ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Բնական գիտություններ 2, 1988 Естественные науки

Физика

УДК 52.530.12

Э. В. ЧУБАРЯН, Д. И. ЗАСЛАВСКИЙ

АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ СВЕРХПЛОТНЫХ ЗВЕЗД В РАМКАХ БИМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

В рамках БТТ методом обратной задачи получены не противоречащие физической реальности аналитические решения внутри распределения масс в сферически-симметричном случае. На основе полученных решений построены модели сверхплотных звездных конфигураций.

1. **Введение.** Среди альтернативных теорий гравитации особое место занимает биметрическая теория тяготения (БТТ), развитая Н. Розеном [1]. Широкий класс задач в рамках БТТ был исследован сотрудниками кафедры теоретической физики Ереванского государственного университета [2—4].

В настоящей работе, являющейся логическим продолжением цикла работ, выполняемых на кафедре теоретической физики, впервые в рамках БТТ получены не противоречащие физической реальности аналитические решения внутри распределения масс в случае сферически-симметрического распределения вещества. Для нахождения аналитических решений использован метод обратной задачи, суть которой состоит в следующем: выбирается конкретный вид одного из потенциалов поля и решаются полевые уравнения без конкретного выбора вида уравнения состояния. Полученные решения при некотором конечном R должны непрерывным образом перейти в известное решение вне распределения масс [1].

2. **Решения уравнений поля.** При сферически-симметрическом распределении вещества криволинейную и плоскую метрики можно записать в виде [1]

$$dS^2=e^{2\varphi}dt^2-e^{2\psi}dr^2-r^2e^{2\chi}(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2),$$
$$d\sigma^2=dt^2-dr^2-r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2). \qquad (1)$$

Здесь φ, ψ и χ—функции от r, причем $\psi=\chi$. Соответствующие метрикам (1) уравнения (поля и гидродинамики) есть

$$\varphi''+\frac{2}{r}\varphi'=4\pi e^{\varphi+3\psi}(\rho+3P),$$
$$\psi''+\frac{2}{r}\psi'=-4\pi e^{\varphi+3\psi}(\rho-P), \qquad (2)$$
$$P'+(P+\rho)\varphi'=0.$$

Можно показать, что эта система уравнений равносильна следующей:

$$\varphi=\int\limits_{t}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{6}\left(-f''+\frac{1}{2}f'^2+4\int\limits_{t}^{\infty}\frac{f''}{t}\,dt\right)}\,dt+\varphi_0,$$

$$P=\frac{t^4e^{2\varphi-f}}{48\pi R^2}f'', \qquad (3)$$

$$\rho=\frac{t^4e^{2\varphi-f}}{16\pi R^2}\left[\frac{2\left(f'''-f'f''+4\frac{f''}{t}\right)}{\sqrt{6\left(-f''+\frac{1}{2}f'^2+4\int\limits_{t}^{\infty}\frac{f''}{t}\,dt\right)}}-f''\right],$$

где введены обозначения $f=3\ (\varphi+\psi)$, $t=R/r$ (R—радиус конфигурации), а штрих означает производную по t.

Благодаря тому, что мы не задались конкретным уравнением состояния, можем построить широкий класс аналитических решений, выбирая функцию f так, чтобы решение удовлетворяло требованиям физической реальности. Ограничения, накладываемые на f, определяются условиями, которым должны удовлетворять плотность ρ и давление P внутри конфигурации.

1. На границе конфигурации давление $P_{t=1}=0$, откуда $f''_{t=1}=0$.

2. На границе конфигурации плотность вещества $\rho_{t=1}=0$, откуда $f'''_{t=1}=0$.

3. В центре конфигурации $P_{t=\infty}=P_0<\infty$, откуда следует, что при $t\to\infty$ $f''\sim c/t^4$, где $c=\mathrm{const}$.

4. Внутри конфигурации $1\leqslant t<\infty$ $P'\geqslant 0$, это условие выполняется автоматически.

5. Плотность вещества в центре конфигурации $\rho_{t=\infty}=\rho_0<\infty$, откуда следует, что $f''=\frac{A}{t^4}+\zeta(t)$, где $\zeta(t)\lesssim c\ t^6$.

