ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1,1991 **Естественные науки**

Механика

УДК 539.3:62-50

Л.С.СААКЯН

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ КОЛЕБАНИЯМИ УПРУГОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ

Рассматривается задача об оптимальном управлении колебаниями однородной ортотропной прямоугольной пластинки со свободно опертыми сторонами при помощи внешних сил, нормально распределенных по всей ее поверхности. Задача решается методом Фурье и сводится к проблеме моментов в пространстве $L_2(0,T)$.

Определяется вид управляющей функции при условии минимума "энергии" управляющего воздействия.

1. Прямоугольная однородная ортотропная пластинка, у которой главные направления упругости параллельны направлениям сторон, оперта (шарнирно закреплена) по всем четырем сторонам и колеблется нормальной нагрузкой $f(t,x,y)$, распределенной по всей ее поверхности. Направим оси x и y вдоль сторон и обозначим через a,b длины сторон пластинки. Тогда, рассматривая малые поперечные колебания, уравнение движения пластинки можно записать в виде [1]:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{g}{hj}\left[D_1\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2D_3\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\partial y^2} + D_2\frac{\partial^4 W}{\partial y^4}\right] = \frac{g}{hj}f(t,x,y), \qquad (1.1)$$

где $W(t,x,y)$ — поперечное отклонение точки (x,y) пластинки в момент t, h — толщина пластинки, j — удельный вес материала, D_1,D_2 — жесткости изгиба, $D_0=Gh^3/12$ — жесткость кручения для главных направлений:

$$D_1 = \frac{E_1h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)},\quad D_2 = \frac{E_2h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)},\quad D_3 = \nu_2D_1+2D_0.$$

Здесь E_1,E_2,ν_1,ν_2,G — модули Юнга, коэффициенты Пуассона и модуль сдвига для главных направлений. Прогиб W должен удовлетворять следующим граничным условиям:

$$W(t,0,y) = W(t,a,y) = 0,\quad M_x = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu_2\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)\Bigg|_{\substack{x=0\\x=a}} = 0,$$

$$W(t,x,0) = W(t,x,b) = 0,\quad M_y = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu_1\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)\Bigg|_{\substack{y=0\\y=b}} = 0, \qquad (1.2)$$

Пусть усилия $f(t,x,y)$ сообщают частицам, расположенным на срединной поверхности в момент $t=0$ следующие прогибы и скорости, направленные перпендикулярно к недеформированной срединной поверхности пластинки:

$$W(0,x,y) = \varphi(x,y), \quad \left.\frac{\partial W(t,x,y)}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x,y). \tag{1.3}$$

Задача 1.1. Требуется определить внешнюю нагрузку $f(t,x,y)$ так, чтобы при некотором конечном $t=T>0$ пластинку из заданного начального состояния (1.3) перевести в состояние

$$W(T,x,y) = 0, \quad \left.\frac{\partial W(t,x,y)}{\partial t}\right|_{t=T} = 0 \tag{1.4}$$

с соблюдением граничных условий (1.2) и минимизированием при этом функционала

$$\int_0^T\int_0^a\int_0^b [f(t,x,y)]^2 dxdydt, \tag{1.5}$$

имеющего смысл "энергии" управляющего воздействия $f(t,x,y)$. Вводя новую независимую переменную τ по формуле $\tau=(g/hj)^{1/2}t$ и сохраняя за новой переменной старое обозначение, уравнение (1.1) можно привести к виду

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \Delta\Delta W = f(t,x,y), \tag{1.6}$$

где $\Delta\Delta = D_1\frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2D_3\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + D_2\frac{\partial^4}{\partial y^4}$.

Система собственных чисел и собственных функций следующей краевой задачи

$$\begin{gathered}\Delta\Delta Q(x,y) = \lambda^2 Q(x,y),\\ Q(0,y) = Q(a,y) = 0, \quad \left.\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \nu_2\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\right)\right|_{\substack{x=0\\x=a}} = 0,\\ Q(x,0) = Q(x,b) = 0, \quad \left.\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2} + \nu_1\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}\right)\right|_{\substack{y=0\\y=b}} = 0\end{gathered} \tag{1.7}$$

имеет вид

$$\lambda_{km}^2 = \pi^4\left(D_1\frac{k^4}{a^4} + 2D_3\frac{k^2m^2}{a^2b^2} + D_2\frac{m^4}{b^4}\right), \quad Q_{km}(x,y) = \sin\frac{k\pi}{a}x\cdot\sin\frac{m\pi}{b}y,$$

$k,m=1,2,\ldots$

Эта система является полной в пространстве $L_2((0,a)\times(0,b))$.

