ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱ
НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ
NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF ARMENIA
ДОКЛАДЫ ԶԵԿՈՒՅՑՆԵՐ REPORTS

Հատոր Том Volume 115 2015 № 3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.51

К. А. Керян

Общая периодическая система Франклина как базис в пространстве $\mathbf{B}^1(\mathrm{T})$

(Представлено академиком Г. Г. Геворкяном 7/V 2015)

Ключевые слова: *общая периодическая система Франклина, базисность, безусловная базисность, пространство* $\mathbf{B}^1$.

Вначале дадим необходимые определения. Периодический отрезок $[0,1)$ обозначим через T. Интервалами в T будут как $[a,b]$, с условием $0 \le a \le b \le 1$, так и $[a,b]$, с условиями $a > b,\ a,b \in \mathrm{T}$. Во втором случае под $[a,b]$ понимаем множество $[a,1) \cup [0,b]$. Длину отрезка $I=[a,b]$ обозначим через $|I|$; при $a>b$ длину отрезка определим как сумму длин отрезков $[a,1), [0,b]$, т.е. $|I| = 1-a+b$. Точки 0 и 1 будем отожествлять.

Следуя работе [1], дадим

Определение 1. *Действительнозначную функцию* b, *определенную на* $\mathrm{T}=[0,1)$, *назовем специальным атомом, если или* $b \equiv 1$ *или* $b = \frac{1}{|I|}(\chi_L(t) - \chi_R(t))$, *где* I *– интервал в* T, L *– левая,* R *– правая половина интервала* I, *а* χ_E *– характеристическая функция множества* E.

Пространство $\mathbf{B}^1(\mathrm{T})$ определяется как

$$\mathbf{B}^1(\mathrm{T}) = \left\{ f : \mathrm{T} \to R;\ f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n b_n(t),\ \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty \right\},$$

где b_n – специальные атомы. Полагается $\| f \|_{B^1(\mathrm{T})} = \inf \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$, где нижняя грань берется по всевозможным представлениям функции f. Это пространство было введено Соузой в [1].

Напомним атомическое определение пространства $H^1(\mathrm{T})$, впервые приведенное в [2]. Сперва дадим определение атома: функция $a : \mathrm{T} \to R$

называется атомом, если или $a \equiv 1$ или существует интервал $I \subset \mathrm{T}$ такой, что $\operatorname{supp} a \subset I$, $\sup|\mathrm{a(t)}| \le |I|^{-1}$ и $\int\limits_{\mathrm{T}} a(t)\mathrm{d}t = 0$. Далее

$$H^1(\mathrm{T}) = \left\{ f : \mathrm{T} \to R;\ f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a_n(t), \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < \infty \right\},$$

где a_n – атомы и $\| f \|_{H^1(\mathrm{T})} = \inf \sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n|$, где нижняя грань берется по всевозможным представлениям функции f.

Ясно, что всякий специальный атом является также атомом. Поэтому $B^1(\mathrm{T}) \subset H^1(\mathrm{T})$. В работе [1] доказано, что $B^1(\mathrm{T}) \ne H^1(\mathrm{T})$.

В математической литературе рассматриваются также пространства $H^1[0,1]$ и $B^1[0,1]$. В этом случае функции определены на обычном отрезке $[0,1]$ и носители атомов и специальных атомов – обычные интервалы.

Определение 2. *Последовательность (разбиение)* $\mathcal{T} = \{t_n : n \ge 0\}$ *называется допустимой, если* $\mathcal{T}$ *всюду плотно в* $\mathrm{T} = [0,1)$, $t_0 = 0, t_i \in \mathrm{T}$ *и* $t_i \ne t_j$, *когда* $i \ne j$.

Для допустимой последовательности $\mathcal{T} = \{t_n : n \ge 0\}$ и $n \ge 1$ обозначим $\mathrm{T}_n = \{t_i : 0 \le i \le n\}$. Пусть π_n получается из T_n неубывающей перестановкой: $\pi_n = \{\tau_i^n : \tau_i^n < \tau_{i+1}^n, 0 \le i \le n-1\}$, $\pi_n = T_n$. Через S_n обозначается пространство непрерывных периодических на T ($f(0) = f(1-0)$) функций f и линейных на каждом отрезке $[\tau_i^n, \tau_{i+1}^n]$, $i = 0, 1, ..., n-1$. Очевидно, что $\dim S_n = n$ и $S_n \subset S_{n+1}$. Следовательно, для $n \ge 2$ существует (с точностью до знака) единственная функция $f \in S_n$, которая ортогональна S_{n-1} и $\| f \|_2 = 1$. Эта функция называется n-й периодической функцией Франклина, соответствующей разбиению $\mathcal{T}$.

