Известия НАН Армении, Математика, том 54, н. 4, 2019, стр. 70 – 75

ИНТЕРАССОЦИАТИВНОСТЬ С ПОМОЩЬЮ СВЕРХТОЖДЕСТВ

Ю. М. МОВСИСЯН, Г. КИРАКОСЯН

Ереванский государственный университет[1]
Бергенский университет, Норвегия
E-mails: *movsisyan@ysu.am; grigor.kirakosyan@ysumail.am*

Аннотация. Мы расширяем понятие интерассоциативности с помощью сверхтождеств ассоциативности и описываем множество полугрупп $\{i, j\}$-интерассоциативных к свободной и коммутативной свободной полугруппе, где $i, j = 1, 2, 3$.

MSC2010 number: 03C05, 03C85, 08A05, 08B20.

Ключевые слова: интерассоциативность; сверхтождество; полугруппа; свободная полугруппа.

1. Введение

Известно [1, 2], что если в q-алгебре или e-алгебре выполняется нетривиальное сверхтождество ассоциативности, то оно может быть одного из следующих видов:

$$X(Y(x,y),z) = Y(x, X(y,z)), \qquad (ass)_1$$

$$X(Y(x,y),z) = X(x, Y(y,z)), \qquad (ass)_2$$

$$X(X(x,y),z) = Y(x, Y(y,z)) \qquad (ass)_3,$$

(здесь X, Y – функциональные переменные, а x, y, z – предметные переменные).

Понятие интерассоциативности впервые ввел Зупник в работе [3]. В дальнейшем оно расширялось в работах [4 – 10]. В итоге получилось следующее определение для полугрупп.

Определение 1.1. *Полугруппа $Q(\circ)$ называется интерассоциативной к полугруппе $Q(\cdot)$, если выполняются следующие тождества:*

$$x \cdot (y \circ z) = (x \cdot y) \circ z, \qquad (1.1)$$

$$x \circ (y \cdot z) = (x \circ y) \cdot z. \qquad (1.2)$$

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Комитета по науке Республики Армения, гранты 10-3/1-41, 18T - 1A306.

Если еще выполняется тождество

$$x \circ (y \cdot z) = (x \cdot y) \circ z,$$

то полугруппа $Q(\circ)$ называется сильно интерассоциативной к полугруппе $Q(\cdot)$. Здесь выполняется также следующее тождество:

$$x \cdot (y \circ z) = (x \cdot y) \circ z = x \circ (y \cdot z) = (x \circ y) \cdot z.$$

Дадим более общее определение.

Определение 1.2. *Для заданных $i, j = 1, 2, 3$ полугруппу $Q(\circ)$ мы назовем $\{i, j\}$-интерассоциативной к полугруппе $Q(\cdot)$, если в алгебре $Q(\circ, \cdot)$ с двумя бинарными операциямн выполняются сверхтождества ассоциативности $(ass)_i$ и $(ass)_j$. Если $i = j$, то будем говорить просто о $\{i\}$-интерассоциативности. Множество всех полугрупп $\{i, j\}$-интерассоциативных к полугруппе $Q(\cdot)$ обозначим через $Int_{\{i,j\}}Q(\cdot)$; если $i = j$, то пишем просто: $Int_{\{i\}}Q(\cdot)$.*

В данном выше определении, поставив $i = j = 1$ и $i = 1$, $j = 2$, получим понятия интерассоциативности и сильной интерассоциативности, соответственно.

Пусть X произвольное непустое множество. Свободную полугруппу и свободную коммутативную полугруппу над алфавитом X обозначим, соответственно, через $\mathcal{F}(X)(\cdot)$ и $\mathcal{FC}(X)(\cdot)$. Свободную полугруппу с единицей обозначим через $\mathcal{F}^1(X)(\cdot)$. Для полугруппы $Q(\cdot)$ и ее фиксированного элемента $x \in Q$ можно определить бинарную операцию

$$a *_x b = a \cdot x \cdot b, \qquad \text{для любых } a, b \in Q.$$

В итоге получим полугруппу $Q(*_x)$, которая называется вариантом полугруппы $Q(\cdot)$ [1, 11].

Понятие варианта имеет тесную связь с понятием $\{i, j\}$-интерассоциативности.

