

УДК 62-50

Н. В. ОВАКИМЯН

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ В ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ ПРОСТОГО ПРЕСЛЕДОВАНИЯ НА ПЛОСКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ПРЕПЯТСТВИЯ

Рассматривается игровая задача простого преследования на плоскости при наличии препятствия. Оптимальные траектории этой задачи - геодезические линии или их огибающие (особые траектории). Предложен алгоритм построения той области, на которой кончаются все оптимальные траектории. Показано, что в двумерной задаче это множество всегда непусто. Доказано существование особой рассеивающей поверхности. Для нескольких конкретных примеров препятствий построены области безусловного огибания, т.е. множества начальных положений преследующего игрока, для которых его оптимальное поведение состоит в огибании препятствия по геодезической линии независимо от положения убегающего.

Рассматривается игровая задача простого преследования на евклидовой плоскости при наличии выпуклого ограниченного препятствия, границу которого игрокам запрещено пересекать. Постановка задачи с круговым препятствием дана в книге [1]. В работе [2] на основе необходимых условий оптимальности построено решение игры преследования с произвольным выпуклым препятствием, получены уравнения особых движений. Игровые задачи сближения и преследования решены для кругового препятствия в [3-5]. В статье [6] дано обобщение результатов [2] на случай, когда пространством игры является многообразие определенного класса, показано, что оптимальные траектории преследования и убегания являются геодезическими линиями либо их огибающими (особые движения), получено необходимое условие существования особых траекторий.

В данной работе показано, что упомянутое условие выполнено для евклидова пространства с препятствием, предложен алгоритм построения множества точек, удовлетворяющих этому условию, исследована особая рассеивающая поверхность [1], в конкретных примерах построены области безусловного огибания, т.е. множества начальных положений преследующего игрока, для которых его оптимальное поведение состоит в огибании препятствия по геодезической линии, независимо от положения убегающего.

§1. Постановка задачи. Пусть управляемое движение двух точек (игроков) P и E в n -мерном пространстве R^n описывается уравнениями и ограничениями:

$$\dot{y} = u, \quad |u| \leq 1, \quad (1.1)$$

$$\dot{z} = v, \quad |v| \leq \nu, \quad 0 < \nu < 1.$$

Здесь $y, z \in \mathbb{R}^n$ – векторы координат точек P, E соответственно, $u, v \in \mathbb{R}^n$ – векторы их скоростей. Знаком модуля обозначена длина вектора (евклидова норма) $|u| = (u_1^2 + \dots + u_n^2)^{1/2}$. Пусть в пространстве \mathbb{R}^n зафиксировано выпуклое множество D (препятствие), границу которого игрокам запрещено пересекать. Движение по самой границе допустимо. Итак, движение точек P и E происходит в замыкании \bar{Y} области Y , т.е.

$$y(t), z(t) \in \bar{Y}, \quad Y = \mathbb{R}^n \setminus D, \quad (1.2)$$

где $y(t), z(t)$, $0 \leq t \leq T$ – траектории точек P, E , соответствующие некоторым допустимым управлениям.

Пусть $\gamma(P, E)$ – произвольная непрерывная кривая с концами в точках P и E , лежащая в области \bar{Y} , а $h(\gamma)$ – ее длина. Линию, доставляющую глобальный минимум $\min_{\gamma} h(\gamma(P, E))$, $\gamma \subset \bar{Y}$, будем называть геодезической, локальные минимумы – экстремалими. Длину геодезической линии будем обозначать $L(y, z)$. Дадим формулировку игры преследования. Игра начинается в момент $t=0$ и считается законченной в первый момент времени $t=T > 0$, когда геодезическое расстояние между игроками удовлетворит неравенству

$$L(y(T), z(T)) \leq \ell \quad (\ell \geq 0). \quad (1.3)$$

Платой или функционалом в игре считается время поимки T , которое игрок P минимизирует, а E – максимизирует, напр., в классе ϵ -оптимальных, позиционных стратегий [7]. Игру будем понимать как объединение минимаксной и максиминной игр на гарантированный результат [8]. Более детальная формализация игры (1.1)-(1.3) для дальнейших рассмотрений не потребуется.

