ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1982 Естественные науки

Математика

УДК 519.95

А. Л. НЕРСИСЯН

ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ СЛОЖНОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЕВ СИСТЕМ, МОДЕЛИРУЕМЫХ С ИСКАЖЕНИЕМ

В работе найдены асимптотически точные оценки сложности для широкого класса систем, представляющих собой множества объектов с заданными связями различных типов и допускающих при моделировании искажения в заданных пределах. Сложность системы измеряется минимальным количеством информации, которое достаточно для ее воспроизведения с заданной точностью.

В работе [1] было предложено описание систем достаточно общего вида посредством двоичных матриц и задача о сложности систем сформулирована как задача асимптотически минимального представления (кодирования) таких матриц.

В случае, когда при воспроизведении системы допускается определенная погрешность, возникает задача о представлении матриц с заданным уровнем искажения, которая сводится к следующей задаче для последовательностей [2].

Последовательность $\tilde{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ в алфавите $A=\{a_1, \ldots, a_s\}$ должна быть воспроизведена в виде последовательности $\tilde{y}=(y_1, \ldots, y_n)$ в алфавите $B=\{b_1, \ldots, b_t\}$ так, чтобы выполнялись условия

$$\rho^{(d)}(\tilde{x}, \tilde{y})=\sum_{ij} \alpha_{ij}^{(d)} w_{ij} \leqslant \varepsilon^{(d)} n, \quad d=1, \ldots, N.$$

Здесь $\alpha_{ij}^{(d)}$ $(0 \leqslant \alpha_{ij}^{(d)} < \infty)$ представляет собой «штраф» за то, что вместо a_i воспроизведен символ b_j, w_{ij} означает число позиций u, для которых $x_u=a_i$, $y_u=b_j$, а $\varepsilon^{(d)} \geqslant 0$, $d=1, \ldots, N$ —заданные допустимые уровни относительных искажений. При этом предполагается, что для каждого $i (1 \leqslant i \leqslant s)$ существует $j=j(i)$ такое, что $\alpha_{ij}^{(d)}=0$ при всех d.

Рассмотрим класс $M_n(k_1, \ldots, k_s)$ всех последовательностей длины n, содержащих k_i символов a_i, $i=1, \ldots, s$, $\sum_i k_i=n$. Пусть имеется способ кодирования $K=K_n$, который каждой последовательности $\tilde{x} \in M_n(k_1, \ldots, k_s)$ сопоставляет код $K(\tilde{x})$; длину слова $K(\tilde{x})$ обозначим через $l(\tilde{x})$. Пусть способ декодирования $D=D_n$ сопоставляет каждому коду $K(\tilde{x})$, $\tilde{x} \in M_n(k_1, \ldots, k_s)$, слово в алфавите B длины n. Слово $\tilde{y}=D(K(\tilde{x}))$ будем считать аппроксимацией $\tilde{x}$.

Обозначим

$$l_n(k_1, \ldots, k_s) = \max_{\bar{x} \in \mathcal{M}_n(k_1, \ldots, k_s)} l(\bar{x}).$$

Назовем метод кодирования—декодирования $\bar{\varepsilon}$-точным, $\bar{\varepsilon}=(\varepsilon^{(1)}, \ldots, \varepsilon^{(N)})$, $\varepsilon^{(1)} \geqslant 0, \ldots, \varepsilon^{(N)} \geqslant 0$, если для всех $\bar{x} \in \mathcal{M}_n(k_1, \ldots, k_s)$ выполняется

$$\rho^{(d)}(\bar{x} D(K(\bar{x}))) \leqslant \varepsilon^{(d)} n, \quad d=1, \ldots, N.$$

В работе [2] показано, что при достаточно общих предположениях относительно параметров $k_1, \ldots, k_s$ асимптотически оптимальные $\bar{\varepsilon}$-точные методы кодирования—декодирования обеспечивают оценку

$$l_n(k_1, \ldots, k_s) \sim n H_{\bar{\varepsilon}}\left(\frac{k_1}{n}, \ldots, \frac{k_s}{n}\right).$$

Здесь $H_{\bar{\varepsilon}}\left(\frac{k_1}{n}, \ldots, \frac{k_s}{n}\right)$ —функция $\bar{\varepsilon}$-энтропии, которая при заданных $\bar{\varepsilon}=(\varepsilon^{(1)}, \ldots, \varepsilon^{(N)})$ и $P=(p_1, \ldots, p_s)$, $\sum_i p_i=1$, $p_i \geqslant 0$, определяется как*

$$H_{\bar{\varepsilon}}(p) = H_{\bar{\varepsilon}}(p_1, \ldots, p_s) = \min_{\|r_{ij}\|} \sum_{i,j} r_{ij} \log \frac{r_{ij}}{p_i \sum_u r_{uj}}, \tag{1}$$