Определение 3. *Общая периодическая система Франклина* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, *соответствующая разбиению* $\mathcal{T}$, *определяется по правилу* $f_1(x) \equiv 1$; *для* $n \ge 2$ *функция* $f_n(x)$ *является* n*-й периодической функцией Франклина, соответствующей разбиению* $\mathcal{T}$.

Оказывается, что базисность периодической системы Франклина в $\mathbf{B}^1(\mathrm{T})$ зависит от геометрических свойств последовательности $\mathcal{T}$.

Определение 4. *Допустимую последователность* $\mathcal{T}$ *назовем сильно регулярной по парам на* T *с параметром* γ, *если*

$$\gamma^{-1} \le \frac{\lambda_i^n + \lambda_{i+1}^n}{\lambda_{i+1}^n + \lambda_{i+2}^n} \le \gamma, \text{ когда } i = 1, 2, ..., n, \text{ а } n = 2, 3, ..., \qquad (1)$$

где λ_i^n *– длина отрезка* $\left[\tau_{i-1}^n, \tau_i^n\right]$*, т. е.* $\lambda_i^n = \tau_i^n - \tau_{i-1}^n$ *для* $i = 1, 2, \ldots, n$*. Будем считать, что* $\lambda_{i+n}^n = \lambda_i^n$ *для* $i = 1, 2, \ldots, n$*.*

Определение 5. *Допустимую последовательность* $\mathring{T}$ *назовем сильно регулярной на* T *с параметром* γ*, если*

$$\gamma^{-1} \le \frac{\lambda_i^n}{\lambda_{i+1}^n} \le \gamma, \text{ когда } i = 1, 2, \ldots, n, \text{ а } n = 2, 3, \ldots . \qquad (2)$$

Отметим, что определения 4, 5 соответствуют периодическому случаю. В непериодическом случае в условиях (1) и (2) индекс i пробегает значения $1, 2, \ldots, n-2$ и $1, 2, \ldots, n-1$, соответственно. Общая система Франклина (непериодическая) определяется аналогично определению 3.

Ясно, что если последовательность сильно регулярна (по парам) на T в периодическом случае, то она останется сильно регулярной (по парам) и в непериодическом случае. Обратное неверно, и для илюстрации этого приведем следующий пример.

Точки последовательности будем определять индуктивно. Пусть $t_0 = 0,$ и на первом шаге добавим среднюю точку $[0,1]$, т.е. $\frac{1}{2}$. На втором шаге добавим точки $\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8},$ которые делят $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ на четыре равные части, и среднюю точку $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, т.е. $\frac{3}{4}$. На n-м шаге добавим три точки в первый интервал так, чтобы они разделили его на четыре равные части, а потом последовательно, слева направо добавим средние точки отрезков, порожденных точками, добавленными до $n-$го шага. Продолжая так до бесконечности, получим последовательность, которая будет непериодически сильно регулярной с параметром 4 и не будет периодически сильно регулярной по парам на T ни при каком параметре.

В 1997 г. в работе [3] определена общая система Франклина, с которой и началось исследование этой системы. Г. Г. Геворкяном и А. Камонт в работе [4] доказана безусловная базисность общей системы Франклина в $L_p[0,1], 1 < p < \infty,$ для любой допустимой последовательности. Ими же в работе [5] получены необходимые и достаточные условия, чтобы соответствующая система Франклина на последовательности $\mathring{T}$ являлась базисом или безусловным базисом в пространстве $H^1[0,1]$. Из работы [6] Г. Г. Геворкяна следует, что общая система Франклина является базисом (безусловным базисом) в $H^1[0,1]$ тогда и только тогда, когда она является базисом (безусловным базисом) в $B^1[0,1]$.

В работе [7] доказано, что общая периодическая система Франклина является безусловным базисом в $L_p[0,1], 1 < p < \infty,$ при любой допустимой последовательности. В работе [8] получены периодические аналоги теорем о базисности и безусловной базисности общей системы Франклина в пространстве $H^1(\mathrm{T})$.

