ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2,2000 Естественные науки

Физика

УДК 523.854

М.Г АБРАМЯН, С.В. АРУТЮНЯН

К МАРДЖИНАЛЬНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО КОЛЬЦА

Исследуется устойчивость самогравитирующего несжимаемого кольца большого радиуса (малой кривизны) в точке марджинальной устойчивости бесконечного цилиндра. Расчеты проведены в первом приближении по малому параметру, связанному с кривизной кольца. Показано, что в рассматриваемой области кольцо устойчиво.

Задача равновесия и устойчивости несжимаемых фигур равновесия (слоя и цилиндра) рассматривалась еще в работах [1,2]. Там же, в частности, получено дисперсионное уравнение бесконечного цилиндра в виде

$$\omega^2 = \frac{4\pi G\rho ka I_1(ka)}{I_0(ka)}\left[\frac{1}{2} - I_0(ka)K_0(ka)\right].$$

Здесь ω – частота возмущений, k – волновое число, ρ – плотность цилиндра, a – его радиус. Через I_i и K_i обозначены функции Бесселя мнимого аргумента. При $ka \approx 1.07$ $\omega^2 \approx 0$, и цилиндр марджинально устойчив.

Большой интерес представляет также динамика гравитирующего кольца в связи с ее достаточно широкими приложениями в астрономии. В работах [3,4] рассматривается равновесие вращающихся политропных цилиндров и колец (последний имеет в центре притягивающее тело) и выводятся выражения для равновесных распределений давления, плотности, гравитационного потенциала и вытекающего отсюда значения угловой скорости вращения. В этих работах наличие некоего малого параметра β является существенным, и решения получаются в виде разложения по этому параметру. В нулевом приближении по этому параметру кольцо вырождается в бесконечный цилиндр.

Устойчивость политропных торов без учета их самогравитации исследовалась в работах [5–7] и была установлена их динамическая неустойчивость.

В настоящей работе рассматривается устойчивость тонкого, жидкого вращающегося самогравитирующего кольца в первом приближении по параметру β, введенному в [4] около точки марджинальной устойчивости бесконечного цилиндра.

Начало декартовой системы координат помещено в центре кольца. Используется система координат (r,ϕ,θ), которая связана с декартовой по формулам

$$x = (R + r\cos\phi)\cos\theta;\ y = (R + r\cos\phi)\sin\theta;\ z = r\sin\phi. \tag{1}$$

Здесь R – радиус кольца. Следуя работе [4], введем безразмерные величины

$$\xi = \frac{r}{\alpha}, \ \beta = \frac{\alpha}{R}, \tag{2}$$

где α – параметр, имеющий размерность длины, который в случае несжимаемой жидкости равен a/2 (a – малый радиус кольца). Будем считать, что $\beta \ll 1$ и в центре кольца имеется гравитирующее тело, вокруг которого вращается кольцо. Равновесное давление внутри кольца определяется формулой [4]

$$P_0 = P_c[\theta(\xi) + \beta f_1(\xi)\cos\phi], \tag{3}$$

где

$$P_c = \pi G \rho^2 a^2; \ \theta(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{4}; \ f_1(\xi) = -\frac{\xi}{4} + \frac{\xi^3}{16}. \tag{4}$$

Угловая скорость связана с равновесными давлением и самогравитацией. Она является величиной второго порядка малости по β:

$$w = \frac{\Omega^2}{2\pi G\rho} = \beta^2[|\xi_1\theta'(\xi_1)|\left(\ln\frac{8}{\beta\xi_1} + 2\eta - \frac{3}{2}\right) + \frac{f_1(\xi_1)}{\xi_1} + f_1'(\xi_1)]. \tag{5}$$

Здесь $\xi_1 = 2$ – безразмерный радиус кольца, $\eta = \pi\frac{M_c}{M_r}$, где M_r – масса кольца, а M_c – масса центрального тела.

Исследуем малые колебания кольца. Предположим, что поверхность кольца подверглась возмущению вида

$$r = a + \varsigma_r \exp i(k\theta R + \omega t). \tag{6}$$

Малые возмущения параметров кольца зададим в виде

$$f(r,\phi,\theta,t) = f(r,\phi)\exp i(k\theta R + \omega t), \tag{7}$$

причем будем считать, что $kR \gg \beta$.