где минимум берется по всевозможным $(s \times t)$-матрицам $\|r_{ij}\|$, удовлетворяющим условиям

$$\sum_j r_{ij} = p_i, \quad r_{ij} \geqslant 0, \tag{2}$$

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij}^{(d)} r_{ij} \leqslant \varepsilon^{(d)}, \quad d=1, \ldots, N. \tag{3}$$

Вычисление функции $H_{\bar{\varepsilon}}(P)$ представляет собой трудную задачу даже при одном ограничении типа (3) [3].

В данной работе нами будут сформулированы две теоремы, позволяющие в некоторых частных случаях получить явный вид для функции $H_{\bar{\varepsilon}}(P)$. Эти случаи представляют интерес при изучении сложности реальных систем.

Пусть каждому символу $a_i \in A$ сопоставлена величина $p_i \geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{s} p_i = 1$, и $P=(p_1, \ldots, p_s)$. Матрицы, удовлетворяющие условиям (2) и (3), будем называть $(P, \bar{\varepsilon})$-матрицами. Класс всех $(P, \bar{\varepsilon})$-матриц обозначим через $R_{\bar{\varepsilon}}(P)$.

Рассмотрим случай, когда алфавит A включает «неопределенный» символ (будем считать, что a_s). Он характеризуется тем, что $\alpha_{sj}^{(d)}=0$,

* Здесь и далее под $\log x$ понимается $\log_2 x$.

$j=1, \ldots, t$, $d=1, \ldots, N$. Неопределенный символ будем обозначать через $*$; наряду с p_s будем использовать обозначение p_*. Для $i=1, \ldots, s-1$ положим

$$p_i^0=\frac{p_i}{1-p_*}$$

и введем набор $P^0=(p_1^0, \ldots, p_{s-1}^0)$. Очевидно, $\sum\limits_i p_i^0=1$.

Теорема 1. Имеет место равенство

$$H_{\vec{\varepsilon}}(p)=(1-p_*)H_{\frac{\vec{\varepsilon}}{1-p_*}}(P^0). \tag{4}$$

Доказательство 1. По определению имеем

$$H_{\frac{\vec{\varepsilon}}{1-p_*}}(P^0)=\min_{\mathcal{R}\in R_{\frac{\vec{\varepsilon}}{1-p_*}}(P^0)} \sum_{u,j} r_{uj}\log\frac{r_{uj}}{p_i\sum\limits_u r_{uj}}. \tag{5}$$

Здесь и далее считаем, что индекс u меняется от 1 до $s-1$, j—от 1 до t, индекс i будем считать изменяющимся от 1 до s.

Выражение под знаком минимума в правой части (1) обозначим через $I(R)$, где $R=\|r_{ij}\|$.

Пусть минимум в правой части (5) достигается на матрице $R^0=\|r_{uj}^0\|$, т. е.

$$H_{\frac{\vec{\varepsilon}}{1-p_*}}(P^0)=I(R^0). \tag{6}$$

По матрице R^0 образуем $(s\times t)$-матрицу R', положив

$$r'_{uj}=r_{uj}^0(1-p_*), \tag{7}$$

$$r'_{sj}=p_*\sum_u r_{uj}^0.$$

В работе [4] (лемма 1) доказано, что

$$(1-p_*)=I(R^0)=I(R'). \tag{8}$$

Используя соотношения (7) и то, что $R^0\in\mathcal{R}_{\frac{\vec{\varepsilon}}{1-p_*}}(P^0)$, можно записать

$$\sum_{i,j}\alpha_{ij}^{(d)}r'_{ij}=\sum_{u,j}\alpha_{uj}^{(d)}r_{uj}^0(1-p_*)\leqslant\frac{\varepsilon^{(d)}}{(1-p_*)}(1-p_*)\leqslant\varepsilon^{(d)},\quad d-1, \ldots N.$$

Отсюда и из того, что $\sum\limits_j r'_{ij}=p_i$, следует $R\in\mathcal{R}_{\vec{\varepsilon}}(P)$ и по определению функции $H_{\vec{\varepsilon}}(P)$

$$I(R')\geqslant H_{\vec{\varepsilon}}(P).$$

С учетом соотношений (6) и (8) это дает оценку

$$H_{\vec{\varepsilon}}(P)\leqslant(1-p_*)H_{\frac{\vec{\varepsilon}}{1-p_*}}(P^0). \tag{9}$$

2. Пусть, как и раньше, $\mathcal{M}_n(k_1, \ldots, k_s)$ означает класс всех последовательностей длины n с параметрами $k_1, \ldots, k_s$, $k_1+\ldots+k_s=n$, а $\mathcal{M}_{n_0}(k_1, \ldots, k_{s-1})$—класс всех последовательностей длины n_0 с параметрами $k_1, \ldots, k_{s-1}$, $k_1+\ldots+k_{s-1}=n_0$.

