ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 2005 Естественные науки

Математика

УДК 512.57

С. С. ДАВИДОВ

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БИНАРНЫХ АБЕЛЕВЫХ АЛГЕБР

В работе изучается строение бинарных абелевых алгебр путем сведения их к известным алгебраическим образованиям – моноидам. Найдены условия, при которых бинарная абелевая алгебра имеет линейное представление, т.е. существует коммутативный моноид, через операцию и эндоморфизмы которого выражается каждая операция абелевой алгебры.

Абелевые алгебры изучались разными авторами (Сад, Стейн, Тойода, Брак, Медоч, Белоусов, Курош, Смит, Романовска, Кепка, Ежек, Мовсисян и др.) [1–5] под различными названиями: энтропийная, медиальная, бикоммутативная, бисимметричная алгебры. Абелебые алгебры связаны с понятием энтропии в теории информации [5] и находят приложение в кибернетике, экономике, физике и биологии.

Бинарная алгебра (Q,Σ) имеет линейное представление, если существуют коммутативный моноид $Q(+,0)$ и системы его эндоморфизмов $\{f_x | X\in\Sigma\}$, $\{g_x | X\in\Sigma\}$ такие, что каждая операция $X\in\Sigma$ может быть представлена в виде $X(x,y)=f_x(x)+g_x(y)+e_x$ для всех $x,y\in Q$, причем $f_xf_y=f_yf_x$, $g_xg_y=g_yg_x$, $f_xg_y=g_yf_x$, $e_x\in Q$ для всех $X,Y\in\Sigma$. Линейное представление алгебры (Q,Σ) будем обозначать через $Q(+,0,f_x,g_x,e_x)$. Линейное представление называется выпуклым, если $e_x=0$ для всех $X\in\Sigma$.

Бинарная алгебра (Q,Σ) называется абелевой, если она удовлетворяет сверхтождеству абелевости $X(Y(x,y),Y(u,v))=Y(X(x,u),X(y,v))$.

Для $A\in\Sigma$ и $a\in Q$ обозначим через $L_{A,a}(R_{A,a})$ левую (правую) трансляции алгебры (Q,Σ), т.е. отображения $L_{A,a}:x\to A(a,x)(R_{A,a}:x\to A(a,x))$.

Предложение. Пусть (Q,Σ) – абелевая алгебра, удовлетворяющая котождеству $X(b,a)=Y(b,a)$. Кроме того, существуют $A\in\Sigma$ и $c,d\in Q$ такие, что $a=A(a,c)$, $b=A(b,c)$ и трансляции $R_{A,a},L_{A,a}$ – биекции. Тогда существует линейное представление $Q(+,0,f_x,g_x,e_x)$, удовлетворяющее свойствам:

1) e_X – обратимый элемент $Q(+)$ для любого $X \in \Sigma$;
2) $0 = A(b,a)$;
3) $x + y = A\left(R_{A,a}^{-1}(x),\ L_{A,b}^{-1}(y)\right)$ для всех $x, y \in Q$.

Доказательство. Положим $x + y = A\left(R_{A,a}^{-1}(x),\ L_{A,b}^{-1}(y)\right)$, $0 = A(b,a)$. Тогда

$$x + 0 = x + A(b,a) = A\left(R_{A,a}^{-1}(x),\ L_{A,b}^{-1}(A(b,a))\right) =$$
$$= A\left(R_{A,a}^{-1}(x), L_{A,b}^{-1}L_{A,b}(a)\right) = A\left(R_{A,a}^{-1}(x), a\right) = R_{A,a}R_{A,a}^{-1}(x) = x.$$

Аналогично показывается, что $0 + x = x$. Далее, пусть

$$r = A\left(x, L_{A,b}^{-1}\left(A\left(R_{A,a}^{-1}(y), z\right)\right)\right),\quad s = A\left(R_{A,a}^{-1}\left(A\left(x, L_{A,b}^{-1}(y)\right)\right), z\right).$$

Существуют элементы $t, u \in Q$, удовлетворяющие равенствам $A(b,u) = b$ и $A(b,t) = d$. Имеем

$$A(r,a) = A(r, A(a,c)) = A\left(A(x,a), A\left(L_{A,b}^{-1}\left(A\left(R_{A,a}^{-1}(y), z\right)\right), c\right)\right),$$
$$A(s,a) = A(s, A(a,c)) = A\left(A\left(x, L_{A,b}^{-1}(y)\right), A(z,c)\right) = A\left(A(x,z), A\left(L_{A,b}^{-1}(y), c\right)\right).$$

Следовательно,

$$A(b, A(r,a)) = A\left(A(A(b,t), A(b,u)), A(r,a)\right) =$$
$$= A\left(A(A(b,t), A(x,a)), A\left(A(b,u), A\left(L_{A,b}^{-1}\left(A\left(R_{A,a}^{-1}(y), z\right)\right), c\right)\right)\right) =$$
$$= A\left(A(A(b,t), A(x,a)), A\left(A\left(R_{A,a}^{-1}(y), z\right), A(u,c)\right)\right) =$$
$$= A\left(A\left(A\left(b, R_{A,a}^{-1}(y)\right), A(t,z)\right), A(A(x,a), A(u,c))\right) =$$
$$= A\left(A\left(A\left(b, R_{A,a}^{-1}(y)\right), A(x,a)\right), A(A(t,z), A(u,c))\right) =$$
$$= A\left(A(A(b,x), y), A(A(t,z), A(u,c))\right).$$

$$A(b, A(s,a)) = A\left(A(A(b,t), A(b,u)), A(s,a)\right) =$$
$$= A\left(A(A(b,t), A(x,z)), A\left(A(b,u), A\left(L_{A,b}^{-1}(y), c\right)\right)\right) =$$
$$= A\left(A(A(b,x), A(t,z)), A(y, A(u,c))\right) = A\left(A(A(b,x), y), A(A(t,z), A(u,c))\right).$$

Поэтому $A(b, A(s,a)) = A(b, A(r,a))$, и поскольку трансляции $R_{A,a}, L_{A,b}$

инъективны, то $r=s$. Подставляя $x=R_{A,a}^{-1}(u_1), y=u_2, z=L_{A,b}^{-1}(u_3)$ в равенство $r=s$, получим $u_1+(u_2+u_3)=(u_1+u_2)+u_3$.

Из равенств

$$A\left(A\left(R_{A,a}^{-1}(A(b,x)), L_{A,b}^{-1}(A(b,y))\right), a\right)=$$

$$=A\left(A\left(R_{A,a}^{-1}(A(b,x)), y\right), A(a,c)\right)=A(A(b,x), A(y,c))=$$

$$=A(A(b,y), A(x,c))=A\left(A\left(R_{A,a}^{-1}(A(b,y)), x\right), A(a,c)\right)=$$

$$=A\left(A\left(R_{A,a}^{-1}(A(b,y)), L_{A,b}^{-1}(A(b,x))\right), a\right)$$

с учетом сюръективности трансляций $R_{A,a}, L_{A,b}$ следует коммутативность $Q(+)$. Таким образом, $Q(+,0)$ будет коммутативным моноидом.

Из сверхтождества абелевости имеем равенство

$$X(A(u,a), A(b,v))=A(X(u,b), X(a,v))$$

или

$$X(R_{A,a}(u), L_{A,b}(v))=A(R_{X,b}(u), L_{X,a}(v)).$$

Подставляя в него $u=R_{A,a}^{-1}(x), v=L_{A,b}^{-1}(y)$, получаем

$$X(x,y)=R_{A,a}R_{X,b}R_{A,a}^{-1}(x)+L_{A,b}L_{X,a}L_{A,b}^{-1}(x). \tag{1}$$

Положим для каждого $X\in\sum$

$$i_X=A(b, X(a,a)),\ j_X=A(X(b,b), a)$$

и покажем, что они обратимы в $Q(+)$. Существуют элементы $p,q\in Q$ такие, что $A(p,a)=b$ и $A(q,a)=a$. Поэтому

$$A(X(p,q), a)+A(b, X(a,a))=R_{A,a}X(p,q)+L_{A,b}X(a,a)=$$

$$=A(X(p,q), X(a,a))=X(A(p,a), A(q,a))=X(b,a)=A(b,a)=0.$$

Аналогично существуют элементы $u,v\in Q$ такие, что $A(b,u)=$ $=b, A(b,v)=a$ и $A(X(b,b),a)+A(b, X(u,v))=0.$

Введем обозначение для каждого $X\in\sum$:

$$f_X(x)=R_{A,a}R_{X,b}R_{A,a}^{-1}(x)-j_x. \tag{2}$$

Покажем, что f_x – эндоморфизм полугруппы $Q(+,0)$.

$$R_{A,a}R_{X,b}R_{A,a}^{-1}(x+y)+i_X=R_{A,a}R_{X,b}R_{X,a}^{-1}(x+y)+L_{A,b}X(a,a)=$$

$$=A\left(R_{X,b}R_{A,a}^{-1}A\left(R_{A,a}^{-1}(x), L_{A,b}^{-1}(y)\right), X(a,a)\right)=A\left(X\left(R_{A,a}^{-1}A\left(R_{A,a}^{-1}(x), L_{A,b}^{-1}(y)\right), b\right), X(a,a)\right)=$$

$$=X\left(A\left(R_{A,a}^{-1}A\left(R_{A,a}^{-1}(x), L_{A,b}^{-1}(y)\right), a\right), A(b,a)\right)=X\left(A\left(R_{A,a}^{-1}(x), L_{A,b}^{-1}(y)\right), A(b,a)\right)=$$

$$=A\left(X\left(R^{-1}_{A,a}(x),b\right),X\left(L^{-1}_{A,b}(y),a\right)\right)=R_{A,a}R_{X,b}R^{-1}_{A,a}(x)+L_{A,b}R_{X,a}L^{-1}_{A,b}(y).$$

