ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2, 1986 Естественные науки

Математика

УДК 514.75

В. А. НЕРСЕСЯН

ДОПУСТИМЫЕ КОПЛЕКСЫ k-МЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ В P^n

В n-мерном проективном пространстве P^n рассматриваются a-параметрические семейства K (комплексы) k-мерных плоскостей h ($a>n-k$), обладающие следующим свойством: для всякой точки M произвольной плоскости $h\in K$ содержащая h касательная плоскость к конусу, образованному плоскостями комплекса, проходящими через M, не зависит от выбора точки $M\in K$. Такие комплексы названы допустимыми.

При $a=n$ допустимые комплексы двумерных плоскостей были определены, классифицированы и геометрически описаны в работах [1—3] для $n=5$ и $n=6$. Здесь же некоторые их результаты обобщаются на n-мерный случай. Приводится также признак допустимости комплекса K.

1. Пусть $\mathbf{P}^n$—n-мерное проективное пространство, $H_{n,k}$—многообразие k-мерных плоскостей пространства $\mathbf{P}^n$. a-мерное подмногообразие K в $H_{n,k}$ назовем комплексом k-мерных плоскостей, если $a>n-k$. Пусть K_Q—конус, образованный k-мерными плоскостями $h\in K$, проходящими через точку $Q\in\mathbf{P}^n$.

Будем считать, что размерность конуса K_Q меньше n.

Определение. Комплекс K назовем допустимым, если для всех плоскостей $h\in K$ и нефокальных точек $Q\in\mathbf{P}^n$ ($Q\in h$) касательная плоскость в любой нефокальной точке к конусу K_Q, содержащая h, определена единственным образом и зависит только от h.

Эти касательные плоскости назовем касательными вдоль плоскости h к комплексу K и обозначим через $\pi(h)$.

В работах [1—3] при $a=n$ определены, классифицированы и геометрически описаны допустимые комплексы двумерных плоскостей для $n=5$ и $n=6$.

В настоящей работе некоторые результаты из [1—3] обобщаются на n-мерный случай для произвольного $k\geqslant2$.

При $k=1$ наше определение совпадает с имеющимся в интегральной геометрии И. М. Гельфанда и М. И. Граева геометрическим определением допустимых комплексов прямых (см. [4] и [5]).

Заметим также, что имеется и другое, не эквивалентное с нашим, определение допустимого комплекса k-мерных плоскостей (см. [6]).

Работа выполнена методом подвижного репера и внешних форм Картана ([7]).

2. Пусть V_r^m—m-мерная тангенциально-вырожденная поверхность ранга r в проективном пространстве $\mathbf{P}^n$. Как известно (см. [8]), поверхность V_r^m представляет собой r-параметрическое семейство (m—r)-

мерных плоскостей, вдоль каждой из которых касательная плоскость к V_r^m постоянна. Эти $(m-r)$-мерные плоскости называются образующими поверхности V_r.

Распределим индексы следующим образом:

$$I, J=0, \cdots, n; \ q, p=1, \cdots, m-r; \ t, s=m-r+1, \cdots, m;$$

$$\alpha, \beta=m+1, \cdots, n.$$

С каждой точкой поверхности V_r^m присоединим семейство проективных реперов $\{A_I\}$ таким образом, чтобы точка A_0 описывала поверхность V_r^m, образующая E^l $(l=m-r)$ была натянута на точки A_0, A_q, а касательная плоскость к поверхности V_r^m—на точки A_0, A_q, A_t. Тогда формы

$$\omega_0^\alpha=0, \quad \omega_q^\alpha=0 \tag{1}$$

и уравнения инфинитезимального перемещения репера $\{A_I\}$ примут вид

$$dA_0=\omega_0^0 A_0+\omega_0^q A_q+\omega_0^t A_t, \quad dA_t=\omega_t^I A_I,$$

$$dA_q=\omega_q^0 A_0+\omega_q^p A_p+\omega_q^t A_t, \quad dA_\alpha=\omega_\alpha^I A_I, \tag{2}$$

где ω_I^J—формы на вышеуказанном семействе реперов.