Скажем, что множество N последовательностей в алфавите B $\tilde{\varepsilon}$-точно аппроксимирует множество $\mathcal{M}$ последовательностей в алфавите A, если для каждой последовательности из $\mathcal{M}$ в N имеется некоторая ее $\tilde{\varepsilon}$-точная аппроксимация.

Обозначим через $T_{\tilde{\varepsilon}}(k_1, \ldots, k_s)$ минимальную мощность множества, $\tilde{\varepsilon}$-точно аппроксимирующее $\mathcal{M}_n(k_1, \ldots, k_s)$ и через $T_{\tilde{\varepsilon}\frac{n}{n_0}}(k_1, \ldots, k_{s-1})$— минимальную мощность множества, $\tilde{\varepsilon}\frac{n}{n_0}$-точно аппроксимирующего $\mathcal{M}_{n_0}(k_1, \ldots, k_{s-1})$. Имеет место неравенство

$$T_{\tilde{\varepsilon}}(k_1, \ldots, k_s)\geqslant T_{\tilde{\varepsilon}\frac{n}{n_0}}(k_1, \ldots, k_{s-1}). \tag{10}$$

Чтобы убедиться в этом, выделим в классе $\mathcal{M}_n(k_1, \ldots, k_s)$ подкласс $\mathcal{M}_n^0(k_1, \ldots, k_s)$ всех последовательностей длины n, содержащих неопределенные символы $*$ на последних k_s местах. Множество N, $\tilde{\varepsilon}$-точно аппроксимирующее $\mathcal{M}_n(k_1, \ldots, k_s)$, $\tilde{\varepsilon}$-точно аппроксимирует и все наборы из $\mathcal{M}_n^0(k_1, \ldots, k_s)$. Если отбросить последние k_s разрядов в наборах множества N, получим $\tilde{\varepsilon}\frac{n}{n_0}$-точную аппроксимацию для $\mathcal{M}_{n_0}(k_1, \ldots, k_{s-1})$, ибо

$$\sum_{u,j}\alpha_{ij}^{(d)}w_{uj}\leqslant\varepsilon^{(d)}n=\left(\frac{\varepsilon^{(d)}n}{n_0}\right)n_0.$$

Пусть теперь $k_u=[p_u n]$, $k_s=n-\sum_u k_u$. Сочетание метода из [4] и леммы 2 из работы [2] позволяет получить оценку

$$\log T_{\tilde{\varepsilon}}(k_1, \ldots, k_s)=nH_{\tilde{\varepsilon}}(P)+O(\log n). \tag{11}$$

Для класса $\mathcal{M}_{n_0}(k_1, \ldots, k_{s-1})$ аналогичная оценка имеет вид

$$\log T_{\frac{\tilde{\varepsilon}}{1-p_s}}(k_1, \ldots, k_{s-1})=n_0 H_{\frac{\tilde{\varepsilon}}{1-p_s}}(P^0)+O(\log n_0). \tag{12}$$

Из (10), (11) и (12) получаем

$$nH_{\tilde{\varepsilon}}(P)\geqslant n_0 H_{\frac{\tilde{\varepsilon}}{1-p_s}}(P^0)-O(\log n). \tag{13}$$

Зададимся некоторым натуральным числом β и перепишем неравенство (13) для $n\beta$, $n_0\beta$ и $K_i=k_i\beta n$ в виде

$$n\beta H_{\tilde{\varepsilon}}(P)\geqslant n_0\beta H_{\frac{\tilde{\varepsilon}}{1-p_s}}(P^0)-O(\log n\beta).$$

Разделив на β и переходя к пределу при $\beta\to\infty$, получим

$$H_{\iota}(P)\geqslant(1-p_*)H_{\frac{\iota}{1-p_*}}(P^0).$$

Отсюда и из (9) следует утверждение теоремы.

Рассмотрим случай, когда для каждого $i=1, \ldots, s$ существует единственное $j=j(i)$ такое, что $\alpha_{ij}^{(d)}=0$ при всех $d=1, \ldots, N$. В следующей теореме этот случай исследуется применительно к специальному виду ограничений.

Т е о р е м а 2. Пусть условия (3) имеют вид

$$r_{ij}\leqslant\varepsilon_{ij},\quad i=1, \ldots, s,\ j\neq j(i),\ \varepsilon_{ij}\geqslant 0$$

и пусть все компоненты набора $P=(p_1, \ldots, p_s)$ строго положительны. Тогда существует такая величина $\delta>0$, что при выполнении условий $\varepsilon_{ij}\leqslant\leqslant\delta$ минимум в правой части (1) достигается на матрице $R^0\,\|r_{ij}^0\|$,

где
$$r_{ij}^0=\varepsilon_{ij},\quad j\neq j(i),$$
$$r_{ij(i)}^0=p_i-\sum_{j\neq j(i)}\varepsilon_{ij}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначения

$$q_j=\sum_{i=1}^{s}r_{ij}=\sum_{i:j\neq j(i)}r_{ij}+\sum_{i:j=j(i)}(p_i-\sum_{k:k\neq j}r_{ik}) \tag{14}$$

и $Q=(q_1, \ldots, q_t)$. Тогда величина $I(R)$ может быть записана в виде [3]

$$I(R)=H(P)+H(Q)-H(R),$$

где через $H(\cdot)$ обозначена энтропийная функция. С учетом (14) это выражение можно переписать в виде

$$I(R)=H(P)-\sum_j(\sum_{i:j\neq j(i)}r_{ij}+\sum_{i:j=j(i)}(p_i-\sum_{k:k\neq j}r_{ik}))\times$$
$$\times\log(\sum_{i:j\neq j(i)}r_{ij}+\sum_{i:j=j(i)}(p_i-\sum_{k:k\neq j}r_{ik}))+\sum_{i,j:j\neq j(i)}r_{ij}\log r_{ij}+$$
$$+\sum_i(p_i-\sum_{j:j\neq j(i)}r_{ij})\log(p_i-\sum_{j:j\neq j(i)}r_{ij}).$$

Считая (для удобства) логарифмы натуральными, найдем частную производную по переменной r_{uv}, $v\neq j(u)$:

$$\frac{\partial I(R)}{\partial r_{uv}}=\sum_{j:j\neq v}(\ln(\sum_{i:j\neq j(i)}r_{ij}+\sum_{i:j=j(i)}(p_i-\sum_{k:k\neq j}r_{ik}))-1)-$$
$$-\ln(\sum_{i:v\neq j(i)}r_{iv}+\sum_{i:v=j(i)}(p_i-\sum_{k:k\neq v}r_{ik}))-1+ \tag{15}$$
$$+\ln r_{uv}+1-\ln(p_u-\sum_{j:j\neq j(u)}r_{uj})+1.$$

Если все r_{ij} устремить к нулю, то в силу положительности величин p_i $(i=1, \ldots, s)$ слагаемые выражения (15), исключая $\ln r_{uv}$, будут ограниченными, а $\ln r_{uv}$ будет стремиться k $-\infty$. Поэтому найдется такое $\delta>0$, что для всех $r_{ij}<\delta$

$$\frac{\partial I(R)}{\partial r_{uv}}<0,\quad u\in\{1, \ldots, s\},\quad v\in\{1, \ldots, t\}\setminus\{j(u)\}.$$

В этом случае функция $I(R)$ убывает по всем переменным r_{uv} и ее минимум достигается на границе $r_{ij}=\varepsilon_{ij}$ для всех i, j $(j\neq j(i))$, что и требовалось доказать.

Как уже отмечалось, вычисление функции $H_{\bar{\varepsilon}}(p)$ представляет собой трудную задачу даже при одном ограничении типа (3). Доказанные теоремы позволяют получить ее явный вид для некоторых важных частных случаев систем.

Будем исходить из представления о системе как о множестве взаимосвязанных элементов. Связи между элементами системы могут быть нескольких «типов». В терминах работы [1] каждый тип связей означает наличие бинарного отношения.

Для систем с большим числом типов связей используются некоторые аппроксимирующие модели. При этом в процессе упрощения допускаются искажения. Например, связи одних типов могут перейти в связи других. При этом для некоторых «жестких» связей искажения не допускаются. В системах могут существовать и «несущественные» связи, которые в модели могут быть заменены любыми другими.

Если изобразить элементы систем вершинами, связи—ребрами, разным «типам» связей сопоставить различные цвета, то система будет представлена в виде графа с раскрашенными ребрами.