§2. Структура решения. Расширенным пространством игры будем называть прямое произведение $X = \bar{Y} \times \bar{Y}$; элементами x множества X являются пары векторов $x = (y, z) \in \mathbb{R}^{2n}$, где $y \in \bar{Y}, z \in \bar{Y}$. Обозначим через X_0 ту часть пространства X , точкам которого соответствует отрезок $PE \in \mathbb{R}^n$, имеющий непустое пересечение с препятствием D .

Естественно предположить, что в некоторой части $X_1 \subset X_0$ оптимальным движением игроков будет движение вдоль геодезической линии [2].

Дальнейший анализ структуры решения упрощает следующее основное предположение относительно формы области D , геометрии многообразия \bar{Y} , которое будем считать выполненным: для точек $(y, z) \in X_0$ существуют две экстремали γ^+, γ^- с длинами $L^+(y, z)$, $L^-(y, z)$, такие, что длина геодезической определяется равенством (рис.1)

$$L(y, z) = \min(L^+(y, z), L^-(y, z)). \quad (2.1)$$

Свойство (2.1) всегда выполнено в плоской задаче с ограниченным препятствием. В области X_1 , как следует из ее определения, оптимальное время $S(y, z)$ движения до поимки будет

$$S(y, z) = (L(y, z) - \ell) / (1 - \nu). \quad (2.2)$$

В работе [2] показано, что в плоском случае граница множества $X_2 = X_0 \setminus X_1$ состоит из двух эквивокальных поверхностей Γ^+, Γ^- , имеющих

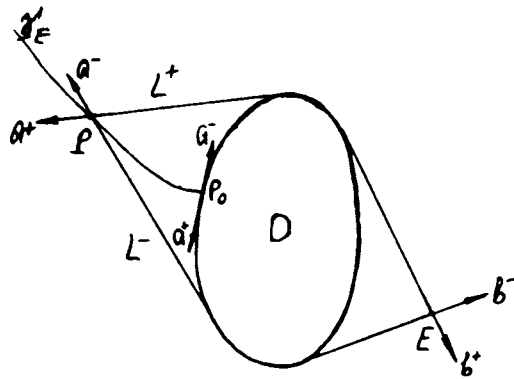


Рис. 1.

общий край В и состоящих из особых оптимальных траекторий игры, приходящих в точки множества В (рис.2). Поверхности Γ^+ , Γ^- являются огибающими семейства прямолинейных траекторий в области X_2 .

В рамках предположения (2.1) рассмотрения, основанные на необходимых условиях оптимальности [2], можно распространить также и на случай $n \geq 2$ [4].

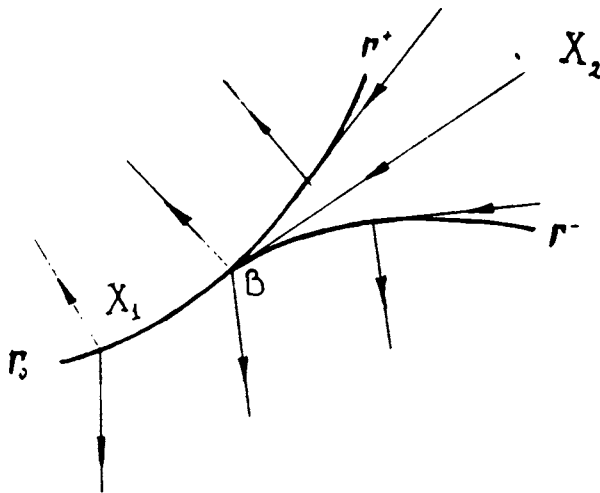


Рис. 2.

Многообразие В представляет собой край поверхности

$$\Gamma_0 = \{x \in X_1 \subset X_0, S^+(x) = S^-(x), \min_u \max_v \dot{S} + 1 \geq 0\}, \quad (2.3)$$

где $\dot{S} = \min[\dot{S}^+, \dot{S}^-]$, $\dot{S}^\pm = \dot{L}^\pm / (1 - \nu)$ — полные производные по времени, т.е. производные по направлению $(u, v) \in R^{2n}$. Если функции L^\pm дифференцируемы, то $\dot{L}^\pm = (a^\pm, u) + (b^\pm, v)$, где a^\pm, b^\pm — векторы частных производных (градиенты).

В соотношениях (2.3) использовано одно из неравенств, обобщающих основное уравнение Беллмана-Айзекса [2,8].

