ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1994 Естественные науки

Механика

УДК 539.3

В.С. САРКИСЯН, К.А. ГАЛСТЯН, Н.А. КУТУЗЯН

О СТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ В ОРТОТРОПНОМ НЕОДНОРОДНОМ КЛИНОВИДНОМ ТЕЛЕ

Рассматривается стационарное распределение температуры в цилиндрическо-ортотропном неоднородном клине, когда неоднородность является экспоненциальной функцией радиуса. Для различных термоупругих характеристик фундаментальное решение краевой задачи выражено через функции Унттекера.

Рассмотрим цилиндрическое неоднородное клиновидное тело, обладающее цилиндрической анизотропией, в отношении тепловых свойств [1] и относящееся к системе цилиндрических координат r, φ, z ; ось z совмещается с осью анизотропии (т.е. тело имеет в каждой точке три плоскости тепловой симметрии, и оси r, φ, z являются главными осями проводимости). Рассмотрим двумерную задачу теплопроводимости, когда в одном краю клина дана постоянная температура T_0, а на другом – постоянный тепловой поток. Тепловые потоки в направлениях r и φ определяются следующим образом [2-4]:

$$q_r = -\lambda_r \frac{\partial T}{\partial r}, \quad q_\varphi = \frac{\lambda_\varphi}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi}. \tag{1}$$

Здесь T – температура, а функции $\lambda_r = \lambda_r(r, \varphi)$ и $\lambda_\varphi = \lambda_\varphi(r, \varphi)$ характеризуют теплопроводности в соответствующих направлениях. Тогда уравнения баланса тела в стационарном случае при отсутствии тепловых источников внутри тела с учетом (1) будут иметь вид

$$\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda_r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\lambda_\varphi\frac{\partial T}{\partial \varphi}\right) = 0. \tag{2}$$

Пусть функции неоднородности $\lambda_r(r, \varphi)$ и $\lambda_\varphi(r, \varphi)$ заданы в таком виде

$$\lambda_r = \lambda_r^0 e^{-sr}, \quad \lambda_\varphi = \lambda_\varphi^0 e^{-sr}, \tag{3}$$

где λ_r^0, λ_φ^0 и s известные постоянные. Тогда уравнение теплопроводности (2) примет вид

$$r^2\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + r(1 - sr)\frac{\partial T}{\partial r} + \lambda^2\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (4)$$

где $\lambda = \sqrt{\lambda^0_\varphi/\lambda^0_r}$.

Для компонентов теплового потока (1) с учетом (3) будем иметь следующие выражения:

$$q_r = -\lambda^0_r\, e^{-sr}\frac{\partial T}{\partial r}, \quad q_\varphi = -\lambda^0_\varphi\,\frac{e^{-sr}}{r}\frac{\partial T}{\partial \varphi}. \quad (5)$$

Тогда при помощи (5) граничные условия рассматриваемой задачи будут

$$T(r,\varphi) = T_0, \quad при \quad \varphi = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{q^0_\varphi}{\lambda^0_\varphi}e^{sr}r, \quad при \quad \varphi = \alpha. \quad (7)$$

Здесь q^0_φ – заданное значение теплового потока, угол α – раствор клина. Решение уравнения (4) представим в виде

$$T(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi), \quad (8)$$

где $R(r)$ и $\Phi(\varphi)$ удовлетворяют

$$\left.\begin{aligned} &r^2R''(r) + r(1 - sr)R'(r) - \mu^2R(r) = 0\\ &\lambda^2\Phi''(\varphi) + \mu^2\Phi(\varphi) = 0\end{aligned}\right\}. \quad (9)$$

Отметим, что μ определяется из следующей краевой задачи;

$$\Phi''(\varphi) + \frac{\mu^2}{\lambda^2}\Phi(\varphi) = 0, \quad (10)$$

$$\Phi(\varphi) = 0, \ при \ \varphi = 0, \quad (11)$$

$$\frac{d\Phi(\varphi)}{d\varphi} = 0, \quad при \quad \varphi = \alpha \quad (12)$$

и имеет вид $\mu_k = \lambda\pi(2k+1)/(2\alpha)$.