Пусть ребра графа G раскрашиваются цветами из алфавита $A=\{a_1, \ldots, a_s\}$. В целях единообразия отсутствие связи между элементами будем трактовать как связь некоторого выделенного цвета. Пусть модель также представляет собой граф, ребра которого раскрашиваются в цвета из алфавита $B=\{b_1, \ldots, b_t\}$. Погрешность, допускаемая при переходе от графа G, описывающего систему, к графу G′, соответствующему модели, задается набором величин

$$\bar{\Delta}=\{\Delta_{ij},\ i=1, \ldots, s,\ j=1, \ldots, t\}, \tag{16}$$

где Δ'_{ij}—ограничения на количество ребер i-го цвета, которые в модели получают j-й цвет. Причем для каждого $i (i=1, \ldots, s)$ существует такое единственное $j=j(i)$, что ограничений на Δ_{ij} нет (в частности, если $A=B$, то $j(i)=i$).

«Несущественные» связи могут переходить без ограничений в любой тип; соответствующий им цвет будем обозначать через $\ast$ и считать, что $\ast=a_s$. В противоположность этому «жестким» связям системы соответствуют ребра, которые в процессе упрощения не могут изменять свою раскраску.

Введем вектор относительных ограничений

$$\bar{\varepsilon}=\frac{\bar{\Delta}}{n}. \tag{17}$$

Умножая обе части (4) на n, с учетом обозначений (16) и (17) теорему 1 можем переписать в виде

$$nH_{\frac{\bar{\Delta}}{n}}\left(\frac{P}{n}\right)=n_0H_{\frac{\bar{\Delta}}{n_0}}\left(\frac{P^0}{n_0}\right), \tag{18}$$

где n—общее число ребер графа G, а n_0—число ребер, не раскрашенных в a_s-ый («несущественный») цвет.

Равенство (18) показывает, что удаление «несущественных» связей не изменяет значения функционала при той же величине абсолютной погрешности $\breve{\Delta}$, поэтому дальше будем рассматривать системы с удаленными «несущественными» связями и под n будем подразумевать общее число связей без учета несущественных.

Для систем рассматриваемого вида результат теорем 1 и 2 может быть записан в виде

$$H_{\frac{\breve{\Delta}}{n}}\left(\frac{P}{n}\right)=n\log n-\sum_{i=1}^{s-1}k_i\log k_i-\sum_{j=1}^{t}m_j\log m_j+$$
$$+\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{j=1}^{t}u_{ij}\log u_{ij}, \tag{19}$$

где k_i—число связей типа i, $n=\sum_{i=1}^{s-1}k_i$, $m_j=\sum_{j=1}^{t}u_{ij}$, а

$$u_{ij}=\begin{cases}\Delta_{ij} & \text{при}\quad j\neq j(i),\\ k_i-\sum\limits_{j\neq j(i)}\Delta_{ij} & \text{при}\quad j=j(i).\end{cases}$$

ВНИИСИ

Поступила 11.03.1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нерсисян А. Л.** О сложности эффективного описания систем.—Электронная техника, сер. Экономика и системы управления, М.: 1982, вып. 2.
2. **Нерсисян А. Л.** Полиномиальный алгоритм кодирования дискретной информации с заданным уровнем искажения.—Докл. АН Арм. ССР, Ереван: 1982 (в печати).
3. **Галлагер Р.** Теория информации и надежная связь. Изд-во Советское радио. М.: 1973.
4. **Шоломов Л. А.** О функционалах, характеризующих сложность систем недоопределенных булевых функций.— Сб. Проблемы кибернетики, вып. 19. М.: Наука, 1967, с. 123—140.

Ա. Լ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ

ԲԱՐԴՈՒԹՅԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼՆԵՐԻ ՀԱՇՎՈՒՄԸ ԱՂԱՎԱՂՈՒՄՆԵՐՈՎ ՄՈԴԵԼԱՎՈՐՎՈՂ ՈՐՈՇ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Հոդվածում ստացված են բարդության ասիմպտոտիկ ճիշտ գնահատականներ լայն շրջանակի համակարգերի համար, որոնք իրենցից ներկայացնում են օբյեկտների բազմություններ՝ իրենց տարբեր տիպերի կապերով։ Ընդ որում այս համակարգերի մոդելավորման ժամանակ թույլատրվում են աղավաղումներ տրված սահմաններում։ Համակարգի բարդությունը չափվում է նվազագույն ինֆորմացիայի քանակությամբ, որը բավարար է այն տրված ճշտությամբ վերականգնելու համար։