ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ **1, 1976** **Естественные науки**

Физика

К. В. ПАПОЯН, Д. М. СЕДРАКЯН

ОБ УРАВНЕНИЯХ ТЕРМОУПРУГОСТИ ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Рассмотрено обобщение уравнений теплоупругости для диэлектрической среды, когда параметры, определяющие свойства теплоупругости, имеют пространственно-временную дисперсию. Учтено наличие «второго звука» в термоупругой диэлектрической среде. В линейном приближении получены дисперсионные уравнения термоупругости и рассмотрены некоторые частные решения.

1. Введение. Теория термоупругости, изучающая явления, связанные с взаимодействием поля деформаций и поля температуры в среде, базируется на следующей системе уравнений [1]:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - C_{ijlm}\frac{\partial u_{lm}}{\partial x_j} + \beta_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j} = 0,$$
$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} + C_v T_0 \beta_{ij}\frac{\partial u_{ij}}{\partial t} - \chi_{ij}\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \tag{1}$$

где u_{ij}—тензор деформации, C_{ijlm}—тензор коэффициентов упругости, β_{ij}—тензор термоупругости, C_v—удельная теплоемкость при постоянном объеме, χ_{ij}—тензор теплопроводности, ρ и T_0—равновесные значения плотности и температуры соответственно.

Первое уравнение системы (1) есть уравнение движения среды, а второе — представляет собой уравнение теплопроводности, оба они связаны между собой благодаря тепловому расширению.

В рамках такой постановки задачи поток тепла Q_i и тензор напряжений σ_{ij} определяются выражениями

$$Q_i = -\chi_{ij}\frac{\partial T}{\partial x_j}, \tag{2}$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijlm} u_{lm} + \beta_{ij}(T - T_0). \tag{3}$$

Применение вышеуказанной системы уравнений для диэлектрического твердого тела справедливо, если пренебречь диссипативными процессами, связанными с нормальными столкновениями фононов. Это приближение имеет место при достаточно высоких температурах, когда число нормальных столкновений мало по сравнению с числом процессов переброса, что на языке времен релаксаций N и U процессов соответствует требованию $\tau_n \gg \tau_u$.

При достаточно низких температурах возможно обратное неравенство, т. е. $\tau_n \ll \tau_u$. В этом случае, хотя и соотношение (3) остается в силе, выражение (2), следовательно, и уравнение, описывающее распространение тепла, нуждаются в обобщении в связи с необходимостью учета инерции потока тепла. Как известно, такое уравнение описывает также распространение второго звука в среде [2, 3].

Ясно, что при промежуточных температурах соотношение между τ_n и τ_u может быть произвольным. Если при этом деформация и градиент температуры достаточно резко меняются в пространстве и во времени, то входящие в (1) тензорные коэффициенты могут существенно зависеть как от координат, так и от времени [2, 4].

Очевидно, что при таких условиях гидродинамическое приближение, использованное при выводе уравнений системы (1), неприменимо, и все расчеты должны быть выполнены на основе кинетического уравнения [3, 5].

Ниже выведены уравнения термоупругости с учетом вышесказанного и получено дисперсионное уравнение термоупругих волн в случае неограниченной изотропной среды.

2. Рассмотрим диэлектрическое твердое тело, в котором фононный газ описывается неравновесной функцией распределения $N(x_l, p_l, t)$ ($l=1, 2, 3$).

Обозначим через $\varepsilon(x_l, p_l, t)$ энергию фонона с квазиимпульсом p_l, $N_0(p)$—равновесную функцию Планка и введем величину

$$\theta(x_l, t)=E(x_l, t)-E_0=\int \varepsilon(x_l, p_l, t)\,[N(x_l, p_l, t)-N_0(p)]\,d^3p=$$
$$=\int \varepsilon(x_l, p_l, t) f(x_l p_l, t) d^3p, \tag{4}$$
$$d^3p=\frac{dp_x dp_y dp_z}{(2\pi\hbar)^3},$$

которая показывает, насколько энергия данного состояния отличается от энергии термодинамически равновесного состояния.