§3. Условие существования особых движений. Необходимым условием существования особых движений является непустота множества В [2]. Вычислением экстремумов в (2.3) можно показать [6], что на

поверхности Γ_0 выполнено условие

$$\Phi(y, z) \equiv \left[-\frac{1}{2} |a^+ + a^-| + \frac{\nu}{2} |b^+ + b^-| \right] / (1-\nu) \geq -1, \quad (3.1)$$

где векторы $a^\pm, b^\pm \in \mathbb{R}^n$, зависящие от y, z , определены выше. В точках дифференцируемости функций $L^\pm(y, z)$ они представляют собой единичные касательные векторы к геодезическим линиям (рис.1). Покажем, что Γ_0 является рассеивающей поверхностью [1], т.е. из ее точек исходят под ненулевым углом две оптимальные траектории. Для этого достаточно доказать, что при использовании управлений $u = -a^+(-a^-)$, $v = \nu b^+(\nu b^-)$ длина $L^+(L^-)$ убывает быстрее, чем $L^-(L^+)$. Вычислим, напр., производную $\dot{L}^+ - \dot{L}^-$ вдоль движений с управлениями $-a^+, \nu b^+$

$$\dot{L}^+ - \dot{L}^- = (a^+ - a^-, u) + (b^+ - b^-, v) = -1 + a^+ a^- + \nu - \nu b^+ b^-$$

Введем обозначения $\alpha = a^+ a^-$, $\beta = b^+ b^-$. Величины α, β меняются в пределах $-1 \leq \alpha, \beta \leq 1$, причем правой границе соответствуют бесконечно удаленные точки P, E, а левой — точки P, E, лежащие на ∂D . Покажем, что $\dot{L}^+ - \dot{L}^- < 0$, т.е. L^+ убывает быстрее, чем L^- . Это неравенство можно записать в виде $\alpha < 1 - \nu + \nu \beta$. На поверхности Γ_0 , вплоть до края В, выполнено условие (3.1), которое в переменных α, β принимает вид

$$\alpha \leq \psi(\beta) \equiv (\nu(1+\beta))^{1/2} + \sqrt{2}(1-\nu)^2 - 1.$$

Функция $\psi(\beta)$ строго выпукла вверх ($\psi''(\beta) < 0$), причем прямая $\alpha = 1 + \nu + \nu \beta$ является касательной к графику $\psi(\beta)$ в точке $\beta = 1$. График выпуклой функции лежит ниже любой своей касательной, следовательно,

$$\alpha \leq \psi(\beta) < 1 - \nu + \nu \beta, \quad |\beta| < 1.$$

Аналогично доказывается случай с управлениями $u = -a^-, v = \nu b^-$. Таким образом, поверхность Γ_0 — рассеивающая, а ее край В задается равенствами

$$L^+(y, z) = L^-(y, z), \quad \Phi(y, z) = -1. \quad (3.2)$$

Из рассмотрений следующего раздела вытекает, что в плоской задаче преследования многообразия В всегда непусто.

§4. Алгоритм построения многообразия В. Покажем, что в плоской задаче преследования многообразия В взаимно однозначно отображается на пространство игры \bar{Y} . Примем для простоты, что область D имеет гладкую границу.

Существует естественное отображение В на \bar{Y} . Поскольку $B \subset X$, то элементами В являются пары вида (P, E), где $P, E \in \bar{Y}$. Сопоставим точке (P, E) $\in B$ точку $E \in \bar{Y}$.

Построим обратное отображение \bar{Y} на В. Зафиксируем некоторую точку $E^* \in \bar{Y}$, задаваемую вектором координат z^* . При фиксированном z^* равенство $L^+(y, z^*) - L^-(y, z^*) = 0$ определит непрерывную кривую $\gamma_E \subset \bar{Y}$ (множество положений игрока P) (рис.1). Кривая γ_E начинается с некоторой точки $P_0 \in \partial D$ и уходит в бесконечность. Рассмотрим функцию (3.1) на этой кривой. В плоском случае векторы $b^\pm = b^\pm(z)$ не зависят от y , а векторы $a^\pm = a^\pm(y)$ не зависят от z (если только $(P, E) \in X_0$). В точке $P_0 \in \partial D$ имеем $a^+ + a^- = 0$ (рис.1), $\Phi = \Phi_0 = \frac{\nu}{2} |b^+ + b^-| / (1 - \nu) \geq 0$. При $P \rightarrow \infty$ вдоль кривой γ_E получаем $\Phi \rightarrow \Phi_\infty = \frac{\nu}{2} |b^+ + b^-| (-1) / (1 - \nu) < -1$, поскольку $|a^+ + a^-| \rightarrow 2$. Следовательно, существует точка $P^* \in \gamma_E$,