Таким образом,

$$R_{A,a}R_{X,b}R^{-1}_{A,a}(x+y)+i_X=R_{A,a}R_{X,b}R^{-1}_{A,a}(x)+L_{A,b}R_{X,a}L^{-1}_{A,b}(y). \qquad (3)$$

Возьмем в равенстве (3) $x=0=A(b,a)$, получим

$$R_{A,a}R_{X,b}R^{-1}_{A,a}(y)+i_X=R_{A,a}R_{X,b}R^{-1}_{A,a}A(b,a)+L_{A,b}R_{X,a}L^{-1}_{A,b}(y)$$

или

$$L_{A,b}R_{X,a}L^{-1}_{A,b}(y)=R_{A,a}R_{X,b}R^{-1}_{A,a}A(b,a)+L_{A,b}R_{X,a}L^{-1}_{A,b}(y). \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (3), будем иметь

$$R_{A,a}R_{X,b}R^{-1}_{A,a}(x+y)=R_{A,a}R_{X,b}R^{-1}_{A,a}(x)+R_{A,a}R_{X,b}R^{-1}_{A,a}(y)-j_X. \qquad (5)$$

Теперь, с учетом (5) имеем

$$f_X(x+y)=R_{A,a}R_{X,b}R^{-1}_{A,a}(x+y)-j_X=R_{A,a}R_{X,b}R^{-1}_{A,a}(x)+$$
$$+R_{A,a}R_{X,b}R^{-1}_{A,a}(y)-j_X-j_X=f_X(x)+f_X(y);$$
$$f_X(0)=f_XA(b,a)=R_{A,a}R_{X,b}R^{-1}_{A,a}R_{A,a}(b)-j_X=$$
$$=R_{A,a}R_{X,b}(b)-j_X=A(X(b,b),a)-j_X=j_X-j_X=0.$$

Аналогично существуют обратимые элементы $k_X=A(b,X(a,a))$ полугруппы Q(+) такие, что отображения

$$g_X(x)=L_{A,b}L_{X,a}L^{-1}_{A,b}(x)-k_X \qquad (6)$$

будут эндоморфизмами моноида Q(+,0).

Положим $e_X=j_X+k_X$, тогда e_X будет обратимым элементом для всех $X\in\Sigma$, и из формул (1), (2), (6) получим

$$X(x,y)=f_X(x)+g_X(y)+e_X \qquad (7)$$

для всех $X\in\Sigma$ и всех $x,y\in Q$.

Покажем, что для всех $X,Y\in\Sigma$ выполняется равенство

$$X(e_Y,e_Y)=Y(e_X,e_X). \qquad (8)$$

Действительно,

$$e_X=j_X+k_X=A(X(b,b),a)+A(b,X(a,a))=R_{A,a}X(b,b)+L_{A,b}X(a,a)=$$
$$=A(X(b,b,),X(a,a))=X(A(b,a),A(b,a))=X(0,0),$$

поэтому

$$X(e_Y,e_Y)=X(Y(0,0),Y(0,0))=Y(X(0,0),X(0,0))=Y(e_X,e_X).$$

Кроме того, $X(e_Y,e_Y)$ будут обратимыми элементами в полугруппе $Q(+)$ для всех $X,Y\in\Sigma$. В самом деле, если t_Y – обратный элемент для e_Y, то

$$X(e_Y,e_Y)+X(t_Y,t_Y)-e_X-e_X=f_Xe_Y+g_Xe_Y+e_X+f_Xt_Y+$$
$$+g_Xt_Y+e_X-e_X-e_X=f_X(e_Y+t_Y)+g_X(e_Y+t_Y)=f_X(0)+g_X(0)=0.$$

Теперь, используя гомоморфность f_X, g_X, равенство (8) и обратимость $X(e_Y, e_Y)$, будем иметь

$$X(Y(0,x),Y(0,0)) = Y(X(0,0),X(x,0)),$$

$$f_X(f_Y 0+g_Y x+e_Y)+g_X(f_Y 0+g_Y 0+e_Y)+e_X = f_Y(f_X 0+g_X 0+e_X)+$$
$$+g_Y(f_X x+g_X 0+e_X)+e_Y,$$

$$f_X f_Y 0+f_X g_Y x+f_X e_Y+g_X f_Y 0+g_X g_Y 0+g_X e_Y+e_X =$$
$$= f_Y f_X 0+f_Y g_X 0+f_Y e_X+g_Y f_X x+g_Y g_X 0+g_Y e_X+e_Y,$$

$$f_X g_Y x+f_X e_Y+g_X e_Y+e_X = g_Y f_X x+f_Y e_X+g_Y e_X+e_Y,$$

$$f_X g_Y x+X(e_Y,e_Y) = g_Y f_X x+Y(e_X,e_X),$$

следовательно, $f_X g_Y = g_Y f_X$.

