ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 1983 Естественные науки

Механика

УДК 539.3

С. В. САРКИСЯН

МАГНИТОУПРУГИЕ КОЛЕБАНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНКИ С ЗАДАННЫМ НАЧАЛЬНЫМ ПРОГИБОМ ИЛИ МАГНИТНЫМ ИМПУЛЬСОМ

В настоящей работе рассматриваются колебания электропроводящей бесконечной пластинки с заданным начальным прогибом и с заданным начальным магнитным импульсом, находящейся в постоянном магнитном поле с вектором напряженности, параллельным срединной поверхности пластинки. Предполагается, что материал пластинки не обладает свойствами намагничивания и электрической поляризуемости.

1. Пусть тонкая упругая бесконечная пластинка постоянной толщины $2h$ колеблется во внешнем продольном магнитном поле $\overline{B}_0(B_{01}, 0, 0)$. Упругие и электромагнитные свойства материала пластинки характеризуются жесткостью D, коэффициентом Пуассона ν, плотностью ρ, электропроводностью σ. Магнитная и диэлектрическая проницаемость пластинки и среды, окружающей пластинку, принимаются равными единице.

Пластинка в прямоугольной системе координат (x, y, z) расположена так, что срединная плоскость совпадает с координатной плоскостью (x, y), а направление оси x—с направлением вектора напряженности заданного магнитного поля.

Исследования проводятся на основании соотношений, полученных в [1, 2] при дополнительном допущении относительно электромагнитного поля в окружающей среде.

Принимая независимость колебаний от координаты y, указанные соотношения сводим к уравнениям

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{2\sigma h}{c}B_{01}\left(\psi+\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)=0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi+\frac{B_{01}}{c}\frac{\partial w}{\partial t}\right)-\frac{\psi}{\lambda h}=0 \tag{1.2}$$

с определенными начальными условиями при $t=0$.

Здесь $w(x, t)$—прогиб пластинки, $\psi(x, t)$—искомая тангенциальная компонента вектора напряженности возбуждаемого электрического поля, $D=\dfrac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}$—жесткость пластинки, λ—характерный размер задачи, c—электродинамическая постоянная, численно равная скорости света в вакууме.

Рассматриваются следующие два типа начальных условий:

$$\text{I. } w=\beta(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}=0, \quad \psi=0 \text{ при } t=0; \tag{1.3}$$

$$\text{II. } w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}=0, \quad f=\gamma(x), \quad h_1=0 \text{ при } t=0, \tag{1.4}$$

где $f(x, t)$ и $h_1(x, t)$—искомые нормальная и тангенциальная компоненты вектора напряженности возбуждаемого магнитного поля.

Из условия (1.4) для искомой функции ψ получим [1] следующее начальное условие:

$$\psi=-\frac{c}{4\pi\sigma}\frac{d\gamma}{dx}. \tag{1.5}$$

Первый тип начальных условий соответствует магнитоупругим колебаниям бесконечной пластинки с заданным начальным прогибом. Второй тип—магнитоупругим колебаниям бесконечной пластинки с заданным начальным магнитным импульсом $\gamma(x)$.

Граничные условия в обоих случаях состоят в том, что функции $w(x, t)$ и $\psi(x, t)$ и их производные по x обращаются в нуль при $x=\pm\infty$.

Рассматриваемые задачи исследуются методом интегральных преобразований.

2. Рассмотрим колебания бесконечной пластинки с заданным начальным прогибом. Применим к уравнениям (1.1) и (1.2) правостороннее преобразование Лапласа по переменной t и преобразование Фурье по переменной x [3], тогда с учетом условия (1.3) получим [4]

$$\left(D\alpha^4+2\rho hp^2+\frac{2\sigma hB_{01}^2}{c^2}p\right)\overline{\overline{w}}+\frac{2\sigma hB_{01}}{c}\overline{\overline{\psi}}-\left(2\rho hp+\frac{2\sigma hB_{01}^2}{c^2}\right)\beta^*=0, \tag{2.1}$$

$$\left(\alpha^2+\frac{4\pi\sigma}{c^2}p+\frac{1}{\lambda h}\right)\overline{\overline{\psi}}+\frac{4\pi\sigma B_{01}}{c^3}p^2\overline{\overline{w}}-\frac{4\pi\sigma B_{01}}{c^3}p\beta^*=0, \tag{2.2}$$