Следовательно, решение краевой задачи (10)-(12) будет

$$\Phi_n = A_n\sin\nu_n\varphi, \quad (13)$$

где

$$\nu_n = \frac{\pi(2n+1)}{2}. \quad (14)$$

Затем функцию $R(r)$ представим так:

$$R(r) = e^{f(r)}U(r), \quad (15)$$

и если взять $f(r) = (sr - \ln r)/2$, то тогда для определения функции будем иметь уравнение Уиеттекера [6]:

$$U''(z) + U(z)\left\{-\frac{1}{4} + \frac{1/2}{z} + \frac{1/4 - \mu^2}{z^2}\right\} = 0\,, \tag{16}$$

где $z = rs$.

Если 2μ есть не целое число, то два интеграла уравнения (16) правильны вблизи 0 и годны для всех конечных значений z, представляются рядами

$$M_{1/2,\,\mu}(z) = z^{1/2+\mu}\, e^{-z/2}\left\{1 + \frac{\mu}{1!(2\mu+1)}\, z + \frac{\mu\,[1/2+\mu\,]}{2!(2\mu+1)(2\mu+2)}\, z^2 + \ldots\right\}, \tag{17}$$

$$M_{1/2,\,-\mu}(z) = z^{1/2-\mu} e^{-z/2}\left\{1 - \frac{\mu}{1!(1-2\mu)}\, z - \frac{\mu[1/2-\mu]}{2!(1-2\mu)(2-2\mu)}\, z^2 + \ldots\right\}. \tag{18}$$

Эти ряды – $M_{1/2,\,\mu_n}(rs)$ и $M_{1/2,\,-\mu_n}(rs)$ образуют фундаментальную систему решений. Следовательно,

$$U_n(rs) = C_{1n} M_{1/2,\,\mu_n}(rs) + C_{2n} M_{1/2,\,-\mu_n}(rs)\ - \tag{19}$$

решение уравнения (16).

Когда μ_n – положительное целое число, тогда решение представляется в виде

$$U_{1/2,\,\mu_n}(rs) = \frac{e^{-rs/2}(rs)^{1/2}}{\Gamma(\mu_n)} \int_0^\infty t^{-1/4+\mu_n}\left(1 + \frac{t}{rs}\right)^{\mu_n} e^{-t}\, dt\,, \tag{20}$$

где $\Gamma(\mu_n) = (\mu_n - 1)!$.

Таким образом, решение (8) можно представить так:

$$T(r,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r)\,\Phi_n(\varphi) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} r^{-1/2} e^{rs/2}\left\{C_{1n} M_{1/2,\,\mu_n}(rs) + C_{2n} M_{1/2,\,-\mu_n}(rs)\right\}\sin\nu_n\varphi\,. \tag{21}$$

Теперь перейдем к решению нашей задачи. Для этой цели введем новую функцию $\hat{T}(r,\varphi)$ следующим образом:

$$\hat{T}(r,\varphi) = T(r,\varphi) - T_0 + A_\varphi r e^{sr}\sin\gamma\varphi\,, \tag{22}$$

где

$$A_\varphi = \frac{q_\varphi^0}{\lambda_\varphi^0\gamma}\,, \qquad \gamma = \frac{2\pi}{\alpha}\,. \tag{23}$$

Легко видеть, что $\hat{T}(r,\varphi)$ будет удовлетворять следующей краевой задаче:

$$r^2\frac{\partial^2\hat{T}}{\partial r^2} + r(1 - sr)\frac{\partial\hat{T}}{\partial r} + \lambda^2\frac{\partial^2\hat{T}}{\partial\varphi^2} = A_\varphi f(r)\sin\gamma\varphi\,, \tag{24}$$

$$\hat{T}(r,\varphi) = 0, \quad \textit{при} \quad \varphi = 0\,, \tag{25}$$

$$\frac{\partial\hat{T}}{\partial\varphi} = 0, \quad при \quad \varphi = \alpha , \tag{26}$$

где $f(r) = re^{sr}(1 + 2sr - \lambda^2\gamma^2)$.

