ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 1986 Естественные науки

Физика

УДК 548.053+539.145

Г. А. ВАРДАНЯН, К. В. ПАПОЯН, Д. М. СЕДРАКЯН

О ГИДРОДИНАМИКЕ СВЕРХТЕКУЧЕГО КРИСТАЛЛА

Двумерный квантовый кристалл гелия, адсорбированный на поверхности графойля, является примером системы со сверхтекучестью. Как обнаружено экспериментально, из-за сил отталкивания между атомами один атом гелия приходится на три узла решетки графойля, что обусловливает наличие вакансионов с концентрацией, достаточной для образования сверхтекучего конденсата.

В присутствии вакансионов в решетке кристалла возможны два вида сверхтекучего движения и, следовательно, два конденсата.

Предложенные в настоящей работе макроскопические уравнения движения позволяют исследовать спектр колебаний в двухконденсатных кристаллах.

При достаточно низких температурах кристаллы гелия с неравным числом атомов и узлов решетки обладают, как было предсказано Андреевым и Лифшицем, свойством сверхтекучести [1].

Наблюдение этого явления требует в принципе наличия определенной концентрации вакансий. После экспериментального обнаружения квантовых кристаллов, адсорбированных на поверхности графита [2], было показано, что из-за сил отталкивания между атомами один атом гелия приходится на три узла решетки графита. Поэтому в такой системе существуют вакансионы (свободные делокализованные узлы) достаточно большой концентрации. Возникшее упорядоченное состояние с вакансионами может стать примером системы со сверхтекучестью.

Квантовый кристалл с вакансионами представляет собой уникальный объект, в котором при очень низких температурах возможно одновременное существование двух конденсатов и, соответственно, двух видов сверхтекучего движения. Одно из них связано с движением узлов решетки, а другое—описывает перемещение квазичастиц через кристаллическую решетку. Течение узлов решетки сопровождается, однако, переносом массы вещества в противоположную сторону их движения. Причем оба движения являются потенциальными.

Макроскопические уравнения движения вышеуказанного двухконденсатного кристалла рассматриваются в настоящей работе В первой части получен спектр колебаний кристалла при нулевой температуре. Наличие двух конденсатов приводит к появлению добавочных частот в спектре возбуждений системы, которые не имеются в случае одноконденсатного квантового кристалла [1].

Во второй части работы рассматривается вопрос о втором звуке в квантовом кристалле. Уравнения гидродинамики при этом дополняются кинетическим уравнением для фононов с учетом наличия в системе градиента температуры. Волна плотности одноконденсатного кристалла [1] при неподвижных узлах зацепляется с волной второго звука. Это обстоятельство дает возможность, например, с помощью температурных волн возбудить волну плотности при неподвижных узлах кристалла.

1. Макроскопические уравнения движения для двухконденсатного кристалла можно написать аналогично приведенным в работах [3—6], исходя из законов сохранения.

Существенным теперь является потенциальность движения решетки, с учетом которого можем написать следующие уравнения:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_k} j_k=0,$$

$$\frac{\partial j_i}{\partial t}=\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k},$$

$$\frac{\partial v_{si}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\mu_s=0, \quad \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\mu_u=0, \tag{1}$$

где ρ—плотность среды, μ_s, v_s и μ_u, $\dot{u}_i$ —сверхтекучие скорости и химические потенциалы квазичастиц и узлов решетки соответственно, j_i—поток вещества:

$$j_i=m^*N_s v_{si}-(\rho-m^*N_s)\dot{u}_i=\rho_s v_{si}+\rho\dot{u}_i. \tag{2}$$

Здесь m^*—эффективная масса квазичастиц $\left(m^*\sim\frac{\hbar^2}{\Delta a^2}\right)$, Δ—ширина зоны квазичастиц, a—постоянная решетки, N_s—плотность атомов в конденсате, движущихся со скоростью v_s.

Входящий в систему уравнений (1) тензор напряжений имеет вид

$$\sigma_{ik}=\lambda_{ik}-[-\varepsilon+\mu_s\rho_s+\mu_u(\rho-\rho_s)]\delta_{ik},$$

который, следуя [1], можно записать в виде

$$\sigma_{ik}=C_{iklm}u_{lm}-\rho_{ik}^{s}\mu_s-\rho_{ik}^{u}\mu_u, \tag{3}$$

где

$$C_{iklm}=\frac{\partial\lambda_{ik}}{\partial u_{lm}};\quad \rho_{ik}^{s}=-\frac{\partial\lambda_{ik}}{\partial\mu_s}+\rho_s\delta_{ik};\quad \rho_{ik}^{u}=-\frac{\partial\lambda_{ik}}{\partial\mu_u}+\rho_u\delta_{ik},$$

причем

$$\rho_s+\rho_u=\rho.$$

К системе (1) можно добавить также уравнение состояния

$$\rho=\left(\frac{\partial\rho_s}{\partial\mu_s}\right)\mu_s+\left(\frac{\partial\rho_u}{\partial\mu_u}\right)\mu_u. \tag{4}$$

Уравнения (1), (3) и (4) определяют спектр колебаний двухконденсатного кристалла.

