \frac{1}{\pi}(A_1\tilde{P} + A_2\tilde{T}) \right] \sin\varphi, \\ \tilde{s}(x,p) &= -\frac{ch\pi\theta}{D(c^2-x^2)^{1/2}} \left[(A_1x + 2cD\theta)\frac{\tilde{k}}{D} - \frac{D\tilde{T}}{\pi} \right] \cos\varphi + \\ &+ \left[(Dx - 2cA_1\theta)\frac{\tilde{k}}{D} + \frac{1}{\pi}(A_3\tilde{P} + A_1\tilde{T}) \right] \sin\varphi,\end{aligned}\quad (5.10)$$

где

$$\varphi = \theta \ln \frac{c-x}{c+x}. \quad (5.11)$$

Тогда момент, действующий на штамп с поворотом \tilde{k} , получим из условия равновесия моментов, и он определен выражением

$$\tilde{M}(p) = \frac{A_2\pi}{2D^2}(1+4\theta^2)c^2\tilde{k} - \frac{2c\theta}{D}(A_1\tilde{P} + A_2\tilde{T}). \quad (5.12)$$

Поворот \tilde{k} определяется из выражения (5.12)

$$\tilde{k}(p) = \frac{2D}{\pi A_2(1+4\theta^2)c^2} [M\tilde{D} + 2c\theta(A_1\tilde{P} + A_2\tilde{T})]. \quad (5.13)$$

Подставляя \tilde{k} в уравнение (5.10), получим уравнения для распределения напряжений в касательной трещине при данном моменте.

Обратное преобразование получим по формуле (4.15) после определения подходящих величин для подобранных значений p_k параметра преобразования. При этом все величины, зависящие в упругом случае от постоянных, характеризующих материал, в случае вязкоупругости являются функциями параметра преобразования p .

Аналогично получим и решение периодической контактной задачи для вязкоупругой анизотропной полуплоскости, обобщая решение задачи для упругой полуплоскости [13] или же для других проблем.

Если предположим, что

$$k(t) = kH(t), P(t) = PH(t), T(t) = TH(t), \quad (5.14)$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда, тогда имеет место

$$\begin{aligned}\tilde{n}(x,p) &= \frac{ch\pi\theta}{pD\sqrt{c^2-x^2}} \left[\left(\frac{A_2}{D}kx + \frac{D}{\pi}P \right) \cos\varphi \right] + \\ &+ \left(-\frac{2\theta A_2}{D}ck + \frac{1}{\pi}(A_1P + A_2T) \right) \sin\varphi, \\ \tilde{s}(x,p) &= -\frac{ch\pi\theta}{pD\sqrt{c^2-x^2}} \left[\left((A_1x + 2\theta cD)\frac{k}{D} - \frac{DT}{\pi} \right) \cos\varphi + \right. \\ &\left. + \left((Dx - 2cA_1\theta)\frac{k}{D} + \frac{1}{\pi}(A_3P + A_1T) \right) \sin\varphi \right].\end{aligned}\quad (5.15)$$

Из теоремы Таубера вытекает

$$n(x,0) = \lim_{p \rightarrow \infty} p\tilde{n}(x,p) \quad (5.16)$$