где $\overline{\overline{w}}(\alpha, p)$, $\overline{\overline{\psi}}(\alpha, p)$—трансформанты Фурье функций $\overline{w}(x, p)$, $\overline{\psi}(x, p)$ соответственно, а функции $\overline{w}(x, p)$ и $\overline{\psi}(x, p)$—трансформанты Лапласа функций $w(x, t)$ и $\psi(x, t)$:

$\beta^*(\alpha)$—трансформант Фурье функции $\beta(x)$.

Из уравнения (2.2), принимая $\lambda=\alpha^{-1}$, определим $\overline{\overline{\psi}}$:

$$\overline{\overline{\psi}}(\alpha, p)=-\frac{1}{s}\frac{4\pi\sigma B_{01}}{c^3}(p^2\overline{\overline{w}}-p\beta^*), \tag{2.3}$$

где

$$s=\alpha^2+\frac{4\pi\sigma}{c^2}p+\frac{\alpha}{h}.$$

Принимая условие $\alpha^2h^2+\frac{4\pi\sigma ph^2}{c^2}\ll\alpha h$, из уравнения (2.1) для $\overline{\overline{w}}$ получим

$$\overline{w}(\alpha, p)=\frac{\left(2\rho h-\dfrac{8\pi\sigma^2h^2B_{01}^2}{c^4\alpha}\right)p+\dfrac{2\sigma hB_{01}^2}{c^2}}{D\alpha^4+\left(2\rho h-\dfrac{8\pi\sigma^2h^2B_{01}^2}{c^4\alpha}\right)p^2+\dfrac{2\sigma hB_{01}^2}{c^2}p}\beta^*(\alpha). \tag{2.4}$$

Эти рассуждения были проведены для бесконечной пластинки, с конечной электропроводностью σ, находящейся в постоянном продольном магнитном поле.

Подставляя выражение (2.3) в уравнение (2.1) и перейдя к пределу при $\sigma\to\infty$, для идеально проводящей бесконечной пластинки получим

$$\overline{w}(\alpha, p)=\frac{\dfrac{1}{p}\left[2\rho hp^2+\dfrac{\alpha(1+\alpha h)}{2\pi}B_{01}^2\right]}{D\alpha^4+\dfrac{\alpha(1+\alpha h)}{2\pi}B_{01}^2+2\rho hp^2}\beta^*(\alpha). \tag{2.5}$$

Произведя в выражении (2.5) обратное преобразование Лапласа, будем иметь

$$\overline{w}(\alpha, t)=[A+(1-A)\cos at]\beta^*(\alpha), \tag{2.6}$$

где

$$a=\sqrt{\frac{D\alpha^4+\dfrac{\alpha(1+\alpha h)}{2\pi}B_{01}^2}{2\rho h}};\qquad A=\frac{\dfrac{\alpha(1+\alpha h)}{2\pi}B_{01}^2}{D\alpha^4+\dfrac{\alpha(1+\alpha h)}{2\pi}B_{01}^2}.$$

Допустим, что начальная деформация (прогиб) пластинки имеет следующую форму поверхности:

$$w(x, 0)=\beta(x)=\beta_0e^{-\frac{x^2}{k^2}},$$

где β_0—малая величина.

Этой начальной деформации, как нетрудно заметить, соответствует следующая начальная энергия:

$$U=\frac{3D\sqrt{2\pi}}{4k^3}\beta_0^2: \tag{2.7}$$

Перейдем к определению функции $w(x, t)$.