Теорема 1. Комплекс K, образованный $(l+1)$-мерными плоскостями P^n, проходящими через l-мерные образующие поверхности V_r^m, допустимый.

Доказательство. а) Если $(l+1)$-мерные плоскости лежат в касательных плоскостях к V_r^m, то можно канонизировать репер таким образом, чтобы $E^{l+1}=[A_0, \ldots A_{m-r}, A_m]$. Пусть $K_Q(Q\in E^{l+1})$—конус, образованный плоскостями E^{l+1}, проходящими через точку Q. Предположим, что $Q=A_m$. Тогда для произвольной точки $P\in E^{l+1}$ $(P\neq Q)$ имеем разложение $P=A_m+x^0A_0+x^qA_q$. Учитывая уравнения (1) и (2), получим следующее выражение для dP:

$$dP=(\omega_m^0+dx^0+x^0\omega_0^0+x^q\omega_q^0)A_0+(\omega_m^q+dx^q+x^0\omega_0^q+x^p\omega_p{}^q)A_q+$$

$$+(\omega_m^t+x^0\omega_0^t+x^q\omega^t{}_q)A_t+\omega_m^\alpha A_\alpha. \tag{3}$$

Из (3) видно, что при фиксации точки $Q=A_m$ касательная плоскость $\pi(E^{l+1})$ вдоль образующей E^{l+1} постоянна, т. к.

$$dP=(dx^0+x^0\omega_0^0+x^q\omega_q^0)A_0+(dx^q+x^0\omega_0^q+x^p\omega_p{}^q)A_q+(x^0\omega_0^t+x^q\omega^t{}_q)A_t,$$

т. е. $\pi(E^{l+1})=[A_0, A_q, A_t]$.

б) Если же плоскости E^{l+1} пересекают поверхность V_r^m по образующим E^l, то репер можно канонизировать таким образом, чтобы $E^{l+1}=[A_0, \cdots, A_q, A_n]$. Как и выше, рассмотрим конус $K_Q/Q\in E^{l+1}/$. Для простоты, пусть $Q=A_n$. Тогда для произвольной точки $P\in E^{l+1}$ $(P\neq Q)$ имеем разложение $P=A_n+y^0A_0+y^qA_q$.

Опять учитывая уравнения (1) и (2), получим, что

$$dP=(\omega_n^0+dy^0+y^0\omega_0^0+y^q\omega_q^0)A_0+(\omega_n^q+dy^q+y^0\omega_0^q+y^p\omega_p{}^q)A_q+$$

$$+(\omega^t{}_n+y^0\omega_0{}^t+y^q\omega_q{}^t)A_t+\omega_n^\alpha A_\alpha.$$

Значит, каждый раз, когда фиксируется точка $Q=A_n$, касательная плоскость $\pi(E^{l+1})$ к конусу K_Q вдоль образующей E^{l+1} остается постоянной, т. к. она натянута на точки A_0, A_q, A_t. Теорема доказана.

3. Очевидно, что примеры допустимых комплексов многомерных плоскостей можно получить с помощью следующей конструкции.

Теорема 2. Пусть пространство $\mathbf{P}^n$ локально расслаивается на $(n-r)$-параметрическое семейство r-мерных плоскостей E^r. Если комплекс k-мерных плоскостей в $\mathbf{P}^n$ $(k<r)$ расслаивается на допустимые комплексы в плоскостях E^r, то он допустимый.

4. Найдем признак допустимости комплекса K. Пусть $\dim K=a$, а K_Q —конус, образованный k-мерными плоскостями $h\in K$, проходящими через точку $Q\in\mathbf{P}^n$. Канонизируем репер таким образом, чтобы $h=[A_0, A_1, \ldots, A_k]$, $A_0=Q$. Будем считать точку Q нефокальной точкой. Тогда главными на многообразии реперов $F(H_{n,k})$ над $H_{n,k}$ будут формы

$$\omega_0^t,\ \omega_N{}^t\quad L,\ N=1,\ \cdots,\ k;\quad t,\ s=k+1,\ \cdots,\ n, \tag{4}$$