Функцию $f(r,\phi)$ в первом порядке по параметру β представим в виде

$$f(r,\phi) = f_0(r) + \beta f_1(r)\cos\phi. \tag{8}$$

Вектор смещения жидкости $\vec{\varsigma}$ удовлетворяет уравнению

$$div\vec{\varsigma} = 0.$$

Вводя потенциал φ для вектора $\vec{\varsigma}(\vec{\varsigma} = grad\varphi)$, получим

$$\nabla^2\varphi = 0. \tag{9}$$

Следующим уравнением задачи является возмущенное уравнение Пуассона, которое в данном случае имеет вид

$$\nabla^2\psi = 0, \tag{10}$$

где ψ – возмущение потенциала самогравитации кольца. Возмущение давления находим из уравнения движения:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\varphi = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nabla\psi. \tag{11}$$

К системе уравнений (9)–(11) должны быть добавлены граничные условия, выражающие а) непрерывность гравитационного потенциала, б) скачок нормальной производной гравитационного потенциала на равновесной поверхности кольца [1,2] и в) равенство нулю лагранжевого возмущения давления на равновесной поверхности кольца:

$$\begin{cases} \psi^i = \psi^e; \\ \dfrac{\partial \psi^i}{\partial r} - \dfrac{\partial \psi^e}{\partial r} = 4\pi G \rho \varsigma_r; \\ P + \varsigma_r \dfrac{\partial P_0}{\partial \xi} = 0. \end{cases} \qquad (12)$$

Величины с индексами i и e относятся к областям внутри и вне кольца соответственно.

Имея в виду, что в выбранной системе координат

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1+2(r/R)\cos\phi}{1+(r/R)\cos\phi}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \frac{\sin^2\phi}{1+(r/R)\cos\phi}\frac{1}{Rr}\frac{\partial}{\partial \phi} +$$

$$+ \frac{1}{[1+(r/R)\cos\phi]^2}\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \qquad (13)$$

и представив оператор ∇^2 в виде $\nabla_0^2 + \beta\nabla_1^2$, получим систему уравнений для ψ_0 и ψ_1:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi_0}{\partial \xi^2} + \dfrac{1}{\xi}\dfrac{\partial \psi_0}{\partial \xi} + \dfrac{1}{\xi^2}\dfrac{\partial^2 \psi_0}{\partial^2 \phi} + \beta^2 \dfrac{\partial^2 \psi_0}{\partial \theta^2} = 0; \qquad (14) \\ \dfrac{\partial^2 \psi_1}{\partial \xi^2} + \dfrac{1}{\xi}\dfrac{\partial \psi_1}{\partial \xi} + \dfrac{1}{\xi^2}\dfrac{\partial^2 \psi_1}{\partial^2 \phi} + \beta^2 \dfrac{\partial^2 \psi_1}{\partial \theta^2} = -\cos\phi \dfrac{\partial \psi_0}{\partial \xi} + \dfrac{\sin\phi}{\xi}\dfrac{\partial \psi_0}{\partial \xi} + 2\beta^2 \xi \cos\phi \dfrac{\partial^2 \psi_0}{\partial \theta^2}. \end{cases}$$

Внутри кольца для потенциала ψ_0^i из (14) и (7) будем иметь решение

$$\psi_0^i = C_0 I_0(k\alpha\xi)\exp(ikR\theta), \qquad (15)$$

а вне –

$$\psi_0^e = C_0' K_0(k\alpha\xi)\exp(ikR\theta). \qquad (16)$$

Подставляя (15) во второе уравнение (14) и принимая во внимание (7), для ψ_1^i будем иметь уравнение

$$\frac{\partial^2 \psi_1^i}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial \psi_1^i}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2}\psi_1^i - k^2\alpha^2\psi_1^i = -C_0 k\alpha I_1(k\alpha\xi) - 2C_0\alpha^2 k^2 \xi I_0(k\alpha\xi), \qquad (17)$$

общее решение которого после некоторых преобразований принимает вид с учетом, что вронскиан уравнения равен $W = I_1 \dfrac{dK_1}{d\xi} - K_1 \dfrac{dI_1}{d\xi} = -\dfrac{1}{\xi}$,

$$\psi_1^i = C_1 I_1(k\alpha\xi) + \frac{C_0}{2k\alpha}[k\alpha\xi I_1'(k\alpha\xi) - I_1(ka\xi) - k^2\alpha^2\xi^2 I_1(k\alpha\xi)] \qquad (18)$$

(производная берется по аргументу функции).