В работах Горбаткова [12, 13] доказаны следующие утверждения.

Теорема 1.1. *Для $|X| \geqslant 4$ имеют место следующие равенства:*

$$Int_{\{1\}}\mathcal{FC}(X)(\cdot) = Int_{\{1,2\}}\mathcal{FC}(X)(\cdot) = \{\mathcal{FC}(X)(*_x) \,|\, x \in \mathcal{FC}(X)\} \cup \{\mathcal{FC}(X)(\cdot)\}.$$

Теорема 1.2. *Полугруппа $\mathcal{F}(X)(\circ)$ $\{1\}$-интерассоциативна к $\mathcal{F}(X)(\cdot)$ тогда и только тогда, когда*

$$u \circ w = u_\ell(u^{(1)} \circ w^{(0)})w_r, \qquad \textit{для всех } u, w \in \mathcal{F}(X),$$

где $u^{(1)}$ *– последняя буква слова* u, $w^{(0)}$ *– первая буква слова* w, *а* u_ℓ, w_r *– слова, получающиеся из слов* u, w *сокращением букв* $u^{(1)}$, $w^{(0)}$ *соответственно.*

В работе [14] рассмотрена $\{3\}$-интерассоциативность, где получен следующий результат.

Теорема 1.3. *Если* $Q(\circ) \in Int_{\{3\}}Q(\cdot)$ *и выполняется следующее квазитождество:*

$$x \cdot x = y \cdot y \Rightarrow x = y,$$

то полугруппы $Q(\circ)$ *и* $Q(\cdot)$ *совпадают.*

2. Основные результаты

В этом разделе для произвольного множества X мы получаем описание множеств $Int_{\{2\}}\mathcal{F}(X)(\cdot)$, $Int_{\{1,2\}}\mathcal{F}(X)(\cdot)$, $Int_{\{3\}}\mathcal{F}(X)(\cdot)$, $Int_{\{3\}}\mathcal{F}C(X)(\cdot)$ и описание $Int_{\{2\}}\mathcal{F}C(X)(\cdot)$, когда $|X| \geqslant 4$.

Сперва докажем следующие леммы:

Лемма 2.1. *Пусть* $Q(\circ) \in Int_{\{2\}}Q(\cdot)$. *Допустим, что для некоторого* $a \in Q$ *отображение* $\chi_a : Q \to Q$, $\chi_a(x) = ax$ *инъективно. Тогда* $Q(\circ) \in Int_{\{1\}}Q(\cdot)$.

Доказательство. Имеем следующие тождества

$$(x \circ y)z = x(y \circ z), \tag{2.1}$$

$$(xy) \circ z = x \circ (yz). \tag{2.2}$$

Тогда из цепочки равенств

$$x((yz) \circ t) \overset{(2.1)}{=} (x \circ (yz))t \overset{(2.2)}{=} ((xy) \circ z)t \overset{(2.1)}{=} xy(z \circ t) = x(y(z \circ t))$$

и из условий леммы, получаем

$$(yz) \circ t = y(z \circ t),$$

т.е. тождество (1.1), из которого вместе с тождествами (2.1), (2.2) вытекает тождество (1.2), а тождества (1.1), (1.2) вместе с полугрупповыми тождествами ассоциативности дают сверхтождество $(ass)_1$. □

Если в определении отображения χ_a каждый элемент умножить справа на a и требовать соответствующее условие, тогда доказательство соответствующей леммы можно провести аналогично.

Лемма 2.2. *Если* $Q(\circ) \in Int_{\{2\}}Q(\cdot)$, *то в алгебре* $Q(\circ, \cdot)$ *имеет место тождество*

$$(a \circ b)cd = ab(c \circ d).$$

Доказательство. Имеем

$$(a \circ b)cd \overset{(2.1)}{=} a(b \circ c)d \overset{(2.1)}{=} ab(c \circ d). \qquad \square$$

Теорема 2.1. *При* $|X| \geqslant 3$ *имеют место следующие равенства*

$$Int_{\{2\}}\mathcal{F}(X)(\cdot) = Int_{\{1,2\}}\mathcal{F}(X)(\cdot) = \{\mathcal{F}(X)(\cdot)\}.$$