Выберем в качестве параметров, характеризующих состояние системы, деформацию u_{ij} и величину Θ, определенную равенством (4). Для этих параметров термодинамической функцией является энтропия $S(u_{ij}, E)$, разложение которой при малых u_{ij} и Θ даст

$$S(u_{ij}, E)=S(0,E_0)+\left(\frac{\partial S}{\partial u_{ij}}\right)_E u_{ij}+\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{u_{ij}}\Theta+\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 S}{\partial u_{ij}\partial u_{lm}}\,u_{ij}u_{lm}+$$
$$+\frac{\partial^2 S}{\partial u_{ij}\partial E}\,u_{ij}\Theta+\ldots \tag{5}$$

В состоянии полного равновесия, т. е. при $u_{ij}=0$, $\Theta=0$ энтропия максимальна, потому должны выполняться следующие условия:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial u_{ij}}\right)_E=0;\ \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{u_{ij}}=0;\ \frac{\partial^2 S}{\partial u_{ij}\partial u_{lm}}<0;\ \frac{\partial^2 S}{\partial u_{ij}E}<0.$$

Вводя обозначения $\lambda_{ijlm}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 S}{\partial u_{ij}\partial u_{lm}}$; $\beta_{ij}=\frac{\partial^2 S}{\partial u_{ij}\partial E}$ и выбирая в качестве начала отсчета энтропии $S(0, E_0)$, выражение (5) можем переписать в виде

$$S(u_{ij}, E)=\lambda_{ijlm}u_{ij}u_{lm}+\beta_{ij}u_{ij}\Theta. \tag{6}$$

Воспользовавшись термодинамическим тождеством

$$dS=\frac{dE}{T_0}-\frac{du_{ij}}{T_0}\sigma_{ij},$$

из выражения (6) получаем

$$\sigma_{ij}=-T_0\left(\frac{\partial S}{\partial u_{ij}}\right)_\Theta=-T_0\lambda_{ijlm}u_{lm}-T_0\beta_{ij}\Theta. \tag{7}$$

Сравнивая формулу (7) с обычным выражением σ_{ij} (1), получаем, что $\lambda_{ijlm}=-\frac{1}{T_0}C_{ijlm}$.

Далее из формулы (7) иеем

$$\beta_{ij}=-\frac{1}{T_0}\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial E}\right)_{u_{ij}}=-\frac{1}{T_0C_v}\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial T}\right)_{u_{ij}}=-\frac{\Lambda_{ij}}{T_0},$$

где Λ_{ij} — тензор коэффициентов Грюнайзена [6].

С учетом этих соотношений выражение (7) примет следующий вид:

$$\sigma_{ij}=C_{ijlm}u_{lm}+\beta_{ij}\Theta,$$

что заменяет выражение (3).

Полученный тензор напряжений позволяет написать следующее уравнение движения:

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}=C_{ijlm}\frac{\partial u_{lm}}{\partial x_j}+\lambda_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\int\varepsilon f d^3p. \tag{8}$$

Входящая в уравнение (8) функция в случае термоупругих сред зависит от тензора деформаций u_{ij} и температуры. Поэтому к (8) нужно присоединить еще уравнение, определяющее температуру. Для его получения запишем закон сохранения энергии в следующем виде:

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial Q_i}{\partial x_i}=0,$$

где
$$Q_i=\int\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial p_i}fd^3p$$

есть вектор потока тепла и является обобщением соотношения (3).

Записывая $\frac{\partial E}{\partial t}$ в виде $\frac{\partial E}{\partial t}=C_v\frac{\partial T}{\partial t}+\left(\frac{\partial E}{\partial u_{ij}}\right)_T\frac{\partial u_{ij}}{\partial t}$ и исключая $\left(\frac{\partial E}{\partial u_{ij}}\right)_T$

с помощью тождества [6]

$$\left(\frac{\partial E}{\partial u_{ij}}\right)_T = T_0\left[\left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial T}\right)_{u_{ij}} - \frac{\sigma_{ij}}{T_0}\right],$$

окончательно получим

$$C_v \frac{\partial T}{\partial t} + T_0 C_v \Lambda_{ij} \frac{\partial u_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\int \varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial p_j} f d^3p = 0. \tag{9}$$

Это уравнение вместе с (8) составляет систему уравнений термоупругости, в которые, однако, входит подлежащая определению функция $f(x_i, p_i, t)$. Ее нужно найти из кинетического уравнения.

3. Кинетическое уравнение с интегралом столкновений в приближении времени релаксации имеет следующий вид:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial N}{\partial x_i}\frac{\partial \varepsilon}{\partial p_i} - \frac{\partial N}{\partial p_i}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i} = -\frac{N - N_\lambda}{\tau_n} - \frac{N - N_0(T)}{\tau_u}, \tag{10}$$

где N_λ —функция распределения фононного газа со скоростью дрейфа $\vec{\lambda}$, а $N_0(T)$ — локально равновесная функция Планка при температуре $T(x_i, t)$.