Проделаем в уравнении (2.6) обратное преобразование Фурье и, применяя метод стационарных фаз для $w(x, t)$, получим следующую асимптотическую формулу:

$$w(x, t)\sim\frac{k\beta_0}{2\sqrt{\pi}}G(x)+J^*(x, t), \tag{2.8}$$

где

$$G(x)=\frac{B_{01}^2}{2\pi D}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-\frac{\alpha^2k^2}{4}-i\alpha x}}{\alpha^3+\dfrac{B_{01}^2}{2\pi D}}d\alpha;\qquad \varkappa=t\sqrt{\frac{D}{2\rho h}},$$

$$J^*(x,\ t)=\frac{k\beta_0}{4\sqrt{x}}e^{-\frac{k^2x^2}{16x^2}}\left[\frac{\frac{x^3}{8x^3}}{\frac{B_{01}^2}{2\pi D}+\frac{x^3}{8x^3}}e^{-i\left(\frac{x^2}{4x}-\frac{\pi}{4}\right)}-\right.$$

$$\left.-\frac{\frac{x^3}{8x^3}}{\frac{B_{01}^2}{2\pi D}-\frac{x^3}{8x^3}}e^{i\left(\frac{x^2}{4x}-\frac{\pi}{4}\right)}\right].$$

Таким образом, имеем значение $w(x,\ t)$ для идеально проводящей бесконечной пластинки, с заданным начальным прогибом, находящейся в постоянном продольном магнитном поле. Имея это значение из (1.1), можно определить тангенциальную компоненту вектора напряженности возбуждаемого электрического поля $\psi(x,\ t)$. В случае, когда магнитное поле отсутствует ($B_{01}=0$), из (2.8) получается представление $w(x,\ t)$ бесконечной пластинки с заданным начальным прогибом [3].

3. Рассмотрим колебания бесконечной пластинки с заданным начальным магнитным импульсом. Поступая так, как в предыдущем случае, с учетом условия (1.4) для $\overline{\overline{w}}$ и $\overline{\overline{\psi}}$ получим следующую систему уравнений:

$$\left(D\alpha^4+2\rho hp^2+\frac{2\sigma hB_{01}^2}{c^2}p\right)\overline{\overline{w}}+\frac{2\sigma hB_{01}}{c}\overline{\overline{\psi}}=0, \tag{3.1}$$

$$\left(\alpha^2+\frac{4\pi\sigma}{c^2}p+\frac{1}{\lambda h}\right)\overline{\overline{\psi}}+\frac{4\pi\sigma B_{01}}{c^3}p^2\overline{\overline{w}}-\frac{i\alpha}{c}\gamma^*=0, \tag{3.2}$$

где

$$\gamma^*(\alpha)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\gamma(x)e^{i\alpha x}dx. \tag{3.3}$$

Из уравнения (3.2), принимая $\lambda=\alpha^{-1}$, определим $\overline{\overline{\psi}}$:

$$\overline{\overline{\psi}}(\alpha,\ p)=\frac{1}{cs}\left(i\alpha\gamma^*-\frac{4\pi\sigma B_{01}}{c^2}p^2\overline{\overline{w}}\right). \tag{3.4}$$

Согласно (3.4) из уравнения (3.1) для $\overline{\overline{w}}$ получим

$$\overline{\overline{w}}(\alpha,\ p)=-\frac{2\sigma hB_{01}}{c^2s}i\alpha\gamma^*\left[D\alpha^4+\left(2\rho h-\frac{8\pi\sigma^2hB_{01}^2}{c^4s}\right)p^2+\frac{2\sigma hB_{01}^2}{c^2}p\right]^{-1}. \tag{3.5}$$

В уравнении (3.5), перейдя к пределу при $\sigma\to\infty$, для идеально проводящей бесконечной пластинки получим

$$\overline{\overline{w}}(\alpha,\ p)=-\frac{i\alpha B_{01}}{4\pi\rho}\frac{\gamma^*(\alpha)}{p(p^2+b^2)}, \tag{3.6}$$