Нами доказаны следующие теоремы, которые являются периодическими аналогами теорем, доказанных Г.Г. Геворкяном в [6].

Теорема 1. *Пусть* $\mathcal{T}$ *– допустимая последовательность и* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *– соответствующая ей общая периодическая система Франклина. В этом случае система* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *будет базисом в пространстве* $\mathbf{B}^1(\mathrm{T})$ *тогда и только тогда, когда последовательность* $\mathcal{T}$ *является сильно регулярной по парам на* T *с некоторым параметром* γ.

Теорема 2. *Пусть* $\mathcal{T}$ *– допустимая последовательность и* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *– соответствующая ей общая периодическая система Франклина. В этом случае система* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *будет безусловным базисом в пространстве* $\mathbf{B}^1(\mathrm{T})$ *тогда и только тогда, когда последовательность* $\mathcal{T}$ *является сильно регулярной на* T *с некоторым параметром* γ.

При доказательстве этих теорем в основном следуем схеме доказательства соответствующих теорем в непериодическом случае, доказанных Г. Г. Геворкяном в [6]. Отметим также, что при доказательстве этих теорем мы пользуемся многими свойствами периодической системы Франклина, получеными в работе [2].

При доказательстве теорем 1 и 2 основную роль играют следующие леммы.

Лемма 1. *Допустим, что обобщенный интервал* $I=[a,b)\subset \mathrm{T}$ *представлен в виде объединения непересекающихся интервалов* $I_i = [a_i,a_{i+1})\subset \mathrm{T}$, *где* $a_1=a$, $a_d=b$, *т.е.* $I=\bigcup_{i=1}^{d} I_i$. *Тогда если функция* φ *на каждом интервале* I_i *линейная,* $\int_I \varphi(t)\mathrm{d}t=0$ *и* $\varphi(t)=0$, *когда* $t\notin I$, *то* $\|\varphi\|_{B^1(\mathrm{T})}\le (d-1)\|\varphi\|_\infty |I|$.

Лемма 2. *Пусть последовательность* $\mathcal{T}$ *сильно регулярная по парам на* T *с параметром* γ *и* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *– соответствующая ей общая периодическая система Франклина. Тогда существует постоянная* C_γ, *зависящая только от* γ, *такая, что для любого* n

$$\|f_n\|_{B^1(\mathrm{T})}\le C_\gamma \|f_n\|_1 .$$

Лемма 3. *Пусть последовательность* $\mathcal{T}$ *сильно регулярная по парам на* T *с параметром* γ *и* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *– соответствующая ей общая периодическая система Франклина. Тогда существует постоянная* C_γ, *зависящая только от* γ, *такая, что для любого специального атома* φ *и любого* n *выполняется*

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k(\varphi) f_k \right\|_{B^1(\mathrm{T})} \le C_\gamma .$$

Лемма 4. *Пусть последовательность* $\mathcal{T}$ *сильно регулярная на* T *с параметром* γ *и* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *– соответствующая ей общая периодическая система Франклина. Тогда существует постоянная* C_γ*, зависящая только от* γ*, такая, что для любого специального атома* φ *выполняется*

$$\sum_{n=1}^{\infty} | a_n(\varphi) | \cdot \| f_n \|_1 \le C_\gamma .$$

Необходимость сильной регулярности по парам на T с некоторым параметром γ в теореме 1 следует из очевидного неравенства $\| f \|_{B^1(\mathrm{T})} \ge \| f \|_{H^1(\mathrm{T})}$ и следующего факта, доказанного в [8]: существует специальный атом φ такой, что

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} a_k(\varphi) f_k \right\|_{H^1(\mathrm{T})} \ge C \ \ln\left(\max_{1 \le i \le n} \max\left(\frac{\lambda_i^n + \lambda_{i+1}^n}{\lambda_{i+1}^n + \lambda_{i+2}^n}, \frac{\lambda_{i+1}^n + \lambda_{i+2}^n}{\lambda_i^n + \lambda_{i+1}^n} \right) \right).$$

В работе [8] доказано, что если последовательность $\mathcal{T}$ является сильно регулярной по парам на T и не является сильно регулярной, то

$$\sup_{\varphi} \left\| \sup_{k \ge 1} \left| a_k(\varphi) f_k \right| \right\|_1 = \infty,$$

где супремум берется по специальным атомам. Применяя этот факт, получим, что из безусловной базисности системы $\{ f_n \}$ в $\mathbf{B}^1(\mathrm{T})$ следует сильная регулярность последовательности $\mathcal{T}$.

Из теоремы 2 можно получить следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть последовательность* $\mathcal{T}$ *сильно регулярная на* T *с параметром* γ *и* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *– соответствующая ей общая периодическая система Франклина. В этом случае ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n f_n$ *безусловно сходится в* $\mathbf{B}^1(\mathrm{T})$ *тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} | a_n | \cdot \| f_n \|_1 < \infty .$$

В непериодическом случае теорема 3 доказана Г. Г. Геворкяном (см. [6]), а в случае, когда $\mathcal{T}$ – диадическая последовательность, т. е. когда $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ – классическая система Франклина, теорема 3 доказана П. Войташчиком [9].

Отметим, что недавно в работе [10] Пассенбруннером была доказана безусловная базисность сплайн систем любого порядка в $L_p[0,1], 1 < p < \infty$.

А в работах [11], [12] теоремы о базисности и безусловной базисности общей системы Франклина, доказаные Г.Г. Геворкяном и А. Камонт в [5], были обобщены для сплайн систем любого порядка. С этой точки зрения становится интересным вопрос получения аналогов теорем 1, 2 для сплайн систем и периодических сплайн систем любого порядка.

Ереванский государственный университет

К. А. Керян

Общая периодическая система Франклина как базис в пространстве $\mathbf{B}^1(\mathrm{T})$

Для общей периодической системы Франклина $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, порожденной допустимой последовательностью $\mathcal{T}$, получены необходимые и достаточные условия на $\mathcal{T}$ для того, чтобы соответствующая система была базисом или безусловным базисом в $\mathbf{B}^1(\mathrm{T})$.

Կ. Ա. Քեռյան

Ֆրանկլինի ընդհանուր պարբերական համակարգի $\mathbf{B}^1(\mathrm{T})$ -ում բազիսության մասին

Ստացվել են պայմաններ Ֆրանկլինի ընդհանուր պարբերական համակարգը ծնող տրոհման վրա, որոնք անհրաժեշտ և բավարար են համապատասխան համակարգի $\mathbf{B}^1(\mathrm{T})$ -ում բազիսության կամ ոչ պայմանական բազիսության համար:

K. A. Keryan

General Periodic Franklin Systems as Bases in $\mathbf{B}^1(\mathrm{T})$

Necessary and sufficient conditions in terms of generating partition are mentioned for the corresponding system of general periodic Franklin system to be a basis or an unconditional basis in $\mathbf{B}^1(\mathrm{T})$.

Литература

1. *Souza De. G. S.* Spaces formed by special atoms, Ph. D. Dissertation. SUNY at Albany. N. Y. 1980.
2. *Coifman R. R.* - Studia Math. 1974. V. 51. P. 269-274.
3. *Ciesielski Z., Kamont A.* - Funct. Approx. Comment. Math. 1997. V. 25. P. 129-143.
4. *Gevorkyan G. G., Kamont A.* - Studia Math. 2004. V. 164. P. 161 -204.
5. *Gevorkyan G. G., Kamont A.* - Studia Math. 2005. V. 167. P 259 -292.
6. *Г .Г. Геворкян* - Изв. РАН. Сер. матем. 2014. Т. 78. N 6. С. 65-82.
7. *Keryan K. A.* - Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii. Mat. 2005. V. 40. N 1 P. 61-84 (in Russian). English translation in: J. Contemp. Math. Anal. 2005. V. 40. N 1. P. 56-79.

8. *Keryan K. A., Pogosyan M. P.* – Izv. Nats. Akad. Nauk Armenii. Mat. 2005. V. 40. N. 1. P. 61-84 (in Russian). English translation in: J. Contemp. Math. Anal. 2005. V. 40. N 1. P. 56-79.
9. *Wojtaszczyk P.* - Proc.Edinburgh Math. Soc. 1986. V. 29. P. 329-333.
10. Passenbrunner M. - Studia Math.. 2014. V222. N 1. P. 51-86.
11. *Gevorkyan G., Kamont A* - East J. Approx. 2008. V. 14. P. 161-182.
12. *Gevorkyan G., Kamont A., Keryan K., Passenbrunner M.* - Accepted for publication in Studia Math., preprint: arXiv:1404.5493, 2014.