Величина ε представляет энергию фонона в деформированном кристалле и согласно [7] есть

$$\varepsilon(x_i, p_i, t) = \varepsilon^0(p)[1 + \Lambda_{ij} u_{ij}(x_l, t)], \tag{11}$$

где $\varepsilon^0(p) = c_1 p$, c_1—скорость продольного звука.

С целью линеаризации интеграла столкновений, разлагая N_λ и $N_0(T)$ по степеням λ и T и пользуясь формулой (11), кинетическое уравнение приведем к виду

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{f}{\tau} = \frac{N_0'}{\tau} T(x_i, t) + \frac{N_0'}{\tau_n}\frac{p_i \xi_i}{\varepsilon_0(p)} - \frac{N_0' T_0}{\tau}\Lambda_{ij}\left[u_{ij} + \tau v_l \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_l}\right], \tag{12}$$

где $\tau^{-1} = \tau_n^{-1} + \tau_u^{-1}$; $N_0' = \frac{\partial N_0}{\partial T}$; $\zeta_j = T_0 \lambda_j$.

Функция $\zeta_i(x_i, t)$ определяется из условия сохранения суммарного квазиимпульса при нормальных столкновениях.

$$\int \frac{1}{\tau_n}(N - N_\lambda) p_i d^3p = 0. \tag{13}$$

С помощью (12) уравнение (9) можно привести к виду более удобному для дальнейших приложений:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \Lambda_{ij} T_0 \frac{\partial^2 u_{ij}}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau_u}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\Lambda_{ij}}{\tau_u} T_0 \frac{\partial u_{ij}}{\partial t} - \frac{1}{c_v}\frac{\partial}{\partial x_j}\int \varepsilon v_j \left[\left(v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) + \right.$$

$$\left. + 2T_0 N_0 \Lambda_{ij} v_l \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_l}\right] d^3p = 0. \tag{14}$$

Уравнения (8), (12), (14) вместе с условием (13) составляют замкнутую систему уравнений термоупругости.

4. В случае изотропной среды уравнения (8) и (14) примут вид ($\Lambda_{ij}=\Lambda\delta_{ij}$):

$$\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2}-c_1^2\nabla^2\vec{u}=\frac{\Lambda}{\rho}\vec{\nabla}\int\varepsilon^0(p)f(\vec{r},\ \vec{p},\ t)d^3p,$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\Lambda T_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\vec{\nabla}\ \vec{u})+\frac{1}{\tau_u}\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\Lambda T_0}{\tau_u}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\ \vec{u})=$$

$$=\frac{1}{C_v}\vec{\nabla}\int\varepsilon\vec{v}[\vec{v}\nabla f)+2T_0\vec{v}\ \vec{r}(\vec{\nabla}\ \vec{u})]d^3p, \tag{15}$$

где в подинтегральных выражениях в линейном приближении положено $\varepsilon^0(p)=\varepsilon$.

Предполагая, что f, T, u есть функции вида $\exp[i(\vec{k}\ \vec{r}-\omega t)]$, из(13) имеем $\zeta(\omega,\ \vec{k})=3\frac{\omega}{k}\ T(\omega,\ \vec{k})-3i\omega\Lambda T_0 u(\omega,\ \vec{k})$.

Подставляя $\zeta(\omega,\ \vec{k})$ в кинетическое уравнение для $f(\omega,\ \vec{k},\ \vec{p})$, получим

$$f(\omega,\ \vec{u},\ \vec{p})=N_0'\left|1+3\ \frac{\omega}{k}\frac{p\cos\Theta}{\varepsilon^0(p)}\frac{\tau}{\tau_n}\right|[1-i\tau(\omega-kv\cos\Theta)]^{-1}T(\omega,\ \vec{k})+$$

$$+i\Lambda T_0N_0'\left|-k(1+ikv\tau\cos\Theta)+3i\omega\ \frac{p\cos\Theta}{\varepsilon^0(p)}\frac{\tau}{\tau_n}\right|\times$$

$$\times[1-i\tau(\omega-kv\cos\Theta)]^{-1}u(\omega,\vec{k}). \tag{16}$$

При постановке выбранного вида решений для u, f и T в уравнения (15) и использовании выражения (16) для $f(\omega,\ \vec{u},\ \vec{p})$ получается однородная система, условие разрешимости которой приводит к следующему дисперсионному уравнению:

$$\left(\omega^2-k^2c_1^2+k^2\frac{\Lambda E_0}{\rho}B_0\right)\left(\omega^2+\frac{i\omega}{\tau_u}-k^2c_1^2A_2\right)-$$

$$-k^2\frac{E_0A_0}{\rho}\left[\left(\omega^2+\frac{i\omega}{\tau_u}\right)\Lambda+k^2c_1^2B_2+\frac{2}{3}\Lambda k^2c_1^2\right], \tag{17}$$