6. $d\rho'/dP'\geqslant 1$. Выполнение этого условия проверялось непосредственными расчетами.

7. Из выполнения пунктов 4 и 6 следует, что $\rho'\geqslant 0$.

8. $\rho\geqslant P$. Это условие следует из пунктов 1, 2, 6 при выполнении условия $P''_{t=1}\neq 0$.

9. Давление вещества внутри конфигурации положительно $P\geqslant 0$, откуда $f''\geqslant 0$.

Вне распределения масс (в интервале $0\leqslant t\leqslant 1$) потенциалы определяются выражениями

$$\varphi=-\frac{M}{R}t, \qquad f=\frac{3(M_1-M)}{R}t, \qquad (4)$$

где

$$M=-4\pi R^3\int\limits_{\infty}^{1}e^{f-2\varphi}(\rho+3P)\frac{dt}{t^4}; \qquad M_1=-4\pi R^3\int\limits_{\infty}^{1}e^{f-2\varphi}(\rho-P)\frac{dt}{t^4} - \qquad (5)$$

массы, определяемые Розеном в [1]. Используя наши обозначения, можно показать, что

$$M=\sqrt{\frac{1}{6}\left(-f''+\frac{1}{2}f'^2+4\int\limits_{t}^{\infty}\frac{f''}{t}\,dt\right)}\cdot R, \qquad (6)$$

$$M_1 = M + f'\frac{R}{3}\cdot$$

Из определения (5) следует, что $M_1 < M$; следовательно, согласно (6) необходимо выполнение еще одного условия.

10. $f' < 0$.

Для однозначного решения задачи необходимо знание потенциалов (φ_0, f_0) в центре конфигурации. Они определяются из условия сшивки внутреннего и внешнего решений на границе конфигурации.

3. **Решение при конкретном выборе вида потенциала.** В качестве примера рассмотрим следующий вид функции f:

$$f = D\left(\frac{1}{6t^2} - \frac{1}{10t^4} + \frac{1}{42t^6}\right) + f_0. \tag{7}$$

Легко проверить, что выбранная функция удовлетворяет всем требованиям физической реальности. При таком выборе f

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{D}{\sqrt{6}}\int_0^z \left[\left(\frac{2}{3D} + \frac{1}{18}\right)z^2 - \left(\frac{1}{2D} + \frac{2}{15}\right)z^4 + \frac{67}{525}z^6 - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{35}z^8 + \frac{z^{10}}{98}\right]^{1/2} dz,$$

$$P = \frac{De^{2\varphi - f}}{48\pi R^2}(1 - z^2)^2,$$

$$\rho = \frac{De^{2\varphi - f}}{16\pi R^2}\left[\frac{\frac{4}{D} + \frac{1}{3} - \left(\frac{4}{D} + \frac{16}{15}\right)z^2 + \frac{134}{105}z^4 - \frac{24}{35}z^6 + \frac{z^8}{7}}{\left[\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3D} + \frac{1}{18} - \left(\frac{1}{2D} + \frac{2}{15}\right)z^2 + \frac{67}{525}z^4 - \frac{2z^6}{35} + \frac{z^8}{98}\right)\right]^{1/2}} - \right.$$

$$\left. -(1 - z^2)^2 \right],$$

где введена новая переменная $z = 1/t$.

Параметры конфигурации определяются следующими соотношениями:

$$f_0 = -\frac{1}{6}D,$$

$$\varphi_0 = -D\sqrt{\frac{1}{36D} + \frac{16}{33075}} - \frac{D}{2\sqrt{6}}\int_0^1 \left[\frac{2}{3D} + \frac{1}{18} - \left(\frac{1}{2D} + \frac{2}{15}\right)u + \right.$$

$$\left. + \frac{67}{525}u^2 - \frac{2}{35}u^3 + \frac{u^4}{98}\right]^{1/2} du,$$

$$P_0=\frac{De^{2\varphi_0-f_0}}{48\pi R^2};\quad \rho_0=3P_0\left(2\sqrt{\frac{4}{D}+\frac{1}{3}}-1\right),$$

$$M=D\sqrt{\frac{1}{36D}+\frac{16}{33075}}R,\quad M_1=M-\frac{8D}{315}R.$$

Требования пункта 6 ограничивают значения $D: 0<D\leqslant 0{,}84$.