Пусть функции $W(t,x,y)$ и $f(t,x,y)$ удовлетворяют условиям разложимости в двойной ряд Фурье по собственным функциям краевой задачи (1.7), т.е.

$$\begin{gathered}W(t,x,y) = \sum_{k,m=1}^{\infty} W_{km}(t)\sin\frac{k\pi}{a}x\cdot\sin\frac{m\pi}{b}y,\\ W_{km}(t) = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b W\sin\frac{k\pi}{a}x\cdot\sin\frac{m\pi}{b}y\,dxdy,\\ f(t,x,y) = \sum_{k,m=1}^{\infty} u_{km}(t)\sin\frac{k\pi}{a}x\cdot\sin\frac{m\pi}{b}y,\\ u_{km}(t) = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b f(t,x,y)\sin\frac{k\pi}{a}x\cdot\sin\frac{m\pi}{b}y\,dxdy.\end{gathered} \tag{1.8}$$

Подставив теперь разложения (1.8) в уравнение (1.6) для неизвестных коэффициентов $W_{km}(t)$ и $u_{km}(t)$, получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\ddot{W}_{km} + \lambda^2_{km} W_{km} = u_{km}(t), \ k,m=1,2,\ldots \qquad (1.9)$$

...ных условий (1.3) следует, что

$$\ldots(0) \quad \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b \varphi(x,y)\sin\frac{k\pi}{a}x \cdot \sin\frac{m\pi}{b}y dxdy = \varphi_{km}, \ k,m=1,2,\ldots$$

$$\dot{W}_{km}(0) = \frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b \psi(x,y)\sin\frac{k\pi}{a}x \cdot \sin\frac{m\pi}{b}y dxdy = \psi_{km}. \qquad (1.10)$$

(1.4) с учетом полноты системы собственных функций приво-
д... ...дующим равенствам:

$$W_{km}(T) = 0, \ \dot{W}_{km}(T) = 0, \ k,m=1,2,\ldots \qquad (1.11)$$

(1.5) разложение (1.8) для $f(t,x,y)$, получим

$$\int_0^T\int_0^a\int_0^b [f(t,x,y)]^2 dxdydt = \frac{ab}{4}\int_0^T \sum_{k,m=1}^{\infty} u^2_{km}(t)dt =$$

$$= \frac{ab}{4} \sum_{k,m=1}^{\infty} \int_0^T u^2_{km}(t)dt. \qquad (1.12)$$

Возможность почленного дифференцирования и интегрирования рассмотренных рядов будет установлена ниже.

Так как каждое уравнение системы (1.9) не зависит от других уравнений, а функционал

$$J_{km}(u_{km}) = \int_0^T u^2_{km}(t)dt \qquad (1.13)$$

зависит только от управления $u_{km}(t)$, то минимизация функционала (1.5),(1.12) эквивалентна минимизации каждого из независимых функционалов (1.13). Таким образом, задача (1.1) приводится к задаче оптимального управления для уравнения (1.9) с начальными и конечными условиями (1.10),(1.11) в пространстве $L_2(0,T)$.

Из общего решения уравнения (1.9),(1.10) с учетом конечных условий (1.11) следуют моментные равенства

$$\int_0^T u_{km}(t)\sin\lambda_{km}t dt = \lambda_{km}\varphi_{km}; \ \int_0^T u_{km}(t)\cos\lambda_{km}t dt = -\psi_{km},$$

$$k,m=1,2,\ldots \qquad (1.14)$$

Решая систему моментных равенств (1.14) при минимизации функционала (1.13) [2], будем иметь

$$u^0_{km}(t) = \frac{2\psi_{km}\frac{1}{\lambda_{km}}\sin^2\lambda_{km}T + 2T\lambda_{km}\varphi_{km} + \varphi_{km}\sin 2\lambda_{km}T}{T^2 - \frac{\sin^2\lambda_{km}T}{\lambda^2_{km}}}\sin\lambda_{km}t +$$

$$+ \frac{\psi_{km}\frac{\sin 2\lambda_{km}T}{\lambda_{km}} - 2\varphi_{km}\sin^2\lambda_{km}T - 2T\psi_{km}}{T^2 - \frac{\sin^2\lambda_{km}T}{\lambda^2_{km}}}\cos\lambda_{km}t. \qquad (1.15)$$

Следовательно, прогиб пластинки в каждый момент времени $t\in[0,T]$ будет определяться функцией

$$W(t,x,y) = \sum_{k,m=1}^{\infty}\left[\varphi_{km}\cos\lambda_{km}t + \frac{1}{\lambda_{km}}\psi_{km}\sin\lambda_{km}t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda_{km}}\int_0^t \overset{\circ}{u}_{km}(\tau)\sin\lambda_{km}(t-\tau)d\tau\right]\sin\frac{k\pi}{a}x\cdot\sin\frac{m\pi}{b}y, \qquad (1.16)$$

где $\overset{\circ}{u}_{km}(\tau)$ – (1.15).