причем формы ω_0^t—линейно независимые на расслоении $F(H_{n,k})$. В силу вложения $K\to H_{n,k}$ формы (4) можно считать также формами, заданными на расслоении реперов $F(K)$ над a-мерным подмногообразием K. Так как $a>n-k$, то мы можем дополнить формы ω_0^t формами ϑ^q $q=1, \ldots, a-(n-k)$ до базиса форм на $F(K)$. Тогда для остальных форм из (4) имеем следующие разложения:

$$\omega_N{}^t=H^t{}_{Nq}\vartheta^q+A^t{}_{Ns}\omega_0^s. \tag{5}$$

Каждый раз, когда фиксируем точку Q, формы $\omega_0^t=0$, а значит $\omega^t{}_N=H^t{}_{Nq}\vartheta^q$ (через точку проходит $r=a-n+k$-параметрическое семейство плоскостей $h\in K$). Итак, если Q—нефокальная точка, то $\dim K_Q=a-n+2k$. Пусть $\pi(K_Q, P, h)$—касательная плоскость в точке $P\in h$ к конусу K_Q. Если $P=A_0+y^NA_N$, то при фиксированном $Q=A_0$ имеем

$$dP=y^N\omega_N^0A_0+(y^L\omega_L^N+dy^N)A_N+y^NH^t_{Nq}\vartheta^qA_t. \tag{6}$$

Из (6) видно, что $\pi(K_Q, P, h)$ зависит от точки $P\in h$. Пусть K—допустимый комплекс. Обозначим касательную плоскость к комплексу K вдоль плоскости h через $\pi(h)$. Канонизируем репер таким образом, чтобы $\pi(h)=[A_0, A_\xi]$, где $\xi=1, \ldots, a-n+2k$. Обозначим полученное подрасслоение реперов над K через $F_0(K)$. Тогда из выражения (6) следует, что

$$y^NH^\alpha_{Nq}=0\quad \alpha,\ \beta=r+k,\ \cdots,\ n. \tag{7}$$

Рассмотрим на плоскости h k точек $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$. Из уравнений (7) следует что для этих точек $H^\alpha_{\xi q}=0$. Так как K—допустимый комплекс, то $H^\alpha_{\xi q}=0$ для любого $P\in h$. Итак, на расслоении реперов $F_0(K)$ выполняются уравнения

$$\begin{cases}\omega_N^\sigma=H^\sigma_{Nq}\vartheta^q+A^\sigma_{Ns}\omega_0^s,\\ \omega_N^\alpha=A^\alpha_{Ns}\omega_0^s,\quad \sigma=k+1,\ \cdots,\ k+r.\end{cases}$$

Формы ω_0^α, ω_N^α, ω_σ^α являются главными на расслоении реперов над многообразием $(k+r)$-мерных плоскостей. Значит, если зафиксирована $(k+r)$-мерная плоскость, то

$$\omega_0^\alpha = \omega_N^\alpha = \omega_\sigma^\alpha = 0$$

и—наоборот. Отсюда следует, что $A_{N\sigma}^\alpha = 0$. Значит,

$$\omega_N^\alpha = A_{N\beta}^\alpha \omega_0^\beta. \tag{8}$$

Покажем, что условия (8) также достаточны для допустимости комплекса K. Пусть K—a-мерный комплекс k-мерных плоскостей h, K_Q—$(a-n+2k)$-мерный конус, образованный плоскостями $h\in K$, проходящими через точку $Q\in P^n$. Канонизируем репер так, чтобы $A_0=Q$, $h=[A_0, A_N]$. Пусть на этом расслоении реперов $F(K)$ выполняются уравнения (8). Для произвольной точки $P\in h$ $(P\neq Q)$ имеем $P=A_0+x^N A_N$. Тогда в силу (8) получим, что

$$dP=(\omega_0^0+x^N\omega_N^0)A_0+(\omega_0^\xi+x^N\omega_N^\xi)A_\xi+(\omega_0^\alpha+x^N\omega_N^\alpha)A_\alpha=$$

$$=\ldots+(\delta_\beta^\alpha+x^N A_{N\beta}^\alpha)\omega_0^\beta A_\alpha.$$

Когда фиксируем точку Q, формы $\omega_0^\alpha=0$, значит, для произвольной точки $P\in h$ $dP\in[A_0, \ldots, A_{r+k}]$.

Итак, $\pi(K_Q, P, h)=\pi(h)$—постоянная, т. е. K—допустимый комплекс. Тем самым получен следующий критерий допустимости комплекса K.

Теорема 3. a-мерный комплекс K k-мерных плоскостей допустим тогда и только тогда, когда в окрестности всякой нефокальной точки на вышеуказанном расслоении реперов $F(K)$ над комплексом K выполняются уравнения

$$\omega_N^\alpha = A_{N\beta}^\alpha \omega_0^\beta,$$

где $A_{N\beta}^\alpha$—некоторые функции.

Кафедра высшей алгебры и геометрии *Поступила 21.06.1985*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нерсесян В. А.** Классификация допустимых комплексов двумерных плоскостей в R^5.—ДАН Арм. ССР, 1980, т. 70, № 3, с. 151—155.
2. **Нерсесян В. А.** Некоторые классы допустимых комплексов двумерных плоскостей в R^6.—Уч. записки ЕГУ, 1981, № 1, с. 13—18.
3. **Нерсесян В. А.** О некоторых допустимых комплексах двумерных плоскостей проективного пространства P^6.—Уч. записки ЕГУ, 1983, № 2, с. 13—19.
4. **Гельфанд И. М., Граев М. И.** Комплексы прямых в пространстве C^n.—Функ. анализ и его прил-я. М.: 1968, т. 2, вып. 3, с. 39—52.
5. **Майус К.** Структура допустимых комплексов прямых в CP^n.—Тр. Моск. матем. общ-ва, 1979, т. 39, с. 181—211.
6. **Кругляков Л. З.** О некоторых комплексах многомерных плоскостей в проективном пространстве.—Функ. анализ и его прил-я. М.: 1982, т. 16, вып. 3, с. 66—67.
7. **Фиников С. П.** Метод внешних форм Картана. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948.
8. **Акивис М. А.** Многомерная дифференциальная геометрия. Калинин: 1977.

Վ. Ա. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ

k-ՉԱՓԱՆԻ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԹՈՒՅԼԱՏՐԵԼԻ ԿՈՄՊԼԵՔՍՆԵՐԸ P^n-ՈՒՄ

Ամփոփում

Դիցուք $H_{k,n}$*-ը* k*-չափանի հարթությունների դիֆերենցելի բազմաձևությունն է* F^n*-պրոյեկտիվ տարածությունում,* $K \subset H_{k,n}$*-ն* a*—չափողականության* $(a > n-k)$ *ենթաբազմաձևությունն է* $H_{k,n}$*-ում (կոմպլեքս),* K_Q*-ն կոն է, որի ծնիչները* $Q \in P^n$ *կետով անցնող* k*-չափանի* $h \in K$ *հարթություններն են,* $\pi(P, Q, h)$*-ը* K_Q *կոնին* $P \in h$ *կետում* $(P \neq Q)$ *շոշափող հարթությունն է։*

Սահմանում. K *կոմպլեքսը կոչվում է թույլատրելի, եթե բոլոր ոչ եզակի* $Q \equiv P^n$ *կետերի և* $h \in K$ $(Q \in h)$ *հարթությունների համար* $\pi(P, Q, h)$ *հարթությունները որոշված և կախված են միայն* h*-ից։*

Երկչափ հարթությունների թույլատրելի կոմպլեքսները սահմանված, դասակարգված և երկրաչափորեն նկարագրված են [1—3] աշխատանքներում։

Այս աշխատանքում տրվում է կամայական k*-չափանի թույլատրելի կոմպլեքսների որոշ դասերի երկրաչափական նկարագիրը։ Բերվում է նաև կամայական կոմպլեքսների թույլատրելիության հայտանիշը։*