в которой выполнено равенство $\Phi(y^*, z^*) = -1$, т.е. $(P^*, E^*) \in B$. Можно показать, что при движении точки P вдоль γ_E от P_0 к бесконечности величина $|a^+ + a^-|$ монотонно возрастает. Это означает, что существует единственная точка (P^*, E^*) многообразия B , соответствующая точке $E^* \in \bar{Y}$. Таким образом многообразие B также, как и область \bar{Y} , является двумерным многообразием с краем. Предложенное отображение \bar{Y} на B является конструктивным и составляет основу алгоритма построения точек множества B .

§5. Построение областей безусловного огибания. Рассмотрим множество $Y_P \subset \bar{Y}$ точек P таких, что существует точка $E \in \partial D$ и выполнены условия: $L^+ = L^-$ и $|a^+ + a^-| \leq 2(1-\nu)$. Из соотношений (3.2) и неравенства $|b^+ + b^-| > 0$ следует, что если $P \in Y_P$, то не существует точки $E \in \bar{Y}$ (положения убегающего игрока), такой, что $(P, E) \in B$, т.е. для любой пары (P, E) , $P \in Y_P, E \in \bar{Y}$ выполнено условие (3.1). Это означает, что $(P, E) \in X_1$. Таким образом, если в начальный момент времени имеет место включение $P \in Y_P$, то оптимальным поведением игрока P является огибание препятствия по геодезической линии независимо от положения E . При этом движении неравенство $|a^+ + a^-| < 2(1-\nu)$ может только усилиться, поэтому точка $x \in X$ (соответствующая положению игроков P, E) может покинуть множество X_1 только через границу области X_0 . Если P принадлежит дополнению множества Y_P , т.е. $P \in X_0 \setminus Y_P$, то существуют положения E , при которых $(P, E) \in X_1$ либо $(P, E) \in X_2$. В последнем случае игрок P начинает оптимальное движение по касательной к оптимальной траектории [2]. В этом смысле множество Y_P будем называть областью безусловного огибания. На границе Y_P выполнено равенство

$$|a^+ + a^-| = 2(1-\nu). \quad (5.1)$$

Заметим, что величина $|a^+ + a^-|$ зависит только от угла φ^* между векторами a^\pm . Равенство (5.1) определяет значение косинуса этого угла:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= 2(1-\nu)^2 - 1, \\ \varphi^* &= \arccos[2(1-\nu)^2 - 1], \quad 0 < \varphi^* < \pi. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Из формулы (5.2) видно, что при фиксированном ν $\cos \varphi$ — постоянная величина, т.е. не зависит от положения точки P . Это означает, что точка P должна лежать на кривой, из точек которой препятствие "видно" под углом φ^* . Построим области безусловного огибания для некоторых конкретных форм препятствий.

Круг. Множество точек, из которых круг радиуса r (препятствие) виден под углом (5.2), образует окружность радиуса $R = r / (\nu(2-\nu))^{1/2}$.

Отрезок. Для простоты примем, что препятствие — отрезок AB находится на оси ординат с концами в точках $(0, -1), (0, 1)$. Как следует из свойств вписанного в окружность угла, отрезок AB виден под постоянным углом φ^* из точек дуг двух окружностей, имеющих радиус

$$R = (1+c^2)^{1/2}, \quad c = \frac{2(1-\nu)^2 - 1}{(1 - (2(1-\nu)^2 - 1)^2)^{1/2}}$$

и центры в точках $(\pm c, 0)$ (рис.3). При $\varphi^* < \frac{\pi}{2} \left(\nu < 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ границей множества Y_p служит большая из дуг каждой окружности (указанной на рис.3 сплошной линией). при $\varphi^* > \frac{\pi}{2} \left(\nu > 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ — меньшая (пунктирная линия на рис.3). При $\varphi^* = \pi/2$, т.е. $\nu^* = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ обе окружности совпадают между собой и с границей ∂Y_p . Значениям $\nu = \nu_0$ ($0 < \nu_0 < \nu^*$) и $\nu_1 = 1 - (1 - (1 - \nu_0)^2)^{1/2}$ соответствуют окружности одного и того же радиуса, центры которых расположены на расстоянии $|c|$ от отрезка АВ по разные его стороны. Уравнения упомянутых окружностей можно получить из формулы (5.1).