где

$$b^2=\frac{D\alpha^4+\frac{B_{01}^2}{2\pi}\alpha(1+\alpha h)}{2\rho h}.$$

Произведем в выражении (3.6) обратное преобразование Лапласа. Тогда для $\bar{w}(\alpha, t)$ будем иметь

$$\bar{w}(\alpha,\ t)=-\frac{i\alpha B_{01}}{4\pi\rho}\frac{\gamma^*(\alpha)}{b^2}(1-\cos bt). \tag{3.7}$$

Для конечно проводящей пластинки согласно обратному преобразованию Лапласа из уравнения (3.5) получим

$$\bar{w}(\alpha,\ t)=-\frac{i\alpha B_{01}}{4\pi\rho}\gamma^*(\alpha)(C_1e^{p_1t}+C_2e^{p_2t}+C_3e^{p_3t}), \tag{3.8}$$

где

$$C_1=\frac{1}{(p_1-p_2)(p_1-p_3)};\quad C_2=\frac{1}{(p_2-p_1)(p_2-p_3)};\quad C_3=\frac{1}{(p_3-p_1)(p_3-p_2)};$$

p_1, p_2, p_3—корни следующего уравнения: $p^3+a_1p^2+a_2p+a_3=0$;

$$a_1=\frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{\alpha(1+\alpha h)}{h};\quad a_2=b^2;\quad a_3=\frac{Dc^2\alpha^4}{8\pi\sigma\rho h}\frac{\alpha(1+\alpha h)}{h}.$$

Допустим, что начальный магнитный импульс задан в следующем виде: $\gamma(x)=\gamma_0e^{-\frac{x^2}{k^2}}$, которому соответствует следующая начальная энергия: $Э=\frac{k\gamma_0^2}{8\sqrt{2\pi}}$.

Поступая так, как и в предыдущем случае, из уравнения (3.7) для прогиба идеально проводящей пластинки получим следующую формулу:

$$w(x,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{i\alpha B_{01}\gamma_0}{4\pi\rho}\frac{e^{-\frac{\alpha^2k^2}{4}-i\alpha x}}{b^2}(\cos bt-1)d\alpha. \tag{3.9}$$

Таким образом, имеем значение прогиба бесконечной пластинки с заданным начальным магнитным импульсом, находящейся в постоянном продольном магнитном поле.

Имея это значение, можно определить тангенциальную компоненту вектора напряженности возбуждаемого электрического поля.

При отсутствии магнитного поля, как видно из (3.9), прогиб пластинки равен нулю.

Кафедра механики сплошной среды

Поступила 13.01.1983

ЛИТЕРАТУРА

1. **Амбарцумян С. А., Багдасарян Г. Е., Белубекян М. В.** Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977.
2. **Белубекян М. В.** К задаче колебаний электропроводящей пластинки в продольном магнитном поле — Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1976, т. 29, № 5, с. 42—50.
3. **Снеддон И.** Преобразование Фурье. М.: Изд-во ИЛ, 1955.
4. **Саркисян С. В.** Магнитоупругие колебания бесконечной пластинки с заданным начальным прогибом, Механика.—Межвузовский сборник научных трудов, вып. 2, Е.: Изд-во ЕГУ, 1982, с. 120—125.

Ս. Վ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ԱՆՎԵՐՋ ՍԱԼԻ ՄԱԳՆԻՍԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ՏՐՎԱԾ ՍԿԶԲՆԱԿԱՆ ՃԿՎԱԾՔՈՎ ԿԱՄ ՄԱԳՆԻՍԱԿԱՆ ԻՄՊՈՒԼՍՈՎ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում են միջին հարթությանը զուգահեռ լարվածության վեկտոր ունեցող հաստատուն մագնիսական դաշտում գտնվող էլեկտրահաղորդիչ անվերջ սալի տատանումները՝ տրված սկզբնական ճկվածքով և սկզբնական մագնիսական իմպուլսով։ Ենթադրվում է, որ սալի նյութը չունի մագնիսացման էլեկտրական բևեռացման հատկություններ։