Ниже приведена табл. 1 значений параметров конфигурации при различных значениях независимых параметров D и R^2, выбранного следующим образом:

$$R^2=e^{2\varphi_0-f_0}\sqrt{D}.$$

Такой выбор независимой величины R связан исключительно с соображениями удобства вычислений.

Следует отметить, что выбор величины f в начале этого параграфа определяет ее самым простым образом. Действительно, приведенный вид функции f соответствует следующему виду функции f'':

$$f''=D\frac{(1-t^2)^2}{t^8}.$$

Легко видеть, что такая функция тривиально удовлетворяет требованиям пунктов 1, 2, 3, 5, 8, 9. Остальные пункты выполняются автоматически.

Таблица 1

D	$-f_0$	$-\varphi_0$	R, *км*	$M_1\odot$	$M\odot$	$\rho_0\cdot 10^{-14}$, *г·см*$^{-3}$	$P_0\cdot 10^{-35}$, *г·см*$^{-1}$*·с*$^{-2}$
0,84	0,14	0,604	8,08	0,742	0,861	0,387	0,33
0,72	0,12	0,559	8,72	0,749	0,859	0,337	0,262
0,6	0,1	0,51	9,52	0,754	0,855	0,285	0,199
0,52	0,087	0,475	10,2	0,757	0,849	0,25	0,161
0,44	0,073	0,436	11,0	0,757	0,842	0,214	0,125
0.36	0,06	0,395	12,0	0,754	0,83	0,178	0,093
0,28	0,047	0.348	13,3	0,746	0,812	0,141	0,0636
0,2	0,033	0,294	15,1	0,73	0,783	0,103	0,0384
0,12	0,02	0.228	18,3	0,694	0,732	0,063	0,0178
0,04	0,0067	0,131	26,4	0,59	0,609	0,022	0,0034

4. **Звездные модели.** Приведенный метод построения аналитических решений может быть использован для моделей вырожденных звездных конфигураций. В зависимости от конкретной моделируемой конфигурации условия, накладываемые на функцию f, могут соответствовать звездным конфигурациям, уравнения состояния которых приближаются к уравнению идеального газа. Эти условия, естественно,

должны быть изменены, если мы хотим описать конфигурацию, состояние вещества в которой приближается к состоянию идеальной жидкости.

Если мы зададимся целью построить модель нейтронной звезды, то должны внести в требования физической реальности следующие изменения.

Необходимо учесть, что плотность на границе звездной конфигурации не обязательно должна обращаться в нуль и, более того, может быть порядка 10^{14} *г·см*$^{-3}$. Это фактически означает, что мы строим модель сердцевины нейтронной звезды. Имея в виду, однако, что оболочка звезды для устойчивых конфигураций не дает существенного вклада в массу, можно считать, что построенные нами аналитические модели с достаточной точностью определяют интегральные характеристики нейтронных звезд. Это требование аннулирует выполнение пункта 2 в § 2, что сразу влечет за собой нарушение непрерывности φ'' и P' аналогично модели «сжимаемой жидкости».

В качестве примера рассмотрим функцию f в виде

$$f=D\left(\frac{1}{6t^3}-\frac{1}{10t^4}+\frac{1}{30t^5}\right)+f_0.$$

Вычисления, проведенные по схеме § 2, дают

$$\varphi=\varphi_0+D\int_0^z\sqrt{\frac{1}{6}\left(\left(\frac{2}{3D}+\frac{1}{18}\right)z^2-\frac{3}{7D}z^3-\frac{2}{15}z^4+\frac{1}{18}z^5+\frac{2}{25}z^6-\frac{1}{15}z^7+\frac{1}{72}z^8\right)}\,dz,$$

$$P=\frac{De^{2\varphi-f}}{48\pi R^2}(1-2z^2+z^3),$$

$$\rho=\frac{De^{2\varphi-f}}{16\pi R^2}\left[\frac{\frac{4}{D}+\frac{1}{3}-\frac{3}{D}z-\frac{16}{15}z^2+\frac{1}{2}z^3+\frac{4}{5}z^4-\frac{11}{15}z^5+\frac{1}{6}z^6}{3\sqrt{\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3D}+\frac{1}{18}-\frac{3}{7D}z-\frac{2}{15}z^2+\frac{1}{18}z^3-\frac{2}{25}z^4-\frac{1}{15}z^5+\frac{1}{72}z^6\right)}}-(1-2z^2+z^3)\right],$$

