ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 1988 Естественные науки

Механика

УДК 518.9:531.01

В. Р. БАРСЕГЯН

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Рассматривается игра преследования двух однотипных объектов в гравитационном поле тятогения. Предполагается, что игра протекает в тонких сферических слоях, а двигатели управления работают непрерывно и вырабатывают постоянные по величине силы, так что управляющими функциями являются только углы их ориентации. При использовании «основного уравнения» Р. Айзекса получено аналитическое соотношение для нахождения цены игры, а для определенных начальных позиций получено явное выражение цены игры.

Рассмотрим игру преследования двух однотипных объектов в гравитационном поле тяготения. Пусть центр невращающейся декартовой системы координат совпадает с центром притягивающего (центрального) тела. Тогда уравнение движения каждого игрока относительно такой системы координат описывается в виде следующей системы дифференциальных уравнений [1]:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{v},$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{g}(\mathbf{r},t)+\frac{\mathbf{F}}{m}, \tag{1}$$

где $\mathbf{r}$—радиус-вектор, $\mathbf{v}$—вектор скорости, m—масса, $\mathbf{g}(\mathbf{r},t)$—вектор ускорения, действующий на точку со стороны гравитационного поля, t—время, $\mathbf{F}$—вектор управляющего воздействия.

Предположим, что игра протекает в тонких сферических слоях центрального ньютоновского гравитационного поля, тогда $\mathbf{g}(\mathbf{r})=-\mu r_*^{-3}\mathbf{r}=-\omega^2\mathbf{r}$, где μ—гравитационная постоянная, $r_*=\text{const}$—средний радиус сферического слоя, $\omega=\text{const}$ [2]. Считаем, что двигатели управления работают непрерывно и вырабатывают постоянные по величине силы, так что управляющими функциями будут только углы их ориентации. Уравнения (1) принимают вид

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{v},$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt}=-\omega^2\mathbf{r}+\mathbf{u}. \tag{2}$$

Для простоты рассмотрения ограничимся компланарным случаем. Уравнения движения игрока P (преследователя) —

$$\dot{y}_1 = y_3,\ \dot{y}_2 = y_4,$$
$$\dot{y}_3 = \omega^2 y_1 + u_1\cos\alpha_1,\ \dot{y}_4 = -\omega^2 y_2 + u_1\sin\alpha_1. \qquad (3)$$

Уравнения движения игрока E (преследуемого) —

$$\dot{z}_1 = z_3,\ \dot{z}_2 = z_4,$$
$$\dot{z}_3 = -\omega^2 z_1 + u_2\cos\alpha_2,\ \dot{z}_4 = -\omega^2 z_2 + u_2\sin\alpha_2. \qquad (4)$$

Здесь управлениями являются угловые параметры (α_1—для игрока P, и α_2—игрока E), определяющие ориентацию управляющих ускорений, модули которых для преследователя и убегающего обозначены через u_1 и u_2 $(u_1 > u_2)$.

Будем считать поимку осуществленной, если

$$|PE| = [(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}} \leqslant l,$$

где $l \leqslant 0$ есть радиус поимки. Платой игры является время поимки, т. е. рассматриваем игру с интегральной платой:

$$\overline{J} = \int_{t_0}^{t_k} dt.$$

Вычитая (3) из (4) и вводя обозначения $\bar{x}_i = z_i - y_i$, $i = \overline{1,\ 4}$, получим

$$\dot{x}_1 = x_3,\ \dot{x}_2 = x_4,$$
$$\dot{x}_3 = -\omega^2 x_1 + u_2\cos\alpha_2 - u_1\cos\alpha_1, \qquad (5)$$
$$\dot{x}_4 = -\omega^2 x_2 + u_2\sin\alpha_2 - u_1\sin\alpha_1.$$

Терминальная поверхность для конфигурационных переменных характеризуется условием $|PE| = l$. Для полного описания терминального множества введем три параметра:

$$x_1 = l\cos S_1,\quad x_2 = l\sin S_1,\quad x_3 = S_2,\quad x_4 = S_3. \qquad (6)$$

«Основное уравнение», по терминологии [3, 4] (уравнение Айзекса), для сформулированной игры имеет вид

$$\min_{\alpha_1}\max_{\alpha_2}[V_1 x_3 + V_2 x_4 + V_3(-\omega^2 x_1 + u_2\cos\alpha_2 - u_1\cos\alpha_1) +$$
$$+ V_4(-\omega^2 x_2 + u_2\sin\alpha_2 - u_1\sin\alpha_1) + 1] = 0. \qquad (7)$$