Доказательство. Первое равенство следует из Леммы 2.1. Возьмем $a, b \in X$, $a \neq b$ и используем Лемму 2.2. Из тождества

$$(a \circ b)ab = ab(a \circ b) \tag{2.3}$$

следует:

$$a \circ b = ab\,\varphi(a,b), \qquad \varphi : X \times X \to \mathcal{F}^1(X),$$
$$a \circ b = \psi(a,b)\,ab, \qquad \psi : X \times X \to \mathcal{F}^1(X).$$

Подставляя последние равенства в (2.3), получаем

$$\varphi(a,b) = \psi(a,b), \qquad a \neq b,\ \forall a,b \in X.$$

Выберем еще $c, d \in X$, $c \neq d$ и по лемме 2.2 имеем

$$(a \circ b)cd = ab(c \circ d),$$
$$ab\,\varphi(a,b)\,cd = ab\,\varphi(c,d)\,cd \Rightarrow \varphi(a,b) = \varphi(c,d),$$

и φ постоянное отображение, если ее аргументы не совпадают. Пусть

$$\varphi(a,b) = x \in \mathcal{F}^1(X) \qquad a,b \in X,\ a \neq b,$$
$$a \circ b = abx = xab.$$

Пусть $a, b, c \in X$, $a \neq b$, $b \neq c$. Используя (2.1), получаем

$$(a \circ b)c = a(b \circ c) \Rightarrow abxc = abcx \Rightarrow xc = cx.$$

Индукцией по длине слова x, легко выводим $x = c^n$, $n \in \mathbb{N}$. Если $c = a$, тогда $x = a^m$, $m \in \mathbb{N}$, а если $c = d$, где $d \neq a$ и $d \neq b$, то получим $x = d^k$, $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $x = \emptyset$. Далее $x = \emptyset \Rightarrow a \circ b = ab$, где $a \neq b$.

Если $a \neq c$, то из (2.1) имеем:

$$(a \circ a)c = a(a \circ c) = aac \Rightarrow a \circ a = aa$$

и операции $\circ$ и $\cdot$ совпадают на множестве $X \times X$, но по теореме 1.2 они совпадают и на множестве $\mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X)$. $\square$

Нетрудно заметить, что $\mathcal{FC}(X)(\cdot)$ также удовлетворяет условию Леммы 2.1 и с учетом теоремы 1.1 заключаем что справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.2. *При* $|X| \geqslant 4$ *имеют место следующие равенства:*

$$Int_{\{2\}}\mathcal{FC}(X)(\cdot) = \{\mathcal{FC}(X)(*_x) \,|\, x \in \mathcal{FC}(X)\} \cup \{\mathcal{FC}(X)(\cdot)\}.$$

В работе Горбаткова [13] описано множество $Int_{\{1\}}\mathcal{F}(X)$ в случае, когда $|X| = 2$. Используя этот метод, прямой проверкой убеждаемся, что теорема 2.1 верна и в случае, когда $|X| = 2$.

Теорема 2.3. *При* $|X| = 2$ *имеют место следующие равенства:*

$$Int_{\{2\}}\mathcal{F}(X)(\cdot) = Int_{\{1,2\}}\mathcal{F}(X)(\cdot) = \{\mathcal{F}(X)(\cdot)\}.$$

Теорема 2.4. *Пусть* $|X| = 1$ *и* $X = \{a\}$. *Тогда имеем* $Int_{\{1\}}\mathcal{F}(X)(\cdot) = Int_{\{2\}}\mathcal{F}(X)(\cdot) = Int_{\{1,2\}}\mathcal{F}(X)(\cdot) = \{\mathcal{F}(X)(*_x) \,|\, x \in \mathcal{FC}(X)\} \cup \{\mathcal{F}(X)(\cdot)\} \cup \{\mathcal{F}(X)(\Delta)\}$, *где* $a^m \Delta a^n = a^{m+n-1}$, $m, n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Первое и второе равенства вытекают из Леммы 2.1 и из коммутативности операции. Предположим, что $\mathcal{F}(X)(\circ) \in Int_{\{1\}}\mathcal{F}(X)(\cdot)$. При $m, n > 1$ имеем $a^m \circ a^n = (a^{m-1}a) \circ a^n \overset{(1.1)}{=} a^{m-1}(a \circ a^n) = a^{m-1}(a \circ (aa^{n-1})) \overset{(1.2)}{=} a^{m-1}(a \circ a)a^{n-1}$. Если $m = 1$ или $n = 1$, то это равенство очевидно. Рассмотрим следующие случаи:

(i) $a \circ a = a \Rightarrow a^m \circ a^n = a^{m+n-1} = a^m \Delta a^n$, т.е. получаем полугруппу $\mathcal{F}(X)(\Delta)$.
(ii) $a \circ a = aa$. В этом случае операции $\circ$ и $\cdot$ совпадают.
(iii) $a \circ a = a^k$, $k > 2$, тогда $a^m \circ a^n = a^m a^{k-2} a^n$.

Обозначим $a^{k-2} = x$ и заключаем, что полугруппы $\mathcal{F}(X)(\circ)$ и $\mathcal{F}(X)(*_x)$ совпадают. $\square$

В заключении заметим, что полугруппы $\mathcal{F}(X)(\cdot)$ и $\mathcal{FC}(X)(\cdot)$ удовлетворяют требованию теоремы 1.3 и, следовательно, верны следующие равенства:

$Int_{\{3\}}\mathcal{F}(X)(\cdot) = \{\mathcal{F}(X)(\cdot)\}$, $Int_{\{3\}}\mathcal{FC}(X)(\cdot) = \{\mathcal{FC}(X)(\cdot)\}$.

Abstract. In this paper the concept of interassociativity via hyperidentities of associativity is extended and characterized the semigroups which are $\{i, j\}$-interassociative to free semigroups and free commutative semigroups, where $i, j = 1, 2, 3$.

Список литературы

[1] Yu. M. Movsisyan, Introduction to the Theory of Algebras With Hyperidentities, Yerevan State University Press, Yerevan (1986).

[2] Yu. M. Movsisyan, Hyperidentities and Hypervarieties in Algebras, Yerevan State University Press, Yerevan (1990).

[3] D. Zupnik, "On interassociativity and related questions", Aequationes mathematicae, **6**, 141 – 148 (1971).

[4] M. Drouzy, La structuration des ensembles de semigroupes d'ordre 2, 3 et 4 par la relation d'interassociative, Manuscript (1986).

[5] S. J. Boyd, M. Gould, "Interassociativity and isomorphism", Pure Math. Appl. **10**, no. 1, 23 – 30 (1999).

[6] S. J. Boyd, M. Gould, A. W. Nelson, "Interassociativity of semigroups", Proceedings of the Tennessee Topology Conference, Nashville, TN, USA (1996). Singapore: World Scientific, 33 – 51 (1997).

[7] B. N. Givens, K. Linton, A. Rosin, L. Dishman, "Interassociates of the free commutative semigroup on n generators", Semigroup Forum **74**, 370 – 378 (2007).

[8] B. N. Givens, A. Rosin, K. Linton, "Interassociates of the bicyclic semigroup", Semigroup Forum **94**, 104 – 122 (2017).

[9] M. Gould, K. A. Linton, A. W. Nelson, "Interassociates of monogenic semigroups", Semigroup Forum **68**, 186 – 201 (2004).

[10] M. Gould, R. E. Richardson, "Translational hulls of polynomially related semigroups", Czechoslovak Mathematical Journal, **33**, no. 1, 95 – 100 (1983).

[11] J. B. Hickey, "On variants of a semigroup", Bulletin of the Australian Mathematical Society, **34**: (03), 447 – 459 (1986).

[12] A. B. Gorbatkov, "Interassociativity on a free commutative semigroup", Siberian Mathematical Journal, **54**: 3, 441 – 445 (2013).

[13] A. B. Gorbatkov, "Interassociates of a free semigroup on two generators", Matematychni Studii, **41**: 2, 139 – 145 (2014).

[14] E. Hewitt, H. S. Zuckerman, "Ternary operations and semigroups", In Semigroups: Proceedings Symposium Wayne State Univ., ed. K. W. Folley, Academic Press, New York, 55 – 83 (1969).

Поступила 30 сентября 2018

После доработки 22 апреля 2019

Принята к публикации 25 апреля 2019