$$f_0=-\frac{1}{5}D,$$

$$\varphi_0=-D\sqrt{\frac{5}{21D}+\frac{1}{200}}-$$

$$-D\int_0^1\sqrt{\frac{1}{6}\left(\left(\frac{2}{3D}+\frac{1}{18}\right)z^2-\frac{3}{7D}z^3-\frac{2}{15}z^4+\frac{1}{18}z^5+\frac{2}{25}z^6-\frac{1}{15}z^7+\frac{z^8}{72}\right)}\,dz,$$

$$M=D\sqrt{\frac{5}{21D}+\frac{1}{200}}\cdot R,$$

$$M_1=M-\frac{1}{30}D\cdot R,$$

$$P_0=\frac{De^{2\varphi_0-f_0}}{48\pi R^2},$$

$$\rho_0=\frac{De^{2\varphi_0-f_0}}{16\pi R^2}\left(4\sqrt{\frac{1}{D}+\frac{1}{3}}-1\right), \qquad \rho_s=\frac{e^{-2M/R+\frac{2D}{15}}}{8\pi R^2\sqrt{\frac{1}{2D}+\frac{1}{30}}}.$$

Таблица 2

D	$-f_0$	$-\varphi_0$	R, *км*	M_1 ⊙	M ⊙	$\rho_0\cdot10^{-14}$, *г·см*$^{-3}$	$P_0\cdot10^{-35}$, *г·см*$^{-1}$с$^{-2}$	$\rho_S\cdot10^{-9}$, *г·см*$^{-3}$
0,84	0,168	0,568	11,25	2,87	3,08	0,434	0,33	0,361
0,72	0,144	0,525	11,87	2,77	2,94	0,371	0,262	0,304
0,6	0,12	0,479	12,66	2,71	2,86	0,309	0,199	0,225
0,48	0,096	0,427	13.7	2,64	2,77	0,248	0,143	0,194
0,36	0,072	0,37	15,16	2,54	2,65	0.187	0,0927	0,132
0,24	0,048	0,301	17,47	2,4	2,49	0,126	0,0504	0,087
0,12	0,024	0,213	22,07	2,17	2,22	0,064	0,0178	0,043

Таким образом приведенное рассмотрение позволяет получить аналитические решения сферической задачи БТТ, обладающие достаточно широким диапазоном свойств. С учетом вышеописанного оказывается возможным построение моделей сферических конфигураций.

Кафедра теоретической физики *Поступила 2.07.1987*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Rosen N.** Bimetric theory and singularities in relativity.—Ann. Phys., N. Y., 1974.
2. **Саакян Г. С., Саркисян А. В., Хачатрян Б. В., Чубарян Э. В.** Конфигурации вырожденных масс по биметрической теории гравитации.—Астрофизика, 1978, т. 14, с. 489—500.
3. **Григорян О. А., Чубарян Э. В.** Стационарные аксиально-симметричные гравитационные поля в биметрической теории.—Астрофиз., 1985, т. 23, с. 177—190.
4. **Саркисян А. В., Хачатрян Б. В., Чубарян Э. В.** Конфигурации вырожденных масс по биметрической теории гравитации Розена.—Астрофиз., т. 15, 1979, с. 506—511.

Ամփոփում

Աշխատանքում հակադարձ խնդրի մեթոդի օգնությամբ ստացված են ֆիզիկական իրականությանը չհակասող անալիտիկ լուծումներ կենտրոնա-համաչափ բաշխված նյութի ներսում։ Ստացված լուծումների օգնությամբ կառուցված են գերխիտ աստղային կոնֆիգուրացիաների մոդելներ։

SUMMARY

Analytical solutions for spheric-symmetrical case inside mass distribution in the bimetric theory of gravitation are obtained by the method of inversion problem. These solutions correspond to physical reality. Models of superdense star configurations are obtained.