Здесь приняты обозначения $V_i = \partial V(x)/\partial x_i$, $i = \overline{1,\ 4}$, где $V(x)$ — оптимальная плата игры (цена игры). Условия обеспечения экстремальных характеристик реализуются уравнением

$$\cos\alpha_1^* = \frac{V_3}{\rho},\quad \sin\alpha_1^* = \frac{V_4}{\rho},$$
$$\cos\alpha_2^* = \frac{V_3}{\rho},\quad \sin\alpha_2^* = \frac{V_4}{\rho}, \qquad (8)$$

где $\rho=\sqrt{V_3^2+V_4^2}$. Заметим, что оптимальным стратегиям преследователя и убегающего отвечают одинаковые направления их управляющих ускорений.

С учетом (8) «основное уравнение» (7) преобразуется в (9):

$$V_1x_3+V_2x_4-\omega^2V_3x_1-\omega^2V_4x_2+\rho(u_2-u_1)+1=0. \tag{9}$$

Уравнения характеристик в регрессивной форме записываются так:

$$\begin{aligned}&\mathring{x}_1=-x_3,\ \ \mathring{x}_2=-x_4,\\ &\mathring{x}_3=\omega^2x_1+u_1\cos\alpha_1^*-u_2\cos\alpha_2^*,\\ &\mathring{x}_4=\omega^2x_2+u_1\sin\alpha_1^*-u_2\sin\alpha_2^*.\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}&\mathring{V}_1=-\omega^2V_3,\ \ \mathring{V}_2=-\omega^2V_4,\\ &\mathring{V}_3=V_1,\quad \mathring{V}_4=V_2.\end{aligned} \tag{11}$$

Уточним определение терминального множества. Для этого напишем соотношения

$$r^2=x_1^2+x_2^2,\quad r\dot{r}=x_1\dot{x}_1+x_2\dot{x}_2,$$

тогда в точках терминальной поверхности имеем

$$l\dot{r}=lS_2\cos S_1+lS_3\sin S_1.$$

Для надежного сближения игрока P с игроком E необходимо выдержать неравенство $\dot{r}<0$. Используя это, получаем условие определения допустимой области окончания игры в виде

$$S_2\cos S_1+S_3\sin S_1<0. \tag{12}$$

Для определения начальных условий на терминальном множестве имеем следующие уравнения [3]:

$$-V_{10}l\sin S_1+V_{20}l\cos S_1=0,\ V_{30}=0,\ V_{40}=0.$$

Отсюда следует, что для некоторого λ

$$V_{10}=\lambda\cos S_1,\ \ V_{20}=\lambda\sin S_1. \tag{13}$$

Подставив значения V_{i0}, $i=\overline{1,4}$, в уравнение (9), получим на терминальной поверхности уравнения для λ. Существует два решения, отвечающих подходу к терминальной поверхности изнутри и извне [3]. Нас интересует лишь последний случай.

Пусть $S_1=\frac{\pi}{2}$, т. е. игрок E находится прямо над игроком P на оси x_2. Если x_2 возрастает, тогда и V тоже будет расти. Следовательно, $V_2>0$, когда $S_1=\frac{\pi}{2}$. Из второго уравнения (13) получаем, что $\lambda>0$.

Подстановка в уравнение (9) дает

$$\lambda(S_2\cos S_1+S_3\sin S_1)+1=0.$$

Таким образом,

$$\lambda=-(S_2\cos S_1+S_3\sin S_1)^{-1} \tag{14}$$

и из (12) следует, что в допустимой области $\lambda>0$.
С учетом (14) имеем

$$V_{10}=-\cos S_1(S_2\cos S_1+S_3\sin S_1)^{-1},$$
$$V_{20}=-\sin S_1(S_2\cos S_1+S_3\sin S_1)^{-1}, \quad (15)$$
$$V_{30}=V_{40}=0.$$

Интегрируя уравнения системы (11) с начальными условиями (15), найдем

$$V_1=-\cos S_1(S_2\cos S_1+S_3\sin S_1)^{-1}\cos\omega\tau,$$
$$V_2=-\sin S_1(S_2\cos S_1+S_3\sin S_1)^{-1}\cos\omega\tau, \quad (16)$$
$$V_3=-\frac{1}{\omega}\cos S_1(S_2\cos S_1+S_3\sin S_1)^{-1}\sin\omega\tau,$$
$$V_4=-\frac{1}{\omega}\sin S_1(S_2\cos S_1+S_3\sin S_1)^{-1}\sin\omega\tau.$$