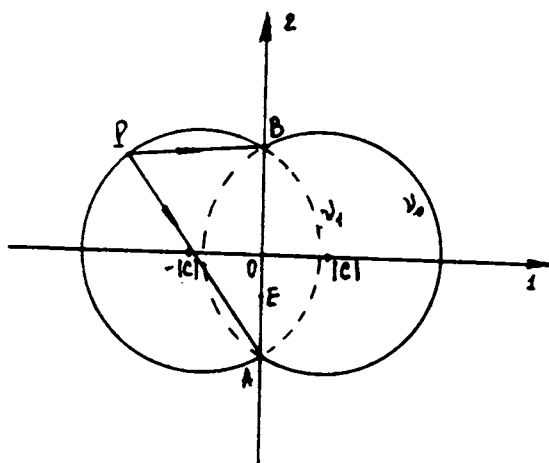


Рис. 3.

Прямоугольник. Здесь граница ∂Y_p строится на основе предыдущего примера. Если из некоторой точки Р прямоугольник виден под углом φ^* , то под этим же углом φ^* виден один из шести отрезков — четырех сторон и двух диагоналей прямоугольника. Таким образом необходимо выделить те области, для которых угловой размер прямоугольника определяется тем или иным образом. Продолжения сторон прямоугольника определяют восемь областей в форме полуполосы и прямого угла. Из точек прямых углов видна соответствующая диагональ, из точек полуполос — соответствующая сторона. В каждой из этих областей должна быть оставлена в качестве границы ∂Y_p та часть дуги окружности, опирающейся на соответствующий отрезок, которая лежит в этой области. Таким образом граница ∂Y_p представляет собой непрерывную замкнутую кривую, состоящую из дуг, вообще говоря, восьми окружностей. Если ν превышает критическое значение $\nu^* = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, то дуги окружностей в прямых углах отсутствуют, т. е. ∂Y_p состоит из дуг четырех окружностей (рис.4).

Отметим одну особенность, связанную с негладкостью границы

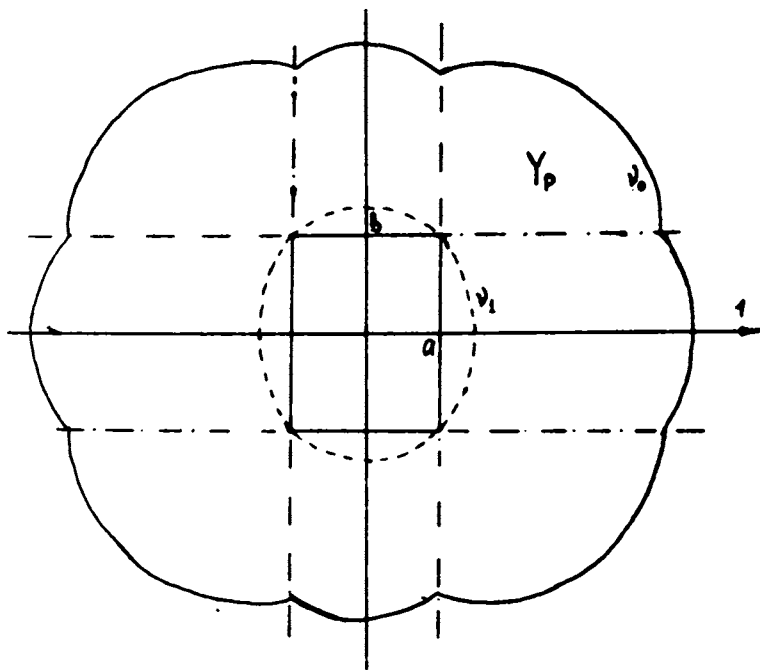


Рис. 4.