2. Для обоснования метода решения рассмотренной задачи нужно установить условия равномерной сходимости рядов

$$W = \sum_{k,m=1}^{\infty} W_{km}(t)\sin\frac{k\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y;\quad \dot W_t = \sum_{k,m=1}^{\infty} \dot W_{km}(t)\sin\frac{k\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y;$$

$$W_{tt} = \sum_{k,m=1}^{\infty} W_{km}(t)\sin\frac{k\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y;\quad \Delta\Delta W = \sum_{k,m=1}^{\infty} \lambda_{km}^2 W_{km}(t)\sin\frac{k\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y;$$

$$f(t,x,y) = \sum_{k,m=1}^{\infty} \overset{\circ}{u}_{km}(t)\sin\frac{k\pi}{a}x\sin\frac{m\pi}{b}y, \qquad (2.1)$$

для чего достаточно потребовать равномерную сходимость следующих рядов:

$$\sum_{k,m=1}^{\infty}(W_{km}(t))^2;\quad \sum_{k,m=1}^{\infty}(\dot W_{km}(t))^2;\quad \sum_{k,m=1}^{\infty}(\dot W_{km}(t))^2;$$

$$\sum_{k,m=1}^{\infty}(\lambda_{km}^2 W_{km}(t))^2;\quad \sum_{k,m=1}^{\infty}(\overset{\circ}{u}_{km}(t))^2 \qquad (2.2)$$

Порядок общего члена мажорантного ряда для каждого из рядов (2.2) следующий:

$$\varphi_{km}^2 + \frac{1}{\lambda_{km}^2}\psi_{km}^2;\quad \lambda_{km}^2\varphi_{km}^2 + \psi_{km}^2;\quad \lambda_{km}^4\varphi_{km}^2 + \lambda_{km}^2\psi_{km}^2;$$

$$\lambda_{km}^4\varphi_{km}^2 + \lambda_{km}^2\psi_{km}^2;\quad \lambda_{km}^2\varphi_{km}^2 + \psi_{km}^2. \qquad (2.3)$$

Следовательно, из сходимости рядов

$$\sum_{k,m=1}^{\infty}\lambda_{km}^4\varphi_{km}^2,\quad \sum_{k,m=1}^{\infty}\lambda_{km}^2\psi_{km}^2 \qquad (2.4)$$

будет следовать равномерная сходимость всех остальных рядов (2.1).

Исходя из физических соображений, естественно предположить, что

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^{4-\alpha}\partial y^{\alpha}} \in L_2;\quad \frac{\partial^2}{\partial x^{2-\beta}\partial y^{\beta}}\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right) \in L_2;\quad \alpha = \overline{0,4};\ \beta = \overline{0,2}. \qquad (2.5)$$

Из условий (2.5) следует, что [3] ряды

$$\sum_{k,m=1}^{\infty}(k^{4-\alpha}m^{\alpha}\varphi_{km})^2;\quad \sum_{k,m=1}^{\infty}(k^{2-\beta}m^{\beta}\psi_{km})^2\quad \alpha = \overline{0,4};\ \beta = \overline{0,2}, \qquad (2.6)$$

сходятся. Из сходимости рядов (2.6) и выражения для λ_{km}^2 следует сходимость рядов (2.4), а следовательно, и равномерная сходимость рядов (2.1).

Кафедра теоретической механики

Поступила 21.01.1991

ЛИТЕРАТУРА

1. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. – ОГИЗ, Москва-1947-Ле-

нинград, с.233.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.:Наука, 1968, с.121.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.:Наука, 1972, с.144.

Լ.Ս.ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԹԻԹԵՂԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՂԵԿԱՎԱՐՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է առաձգական օրթոտրոպ ազատ հենված եզրերով ուղղանկյուն թիթեղի տատանումների օպտիմալ ղեկավարման խնդիրը նրա մակերևույթի վրա բաշխված արտաքին ուժերի միջոցով:

Խնդիրը լուծվում է Ֆուրիեի մեթոդով և բերվում է մոմենտների պրոբլեմին $L_2(O,T)$ տարածության մեջ:

Որոշվում է ղեկավարող ազդեցության տեսքը: Բերվում են դիտարկված շարքերի հավասարաչափ զուգամիտության համար բավարար պայմաններ:

L.S.SAHAKIAN

ON THE OPTIMAL CONTROL OF VIBRATIONS OF RIGHT-ANGLED PLATE

SUMMARY

The problem of optimal control of the vibrations of freely leaned elastic orthotropic right-angled plate is studied by means of outer forces, spread along its surface. The problem is solved by means of Furye's method and is brought to the problem of moments in space $L_2(O,T)$.

The form of control influence is determined. Sufficient conditions of even meeting of the studied row are given.