Отсюда подставляя V_3 и V_4 в выражение ρ, получаем

$$\rho=-\frac{1}{\omega}(S_2\cos S_1+S_3\sin S_1)^{-1}\sin\omega\tau.$$

Из (8) имеем

$$\cos\alpha_1{}^*=\cos\alpha_2{}^*=\cos S_1=\text{const},$$
$$\sin\alpha_1{}^*=\sin\alpha_2{}^*=\sin S_1=\text{const}.$$

Это означает, что $\alpha_1{}^*=\alpha_2{}^*=S_1$ в течение всего времени игры, т. е. векторы ускорения преследователя и убегающего ориентированы параллельно линии визирования к моменту окончания игры.
Проинтегрируем уравнения системы (10):

$$x_1=C_1\cos\omega\tau+C_2\sin\omega\tau-\frac{1}{\omega^2}(u_1-u_2)\cos S_1,$$
$$x_2=D_1\cos\omega\tau+D_2\sin\omega\tau-\frac{1}{\omega^2}(u_1-u_2)\sin S_1,$$
$$(17)$$
$$x_3=\omega C_1\sin\omega\tau-\omega C_2\cos\omega\tau,$$
$$x_4=\omega D_1\sin\omega\tau-\omega D_2\cos\omega\tau.$$

Рассматривая в качестве начальных данных условия на терминальной поверхности (6) для постоянных интегрирования, напишем

$$C_1=\left[l+\frac{1}{\omega^2}(u_1-u_2)\right]\cos S_1,\qquad C_2=-\frac{S_2}{\omega},$$
$$D_1=\left|l+\frac{1}{\omega^2}(u_1-u_2)\right|\sin S_1,\qquad D_2=-\frac{S_3}{\omega}.$$

Подставив значения постоянных интегрирования в (17), получим

$$x_1=\left|l+\frac{1}{\omega^2}(u_1-u_2)\right|\cos S_1\cos\omega\tau-\frac{S_2}{\omega}\sin\omega\tau-\frac{1}{\omega^2}(u_1-u_2)\cos S_1,$$

$$x_2=\left[l+\frac{1}{\omega^2}(u_1-u_2)\right]\sin S_1\cos\omega\tau-\frac{S_3}{\omega}\sin\omega\tau-\frac{1}{\omega^2}(u_1-u_2)\sin S_1, \tag{18}$$

$$x_3=\omega\left[l+\frac{1}{\omega^2}(u_1-u_2)\right]\cos S_1\sin\omega\tau+S_2\cos\omega\tau,$$

$$x_4=\omega\left[l+\frac{1}{\omega^2}(u_1-u_2)\right]\sin S_1\sin\omega\tau+S_3\cos\omega\tau.$$

По известным начальным условиям в прямом времени необходимо из (18) определить S_1, S_2, S_3 и τ как функции x_{10}, x_{20}, x_{30} и x_{40}. Величина $\tau(x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40})$ будет ценой игры V.

Из первого и третьего уравнений формулы (18) после исключения S_2, а из второго и четвертого соответственно—S_3, приходим к следующим двум уравнениям:

$$x_{10}\cos\omega\tau+\frac{1}{\omega}x_{30}\sin\omega\tau=\left[l+\frac{1}{\omega^2}(u_1-u_2)-\frac{1}{\omega^2}(u_1-u_2)\cos\omega\tau\right]\cos S_1,$$

$$x_{20}\cos\omega\tau+\frac{1}{\omega}x_{40}\sin\omega\tau=\left[l+\frac{1}{\omega^2}(u_1-u_2)-\frac{1}{\omega^2}(u_1-u_2)\cos\omega\tau\right]\sin S_1. \tag{19}$$

Отсюда следует, что

$$\operatorname{tg}S_1=\frac{x_{20}\cos\omega\tau+\frac{1}{\omega}x_{40}\sin\omega\tau}{x_{10}\cos\omega\tau+\frac{1}{\omega}x_{30}\sin\omega\tau}. \tag{20}$$

Теперь из первого и третьего уравнений (18) исключая $\cos S_1$, а из второго и четвертого—$\sin S_1$, получим следующие выражения для S_2 и S_3:

$$S_2=\frac{\sigma(\tau)x_{30}-x_{10}}{\sigma(\tau)\cos\omega\tau+\frac{\sin\omega\tau}{\omega}},\qquad S_3=\frac{\sigma(\tau)x_{40}-x_{20}}{\sigma(\tau)\cos\omega\tau+\frac{\sin\omega\tau}{\omega}}, \tag{21}$$