Для гравитационного потенциала вне кольца уравнение Пуассона в рассматриваемом приближении выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \psi_1^e}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial \psi_1^e}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2}\psi_1^e - k^2\alpha^2\psi_1^e = C_0' k\alpha K_1(k\alpha\xi) - 2C_0'\alpha^2 k^2 \xi K_0(k\alpha\xi). \qquad (19)$$

После преобразований получаем следующее общее решение этого уравнения:

$$\psi_1^e = C_1' K_1(k\alpha\xi) + \frac{C_0'}{2k\alpha}[-k\alpha\xi K_1'(k\alpha\xi) - K_1(k\alpha\xi) - k^2\alpha^2\xi^2 K_1(k\alpha\xi)]. \qquad (20)$$

Решив уравнение (9) с учетом (6)

$$\varphi = \frac{A_0}{2k\alpha}[k\alpha\xi I_1'(k\alpha\xi) - I_1(k\alpha\xi) - k^2\alpha^2\xi^2 I_1(k\alpha\xi)]\beta\cos\phi, \tag{21}$$

получаем амплитуду смещения

$$\varsigma_r = \frac{A_0}{2\alpha}\left[\frac{2I_1(k\alpha\xi)}{k\alpha\xi} - I_0(k\alpha\xi) - k^2\alpha^2\xi^2 I_0(k\alpha\xi)\right]\beta\cos\phi. \tag{22}$$

Из граничных условий (12) и уравнения (11) получаем выраженные через A_0 постоянные C_0, C_0', C_1, C_1' :

$$C_0 = 4\pi G\rho x I_1 K_0 A_0;$$

$$C_1 = -\frac{4\Omega^2(xK_0I_1 - 1)}{x(I_0 + K_0I_1)}\left[\frac{2I_1}{x} - (1+x^2)I_0\right]A_0 -$$

$$-\frac{4\Omega^2 K_0 I_1(K_1 + xK_0)}{x^2K_1(I_0 + K_0I_1)}\left[\frac{x^2K_1I_0}{K_0} - (2+x^2)I_1\right]A_0; \tag{23}$$

$$C_0' = C_0\frac{I_0}{K_0};$$

$$C_1' = \frac{C_0}{xK_0}\left[\frac{x^2K_1I_0}{K_0} - (2+x^2)I_1\right] + \frac{C_1I_0}{K_0}.$$

Здесь аргументом бесселовых функций является $x = ka$. Дисперсионное уравнение получим, пользуясь третьим из граничных условий (12):

$$\frac{\omega^2}{\Omega^2} = -4xI_1K_0 + f_3(x)\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{x^2I_1}{f_2(x)} + \frac{f_4(x)}{f_2(x)} - \frac{g_1(x)}{f_2(x)}, \tag{24}$$

где

$$\Omega^2 = \pi G\rho; \tag{25}$$

$$f_1(x) = \frac{2I_1}{x} - (1+x^2)I_0; \tag{26}$$

$$g_1(x) = 4x^2I_1^2I_0K_1[(1+x^2)K_0 - 2xK_1]; \tag{27}$$

$$f_2(x) = xI_0 - (2+x^2)I_1; \tag{28}$$

$$f_3(x) = 2x[1 + 2I_1K_1(xK_0I_1 - 1)]; \tag{29}$$

$$f_4(x) = 4xK_0I_1^2(K_1 + xK_0)\left[\frac{x^2K_1I_0}{K_0} - (2+x^2)I_1\right]. \tag{30}$$

В точке марджинальной стабильности бесконечного цилиндра ($ka = 1.0667$) получаем $\omega^2 \approx 2.72\Omega^2$. Это свидетельствует о том, что кольцо устойчиво относительно рассматриваемого нами типа возмущений.

ЕГУ, ЕГМУ

Поступила 10.11.1999

ЛИТЕРАТУРА

1. **Оганесян Р.С.** – Астрон. ж., 1960, т. 37, с. 458.
2. **Оганесян Р.С.** – Астрон. ж., 1956, т. 33, с. 928.
3. **Ostriker J.** – Astrophys. J., 1964, v. 140, p. 1056.
4. **Ostriker J.** – Astrophys. J., 1964, v. 140, p. 1067.
5. **Papaloizou J.C.B.** and **Pringle J.E.** – Mon. Not. R. astr. Soc., 1984, v. 208, p. 721.
6. **Papaloizou J.C.B.** and **Pringle J.E.** – Mon. Not. R. astr. Soc., 1985, v. 208, p. 721.
7. **Goldreich P., Goodman J.** and **Ramesh N.** – Mon. Not. R. astr. Soc., 1986, v. 221, p. 339.

Մ.Գ. ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ, Ս.Վ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ

ԻՆՔՆԱԳՐԱՎԻՏԱՑՎՈՂ ՕՂԱԿԻ ԵԶՐԱՅԻՆ ԱՆԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ուսումնասիրված է մեծ շառավղով (փոքր կորությամբ) ինքնագրավիտացվող անսեղմելի օղակի կայունությունը անվերջ գլանի մարգինալ կայունության կետում: Հաշվարկը կատարված է ըստ փոքր պարամետրի առաջին մոտավորությամբ, որը կապված է օղակի կորության հետ: Ցույց է տրված, որ օղակը կայուն է այդ կետի շրջակայքում: