ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1982 Естественные науки

Механика

УДК 539.3

М. В. БЕЛУБЕКЯН

О ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ БАЛКИ СО СЛЕДЯЩЕЙ НАГРУЗКОЙ

Приводится новое доказательство существования критической нагрузки для балки со следящей нагрузкой. Обсуждается вопрос выбора аппроксимирующих функций при решении задачи на основе вариационных принципов. Дается сравнение с известными результатами для критической нагрузки.

В работе Бека [1] на основе изучения дисперсионного уравнения задачи колебаний консольной балки со следящей нагрузкой на свободном конце определяется критическая нагрузка, при которой балка неустойчива. Метод определения критической нагрузки, основанный на модификации принципа Гамильтона, дается в [2]. В этих работах имеется доказательство существования критической нагрузки в случае консольной балки со следящей нагрузкой.

В настоящей статье приводится новое доказательство существования критической нагрузки для балки со следящей нагрузкой. Обсуждается также вопрос выбора аппроксимирующих функций при решении задачи на основе вариационных принципов.

I. Рассматривается задача устойчивости однородной балки, сжатой силой P. В общем случае задания граничных условий задача колебаний такой балки неконсервативна, поэтому статический подход для определения критической нагрузки неприменим. При динамическом подходе необходимо исследовать следующее уравнение изгибных колебаний балки [3, 4]:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\alpha}{\mu}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{P}{\mu}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0, \tag{1.1}$$

где α—жесткость балки, μ—масса, приходящая на единицу длины балки.

Пусть граничные условия на концах балки линейно-однородные относительно прогиба w и ее производных. В частности для балки, закрепленной на конце $x=0$ и свободной на конце $x=l$, где приложена следящая нагрузка P, граничные условия будут

$$w(0, t)=0, \quad \partial w(0, t)/\partial x=0, \tag{1.2}$$
$$\partial^2 w(l, t)/\partial x^2=0, \quad \partial^3 w(l, t)/\partial x^3=0.$$

Представим решение задачи в виде

$$w(x,\ t)=X(x)T(t). \tag{1.3}$$

После подстановки (1.3) в (1.1) и в соответствующие граничные условия решение вышеуказанной задачи приведется к решению задачи на собственные значения с уравнением

$$X^{IV}+\frac{P}{\alpha}X^{II}-\lambda X=0 \tag{1.4}$$

и с линейно-однородными граничными условиями относительно функции $X(x)$ и ее производных.

В случае (1.2) указанные граничные условия имеют вид

$$X(0)=0,\quad X^{I}(0)=0,\quad X^{II}(l)=0,\quad X^{III}(l)=0. \tag{1.5}$$

Полученная задача на собственные значения оказывается самосопряженной для граничных условий, соответствующих консервативным задачам, и не самосопряженной для неконсервативных задач, что и показывает пример (1.5). Несмотря на это, ниже будет показано, что собственные значения действительны и составляют счетное множество также и для граничных условий, соответствующих неконсервативным задачам.

Пусть $\{\lambda_n\}$—искомые действительные собственные значения, которые будут зависеть от параметра P/α. Согласно (1.1) и (1.3) для определения соответствующих функций $T_n(t)$ получается следующее уравнение:

$$T_n^{II}(t)+\frac{\alpha}{\mu}\lambda_n T_n(t)=0. \tag{1.6}$$

Из (1.6) и из предположения действительности λ_n следует, что если все $\lambda_n>0$, то $T_n(t)$ ограничены во времени и решение устойчиво. Если же существует хотя бы одно $\lambda_n\leqslant 0$, то решение неустойчиво и условие $\lambda_n=0$ определяет критическую нагрузку P_*.

2. Приведем доказательство действительности собственных значений $\{\lambda_n\}$.