где

$$\sigma(\tau)=\frac{A\cos\omega\tau-B}{\omega A\sin\omega\tau},\qquad B=\frac{1}{\omega^2}(u_1-u_2),\qquad A=l+B.$$

Для определения τ из (19) находим

$$\left(x_{10}\cos\omega\tau+\frac{1}{\omega}x_{30}\sin\omega\tau\right)^2+\left(x_{20}\cos\omega\tau+\frac{1}{\omega}x_{40}\sin\omega\tau\right)^2=$$

$$=(A-B\cos\omega\tau)^2. \tag{22}$$

В уравнении (22), выражая $\sin\omega\tau$ и $\cos\omega\tau$ через $\operatorname{tg}\frac{\omega\tau}{2}$, получаем

$$(x^2_{10}+x^2_{20}-A^2-B^2-2AB)\operatorname{tg}^4\frac{\omega\tau}{2}-\frac{4}{\omega}(x_{10}x_{30}+x_{20}x_{40})\operatorname{tg}^3\frac{\omega\tau}{2}+$$

$$+\left[\frac{4}{\omega^2}(x_{30}^2+x_{40}^2)-2(x_{10}^2+x_{20}^2)-2(A^2-B^2)\right]\operatorname{tg}^2\frac{\omega\tau}{2}+$$

$$+\frac{4}{\omega}(x_{10}x_{30}+x_{20}x_{40})\operatorname{tg}\frac{\omega\tau}{2}+x_{10}^2+x_{20}^2-A^2-B^2+2AB=0. \qquad (23)$$

Заметим, что если игра начинается из положения, для которого

$$x_{10}x_{30}+x_{20}x_{40}=0, \qquad (24)$$

то из (23) имеем биквадратное уравнение

$$[x_{10}^2+x_{20}^2-(A+B)^2]\operatorname{tg}^4\frac{\omega\tau}{2}+2\left[\frac{2}{\omega^2}(x_{30}^2+x_{40}^2)-\right.$$

$$\left.-(x_{10}^2+x_{20}^2)-(A^2-B^2)\right]\operatorname{tg}^2\frac{\omega\tau}{2}+x_{10}^2+x_{20}^2-(A-B)^2=0. \qquad (25)$$

Решение (25) записывается так

$$\operatorname{tg}^2\frac{\omega\tau}{2}=\frac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}, \qquad (26)$$

где

$$a=x_{10}^2+x_{20}^2-(A+B)^2,$$

$$b=x_{10}^2+x_{20}^2-\frac{2}{\omega^2}(x_{30}^2+x_{40}^2)+(A^2-B^2),$$

$$c=x_{10}^2+x_{20}^2-(A-B)^2.$$

Ценой игры будет минимальный положительный корень уравнения (26).

Итак, при ограничении (24) цена игры определяется из (26), а S_1, S_2, S_3 вычисляются по формулам (20) и (21).

ЛГУ, ЕГУ

Поступила 10.07.1987

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ильин В. А., Кузмак Г. Е.** Оптимальные перелеты космических аппаратов. М.: Наука, 1976.
2. **Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В.** Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М.: Наука, 1975.
3. **Айзекс Р.** Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
4. **Петросян Л. А.** Дифференциальные игры преследования. Л.: ЛГУ, 1977.

Ամփոփում

Դիտարկվում է երկու նույնատիպ օբյեկտների հետապնդման դիֆերենցիալ խաղային խնդիր գրավիտացիոն ձգողական դաշտում։ Ենթադրվում է, որ խաղը ընթանում է նեղ սֆերիկ շերտում, իսկ ղեկավարման շարժիչները

աշխատում են անընդհատ և տալիս են մեծությամբ հաստատուն ուժեր, այնպես որ ղեկավարման ֆունկցիաներ են հանդիսանում միայն կողմնորոշող անկյունները։ Օգտվելով Ռ. Այզեկսի «հիմնական հավասարումից», խաղի արժեքը գտնելու համար ստանում ենք անալիտիկ արտահայտություն, իսկ որոշակի սկզբնական դիրքերի համար՝ խաղի արժեքի բացահայտ տեսքը։

SUMMARY

A pursuit game of two uniform objects in the gravitational attraction field is considered. It is supposed that the game runs through slim spherical layers and the control engines work uninterruptedly and produce in quantity constant powers, so that the control functions are only the orientational angles.

Using R. Ajzek's "Fundamental equation" we receive an analytical correlation for the search of the game's price and for some elementary positions—the evident expression of the game's price.