$\hat{T}(r, \varphi)$ представляя в виде

$$\hat{T}(r, \varphi) = \sum_{p=0}^{\infty} R_p(r) \sin\nu_p\varphi \tag{27}$$

для неизвестных функций $R_p(r)$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$, получим следующее неоднородное дифференциальное уравнение:

$$r^2\frac{d^2R_p}{dr^2} + r(1 - sr)\frac{dR_p}{dr} - \lambda^2\nu_p^2 R_p = a_p(r) , \tag{28}$$

где $a_p(r)$ – коэффициент ряда Фурье,

$$A_\gamma f(r) \sin\gamma\varphi = \sum_p a_p(r) \sin\nu_p \varphi \tag{29}$$

имеет вид

$$a_p(r) = \frac{16A_\gamma f(r)}{\pi} \frac{(-1)^p}{(2p - 3)(2p + 5)} . \tag{30}$$

Решение уравнения (28) представим в виде

$$R_n = R_n^0 + R_n^*, \tag{31}$$

где R_n^0 – решение соответствующего однородного уравнения и имеет вид

$$R_n^0 = C_{1n}r^{\mu_n} s^{1/2+\mu_n} V_n(rs) + C_{2n}r^{-\mu_n} s^{1/2-\mu_n} V_{-n}(rs) , \tag{32}$$

$$V_{\pm n}(rs) = 1 \pm \frac{\mu_n}{1!(\pm 2\mu_n + 1)}(rs) \pm \frac{\mu_n(1 + \mu_n)}{2!(\pm 2\mu_n + 1)(\pm 2\mu_n + 2)}(rs)^2 + \ldots$$

Частное решение уравнения (28) R_n^* определяется с помощью уже найденного решения однородного уравнения (32) методом вариации постоянных. Неизвестные постоянные можно определить для конкретных задач с граничными условиями на краях рассматриваемой области $(r = r_0$ и $r = r_1)$. Следовательно, таким методом можно решить задачи теплопроводимости для клиновидных тел при различных температурных граничных условиях.

Кафедра механики сплошной среды *Поступила 14.07.1992*

ЛИТЕРАТУРА

1. Шубников А.В, Флинт Е.Е., Бокин Г.Б. Основы кристаллографии. Изд-во АН СССР, 1940.
2. Уздалев А.И. Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. Изд-во Саратовского университета, 1967.
3. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. Термоупругость тел неоднородной структуры. М.: Наука, 1984.
4. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964.

5. Саркисян В.С., Галстян К.А. Один случай стационарного распределения температуры в ортотропном неоднородном клиновидном теле. - В сб.: Инженерно-физические проблемы новой техники. М.: Изд-во МГТУ, 1992.
6. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. т.II, М.: Госиздательство физико-математической литературы, 1963.

Վ.Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Կ.Ա. ԳԱԼՍՏՅԱՆ, Ն.Ա. ԿՈՒՏՈՒԶՅԱՆ

ՕՐԹՈՏՐՈՊ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՍԵՊԱՁԵՎ ՄԱՐՄՆՈՒՄ ՋԵՐՄԱՍՏԻՃԱՆԻ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ԲԱՇԽՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է ջերմաստիճանի ստացիոնար բաշխման օրենքը գլանային օրթոտրոպ անհամասեռությամբ օժտված սեպում, երբ անհամասեռությունը կախված է շառավղից էքսպոնենցիալ օրենքով: Եզրային խնդրի հիմնարար լուծումները արտահայտված են Ուիտտեկերի ֆունկցիաների օգնությամբ տարբեր ջերմառաձգական բնութագրերի դեպքում:

V.S. SARKISSIAN, K.A. GALSTIAN, N.A. KUTUZIAN

ON THE STATIONARY DISTRIBUTION OF TEMPERATURE IN THE INHOMOGENEOUS ORTHOTROPIC WEDGE SHAPED BODY

Summary

The law of stationary temperature distribution in orthotropic inhomogeneous wedge is considered, when the inhomogeneity is an exponential function of radius.

For various cases of thermoelastic characteristics the fundamental solutions are expressed by Witter's functions.