препятствия в последних двух примерах. Соотношение $|a^+ + a^-| - \nu |b^+ + b^-| = 2(1 - \nu)$ получено в предположении, что функции L^\pm непрерывно дифференцируемы, т.е. производные по направлению L^\pm равны скалярным произведениям градиентов на вектор направления. Это свойство теряется, если один из концов геодезической лежит в угловой точке границы. Данную трудность можно обойти двумя путями. Первый состоит в скруглении угловых точек границы ∂D с достаточно малым радиусом ϵ и в предельном переходе $\epsilon \rightarrow 0$. Другой способ состоит в использовании в (2.3) общих формул для производных по направлению функций L^\pm . Оба способа приводят к тому, что в соотношении $|a^+ + a^-| - \nu |b^+ + b^-| = 2(1 - \nu)$ при $\epsilon \in \partial D$ следует положить $|b^+ + b^-| = 0$. В приведенном выше построении линии ∂Y_p фактически использовались лишь гладкие точки границы ∂D , куда градиенты функций L^\pm могут быть непрерывно доопределены, а затем рассматривалось замыкание полученного множества.

Автор благодарит А.А. Меликяна за постановку задачи и большое внимание к работе.

Кафедра теоретической
механики

Поступила 25.04.1990

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967, 479с.
2. Вишневецкий Л.С., Меликян А.А. Оптимальное преследование на плоскости при наличии препятствия. - ПММ, 1982, т.46, вып.4, с.613-620.
3. Пожарицкий Г.К. Задача Айзекса об огибании острова. - ПММ, 1982, т.46, вып.5, с.707-713.

4. Куликowa Г.Ю., Малафеев О.А., Петросян Л.А. Игра простого преследования на плоскости с препятствием. I. - В кн.: Динамические управляемые системы. Якутск:Изд-во Якутского университета, 1983, с.83-100.
5. Куликowa Г.Ю., Малафеев О.А., Петросян Л.А. Игра простого преследования на плоскости с препятствием. II. - В кн.: Управление динамическими системами. Якутск:Изд-во Якутского университета, 1986, с.54-63.
6. Мелкян А.А., Овакимян Н.В. Особые траектории в задаче простого преследования на многообразии. - ПММ, 1991, т.55, вып.1.
7. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.:Наука, 1974, 455с.
8. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.:Наука, 1981, 286с.

Ն.Վ.ՀՈՎԱԿԻՄՅԱՆ

ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ ՊԱՐԶ ՀԵՏԱԳՆՆԱԿԱՆ ԽԱՂԱՅԻՆ ԽՆՆՈՒ ՕՊՏԻՄԱԼ ՀԵՏԱԳԾԵՐԻ ԵՐԿՐԱԶԱՓԱԿԱՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ ԽՈՋՐՆՆՈՏԻ ԱՌՎԱՅՈՒԹՅԱՐԲ

Ա մ փ ո փ ո մ

Դիտարկվում է հարթության վրա խոչընդոտի առկայությամբ հետապնդման խնդիր: Այս խնդրի օպտիմալ հետագծերը կամ գեոդեզիկներն են կամ նրանց պարաբոլիչները (սինգուլյար հետագծերը): Առաջարկվում է ալգորիթմ այն բազմությունը կառուցելու համար, որի վրա ավարտվում են բոլոր սինգուլյար հետագծերը: Ցույց է տրվում, որ երկչափ դեպքում այդ բազմությունը միշտ դատարկ չէ: Ապացուցվում է սինգուլյար ցրող մակերևույթի գոյությունը: Խոչընդոտների մի քանի օրինակների համար կառուցված են հետապնդողի ոչ պայմանական շրջանցման տիրույթները՝ անկախ փախնողից:

N. V. HOVAKIMYAN

THE GEOMETRICAL PROPERTIES OF OPTIMAL TRAJECTORIES
IN THE GAME OF SIMPLE PURSUE ON PLANE
IN THE PRESENCE OF OBSTACLE

SUMMARY

The game problem of pursue on plane in the presence of obstacle is considered. The optimal trajectories of this system are either geodesic lines or their envelopes (singular paths). An algorithm of constructing the domain on which all singular paths end is suggested. It is shown that in the two-dimensional case this domain is always non-empty. The existence of singular dispersal surface is proved. In several examples the domains of unconditional envelope of obstacle by pursuer are constructed (irrespective of evader).