где введены следующие обозначения:

$$A_n=\frac{1}{2i\Gamma S}\left[\Phi_n(\xi)+3\ \frac{\tau}{\tau_nS}\ \Phi_{n+1}(\xi)\right],$$

$$B_n=\frac{\Lambda}{2i\Gamma S}\left[\Phi_n(\xi)+i\Gamma S\Phi_{n+1}(\xi)-3\frac{\tau}{\tau_nS}\ \Phi_{n+1}(\xi)\right],$$

$$\xi=\frac{i\Gamma-1}{i\Gamma S},\quad S=\frac{kv}{\omega},\quad \Gamma=\omega\tau,\quad \Phi_n(\xi)=\int_{-1}^{+1}\frac{\mu^n d\mu}{\mu-\xi}.$$

В случае распространения незатухающего второго звука, т. е. когда $\tau_n \to 0$, $\tau_u \to \infty$, из (17) получаем дисперсионное уравнение, приведенное в [3].

Если же пренебречь тепловым расширением, то из (17) получаем известные выражения для скорости и коэффициента затухания второго звука.

Из уравнения (17) можно получить также коэффициент поглощения обычного звука для вязкой и термоупругой среды. В частности, легко получается формула Ахиезера [7—10].

В заключении отметим, что выражение (16) позволяет вычислить тензоры β_{ij}, χ_{ij}, C_{ijlm} с учетом пространственно-временной дисперсии.

Приведем их выражения для изотропной среды:

$$\beta(\omega, \vec{k}) = \Lambda c_v A_0(\xi),$$
$$\chi(\omega, \vec{k}) = \frac{l v c_v}{k} A_1(\xi), \qquad (18)$$
$$c_l^2(\omega, \vec{k}) = c_l^2 + \frac{\Lambda E_0}{\rho} B_0(\xi),$$

где справа c_l есть скорость продольного звука без учета дисперсии.

Кироваканский педагогический институт,
Ереванский государственный университет

Поступила 17.06.1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.,** Теория упругости, М., 1965.
2. **Гуревич В. Л., Эфрос А. Л.,** ЖЭТФ, 51, 1693, 1966.
3. **Gayer R., Krumhansl J.,** Phys. Rev., 148, 766, 1966.
4. **Зырянов П. С., Талуц Г. Г.,** ЖЭТФ, 54, 855, 1968.
5. **Гуржи Р. Н.,** УФН, 94, вып. 4, 1968.
6. **Ноздрев В. Ф., Федорищенко Н. В.,** Молекулярная акустика, М., 1974.
7. **Ахиезер А. И.,** ЖЭТФ, 8, 1318, 1938.
8. **Ehrenreich H., Woodroff T.,** Phys. Rev., 123, 1533, 1961.
9. **Логачев Ю. А., Мойжес Б. Я.,** ФТТ, 15, 2888, 1973.
10. **Gayer R.,** Phys. Rev., 148, 789, 1966.

Կ. Վ. ՊԱՊՈՅԱՆ, Դ. Մ. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ

ՑԱԾՐ ՋԵՐՄԱՍՏԻՃԱՆՆԵՐՈՒՄ ՋԵՐՄԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկված է ջերմառաձգականության հավասարումների ընդհանրացում ցածր ջերմաստիճանների դեպքում մեկուսիչ միջավայրի համար, երբ միջավայրի ջերմառաձգական հատկությունները բնորոշող պարամետրերը ունեն տարածա-ժամանակային դիսպերսիա։ Հաշվի է առնված, որ մեկուսիչ միջավայրում կարող է տարածվել «երկրորդ ձայն»։ Ստացված է ջերմառաձգական ալիքների դիսպերսիոն հավասարումը գծային մոտավորությամբ և դիտարկված են տարբեր դեպքեր։