Аналогично проверяются равенства $f_X f_Y = f_Y f_X, g_X g_Y = g_Y g_X$ для всех $X,Y \in \Sigma$. Предложение доказано.

Теорема 1. Пусть (Q,Σ) – абелевая алгебра. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) существует линейное представление $Q(+,0,f_X,g_X,e)$ такое, что f_A, g_A – автоморфизмы (Q,Σ) для некоторого $A \in \Sigma$ и e – обратимый элемент $Q(+)$;

2) существуют элемент $a \in Q$ и операция $A \in \Sigma$ такие, что алгебра (Q,Σ) удовлетворяет котождеству $X(a,a) = Y(a,a)$ и трансляции $R_{A,a}, L_{A,a}$ – биекции.

Доказательство. Предположим, что алгебра (Q,Σ) имеет линейное представление. Положим $a = 0$, тогда в (Q,Σ) выполняется котождество $X(a,a) = Y(a,a)$, т.к. $X(0,0) = f_X 0+g_X 0+e = f_Y 0+g_Y 0+e = Y(0,0)$.

Далее, т.к. f_A и g_A – биекции, то таковыми будут и трансляции $R_{A,0}, L_{A,0}$. Обратно, полагая в предложении $a = b$, получим линейное представление $Q(+,0,f_X,g_X,e_X)$ алгебры (Q,Σ), для которого f_A и g_A будут биекциями. Остается показать, что для любых $X,Y \in \Sigma$ будет иметь место равенство $e_X = e_Y$. Действительно,

$$e_X = j_X + k_X = A(X(a,a),a)+A(a,X(a,a)) = R_{A,a}X(a,a)+L_{A,a}X(a,a) =$$
$$= R_{A,a}Y(a,a)+L_{A,a}Y(a,a) = A(Y(a,a),a)+A(a,Y(a,a)) = j_Y + k_Y = e_Y.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть (Q,Σ) – абелевая алгебра. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) существует выпуклое линейное представление $Q(+,0,f_x,g_x)$ такое, что f_A, g_A – автоморфизмы для некоторого $A \in \Sigma$;

2) существуют элемент $a \in Q$ и операция $A \in \Sigma$ такие, что $A(a,a) = a$ и трансляции $R_{A,a}$, $L_{A,a}$ – биекции.

Доказательство следует из предложения.

Кафедра алгебры и геометрии *Поступила 26.05.2005*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мовсисян Ю.М.** – УМН, 1998, т. 53, с. 61–114.
2. **Jezek J., Kepka T.** Medial groupoids. Praha, 1983.
3. **Курош А.Г.** Общая алгебра. М.: Наука, 1974.
4. **Romanovska A.B., Smith J.D.H.** Modes. Singapore: World Scientific, 2002.
5. **Smith J.D.H.** – Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1990, v. 108, p. 435–443.

Ս. Ս. ԴԱՎԻԴՈՎ

ԵՐԿՏԵՂ ԱԲԵԼՅԱՆ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎՆԵՐԻ ԳԾԱՅԻՆ ՆԵՐԿԱՅԱՑՈՒՄՆԵՐ

Ամփոփում

Հոդվածում ուսումնասիրվում են երկտեղ աբելյան հանրահաշիվները դրանք հայտնի հանրահաշվական կառուցվածքների հետ համադրելու եղանակով: Գտնված են պայմաններ, որոնց դեպքում երկտեղ աբելյան հանրահաշիվը ունի գծային ներկայացում, այսինքն՝ գոյություն ունի տեղափոխելի մոնոիդ, որի գործողությամբ և էնդոմորֆիզմների միջոցով արտահայտվում են աբելյան հանրահաշվի բոլոր գործողությունները:

S. S. DAVIDOV

LINEAR REPRESENTATION OF BINARY ABELIAN ALGEBRAS

Summary

In the present paper binary abelian algebras are studied by bringing them to known algebraic structures such as monoids. We have found conditions when binary abelian algebra has a linear representation i.e. every operation of abelian algebra can be expressed by operation and endomorphisms of commutative monoid.