Введем обозначения

$$X^{II}(x)+\gamma X(x)=\Phi(x),\quad \gamma=\frac{P}{2\alpha}+\sqrt{\left(\frac{P}{2\alpha}\right)^2+\lambda}. \tag{2.1}$$

Тогда уравнение (1.4) приведется к виду

$$\Phi^{II}+\beta\Phi=0 \tag{2.2}$$

с граничными условиями

$$\Phi(0)-h_0\Phi^{I}(0)=0,\quad \Phi(l)-h_l\Phi^{I}(l)=0, \tag{2.3}$$

где

$$\beta=\frac{P}{2\alpha}-\sqrt{\left(\frac{P}{2\alpha}\right)^2+\lambda}. \tag{2.4}$$

$$h_0=\frac{X^{II}(0)+\gamma X(0)}{X^{III}(0)+\gamma X^{I}(0)},\quad h_l=\frac{X^{II}(l)+\gamma X(l)}{X^{III}(l)+\gamma X^{I}(l)}.\tag{2.5}$$

Задача решения уравнения (2.2) с граничными условиями (2.3) есть задача на собственные значения. Легко показать, что данная задача самосопряженна при произвольных h_0 и h_l. Однако из самосопряженности еще не следует действительность собственных значений задачи, т. к. граничные условия (2.3) содержат величину γ, зависящую от собственных значений β.

Пусть β_n —комплексное собственное значение задачи и $\Phi_n(x)$— соответствующая собственная функция. Тогда сопряженные им $\bar{\beta}_n$ и $\overline{\Phi_n}(x)$ также являются собственным значением и соответствующей ему собственной функцией задачи. Используя обычный прием, применяемый для доказательства действительности собственных значений, получаем равенство

$$(\beta_n-\bar{\beta}_n)\left[I+\int_0^l|\Phi_n|^2dx\right]=0,\tag{2.6}$$

где

$$I=\frac{[X(l)X^{III}(l)-X^{I}(l)X^{II}(l)]\cdot|\Phi_n'(l)|^2}{[X^{III}(l)]^2+(\gamma_n+\bar{\gamma}_n)X^{I}(l)X^{III}(l)+\gamma_n\bar{\gamma}_n[X^{I}(l)]^2}-$$
$$-\frac{[X(0)X^{III}(0)-X^{I}(0)X^{II}(0)]\cdot|\Phi_n'(0)|^2}{[X^{III}(0)]^2+(\gamma_n+\bar{\gamma}_n)X^{I}(0)X^{III}(0)+\gamma_n\bar{\gamma}_n[X^{I}(0)]^2}.$$

Выражение в квадратных скобках из (2.6) действительно. Более того, для граничных условий (1.2), соответствующих балке с закрепленным концом $x=0$ и свободным концом $x=l$, на котором действует следящая нагрузка P, легко проверить, что $I\equiv0$. Можно показать также, что $I\equiv0$, если вместо условия закрепления края $x=0$ взять условие шарнирного опирания или условие скользящего контакта. Таким образом, для указанных неконсервативных задач получается, что собственные значения $\{\beta_n\}$ действительны. Однако среди собственных значений, кроме положительных, могут быть и отрицательные. Причем число отрицательных собственных значений конечно [5]. Для консервативных задач колебаний балки все собственные значения β_n положительны.

Предположим, что собственные значения $\{\beta_n\}$ известны. Тогда собственные значения исходной задачи $\{\lambda_n\}$ определяются следующим образом:

$$\lambda_n=\beta_n\left(\beta_n-\frac{P}{\alpha}\right),\tag{2.7}$$

и поэтому также действительны.

Если $\beta_n<0$, то $\lambda_n>0$, и соответствующее решение для $T_n(t)$ ограничено. Если же $\beta_n>0$, то при $P/\alpha<\beta_n$ соответствующее решение для $T_n(t)$ также будет ограничено, а при $P/\alpha \gg \beta_n$ —неограничено. Следовательно, критическая нагрузка определяется из выражения

$$P_* = \alpha \min_n \{\tilde{\beta}_n\},$$

где $\{\tilde{\beta}_n\}$ —множество положительных собственных значений из множества собственных значений $\{\beta_n\}$. Так как множество $\{\beta_n\}$ содержит счетное множество положительных собственных значений, то для балки, сжатой следящей нагрузкой, всегда существует критическая нагрузка, при которой балка теряет устойчивость.

3. Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с применением вариационных принципов для неконсервативных задач устойчивости балки.

Положительные собственные значения задачи (2.2), (2.3) должны удовлетворять следующему уравнению:

$$\operatorname{tg}\sqrt{\beta}\, l = \frac{\sqrt{\beta}(h_l - h_0)}{1 + h_l h_0 \beta}. \tag{3.1}$$

В частном случае, когда сжатая балка шарнирно оперта на обоих концах (консервативная задача), отрицательных собственных значений нет. Согласно (2.5) $h_0 = 0$, $h_l = 0$, и из (3.1) получается известное выражение для собственных значений.

В случае, когда конец $x = l$ шарнирно оперт, а на конце $x = 0$ осуществляется условие скользящего контакта ($h_0 = \infty$, $h_l = 0$), из (3.1) следует

$$\sqrt{\beta}\, l = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots),\quad P_* = \frac{\pi^2}{4}\,\frac{\alpha}{l^2}.$$

В общем же случае значения h_l и h_0 в выражении (3.1) неизвестны.

Обратимся к приближенным методам решения задач устойчивости, основанным на использовании в качестве собственных функций системы полиномов, удовлетворяющих граничным условиям.

Известно, что для консервативных задач полиномы наинизшей степени дают наилучшее приближение минимального собственного значения. Это условие не имеет места для неконсервативных задач, так как в этом случае среди собственных значений β_n могут быть и отрицательные.

Рассмотрим полиномы, удовлетворяющие граничным условиям (1.5) неконсервативной задачи устойчивости балки со следящей нагрузкой

$$X_n(x) = A_n\left[\left(\frac{x}{l}\right)^n - 2\frac{n-1}{n+1}\left(\frac{x}{l}\right)^{n+1} + \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}\left(\frac{x}{l}\right)^{n+2}\right],\quad n \geqslant 2. \tag{3.2}$$

Определяя значения h_0 и h_l согласно (2.5) и подставляя (3.2) в (3.1) и вычисляя соответствующие собственные значения, получим, что наилучшее приближение минимального положительного собственного значения дает полином $X_3(x)$. При этом получаются следующие приближенные значения для минимального собственного значения и для соответствующей критической нагрузки

$$\beta l^2 \approx 18{,}92, \quad P_* \approx 18{,}92 a/l^2. \tag{3.3}$$

Наихудшее приближение дает полином $X_2(x)$.

Точная величина критической нагрузки согласно [1] равна $20{,}05a/l^2$.

В работе [2] при использовании модифицированного вариационного принципа в качестве аппроксимирующей берется функция

$$X(x) = a_2 X_2(x) + a_3 X_3(x).$$

Для критической нагрузки получается значение $P_* \approx 18{,}847a/l$.

Институт механики АН Арм. ССР, ЕГУ

Поступила 29.04.1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Beck M.** Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes.— ZAMP, 1952, vol. 3, p. 225—228.
2. **Leipholz H. H. E.** On an Extension of Hamilton's Variational Principle to Nonconservative Systems which are Conservative in a Higher Sense.—Ing. Arch., 1978, vol. 47, p. 257—266.
3. **Феодосьев В. И.** Десять лекций—бесед по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1969.
4. **Циглер Г.** Основы теории устойчивости конструкций. М.: Мир, 1971.
5. **Курант Р., Гильберт Д.** Методы математической физики. М.-Л.: Госиздат, 1951, т. 1, гл. VI, § 2.

Մ. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

ՀԵՏԵՎՈՂ ԲԵՌՈՎ ՀԵԾԱՆԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Բերվում է հետևող բեռով հեծանի կրիտիկական բեռի գոյության նոր ապացույց։ Այն դեպքում, երբ կայունության խնդիրը լուծվում է վարիացիոն սկզբունքների հիման վրա, քննարկվում է մոտարկվող ֆունկցիաների ընտրության հարցը։ Կրիտիկական ուժի արժեքները համեմատվում են հայտնի արդյունքների հետ։