В случае, когда входящие в эти уравнения величины пропорциональны $\exp i(kr-\omega t)$, из (1) имеем

$$\omega\left(\frac{\partial\rho_s}{\partial\mu_s}\right)\mu_s+\omega\left(\frac{\partial\rho_u}{\partial\mu_u}\right)\mu_u-k_k j_k=0,$$

$$-\omega j_i=k_k\sigma_{ik}, \tag{5}$$

$$\mu_s = \frac{\omega}{k^2} k_i v_{si}, \quad \mu_u = -i\omega^2 \frac{k_i}{k^2} u_i.$$

Условие разрешимости этой системы есть равенство нулю определителя, которое для кубического кристалла имеет вид

$$\begin{vmatrix} \omega^2 F_{lk} k_l k_k + k^2\alpha_s(\alpha k_1^2 + c_{44}k^2), & k^2\alpha_s\beta k_1 k_2, & k^2\alpha_s k_1 k_3 \\ k^2\alpha_s\beta k_1 k_2, & \omega^2 F_{lk} k_l k_k + k^2\alpha_s(\alpha k_2^2 + c_{44}k^2), & k^2\alpha_s\beta k_2 k_3 \\ \alpha_s\beta k^2 k_1 k_3, & k^2\alpha_s\beta k_2 k_3, & \omega^2 F_{lk} k_l k_k + k^2\alpha_s(\alpha k_3^2 + c_{44}k^2) \end{vmatrix} = 0, \tag{6}$$

где

$$F_{lk} = -\alpha_s \frac{\partial\lambda_{lk}}{\partial\mu_u} + \alpha_u \frac{\partial\lambda_{lk}}{\partial\mu_s}, \quad \alpha_s = s^2 \frac{\partial\rho_s}{\partial\mu_s} - \rho_s,$$

$$\alpha_u = s^2 \frac{\partial\rho_u}{\partial\mu_u} - \rho_u, \quad \alpha = c_{11} - c_{44}, \quad \beta = c_{12} + c_{44}. \tag{7}$$

Решение уравнения (6) в общем случае для волн, распространяющихся в произвольном направлении без предположения малости тех или иных входящих в него коэффициентов, затруднительно. Но когда волна распространяется по направлению, например, оси [1, 0, 0], уравнение (6) можно решить аналитически. В этом случае $k = k_1$, $k_2 = k_3 = 0$ и (6) распадается на два уравнения:

$$\omega^2 F_{11} + \alpha_s k^2 c_{11} = 0,$$
$$(\omega^2 F_{11} + \alpha_s k^2 c_{44})^2 = 0. \tag{8}$$

По виду они совпадают с обычными уравнениями для продольных и поперечных волн, однако входящие в них коэффициенты согласно (7) также зависят от ω и k. В раскрытом виде, например, первое из них имеет вид

$$s^4\left\{\frac{\partial\rho_s}{\partial\mu_u}\frac{\partial\lambda_{11}}{\partial\mu_s} - \frac{\partial\rho_s}{\partial\mu_s}\frac{\partial\lambda_{11}}{\partial\mu_u}\right\} + s^2\left\{\left(\frac{\partial\rho_s}{\partial\mu_s}\right)c_{11} + \rho_s\frac{\partial\lambda_{11}}{\partial\mu_u} - \rho_u\frac{\partial\lambda_{11}}{\partial\mu_s}\right\} -$$
$$-\rho_s c_{11} = 0, \tag{9}$$

где $s^2 = \omega^2/k^2$.

Это уравнение в одном предельном случае, когда $\frac{\partial\lambda_{11}}{\partial\mu_s} \to 0$, $\frac{\partial\lambda_{11}}{\partial\mu_u} \to 0$, дает решение с законом дисперсии:

$$\omega^2 = \rho_s\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho_s}\right)k^2, \tag{10}$$

которое представляет собой колебания плотности кристалла при неподвижных узлах решетки [1]. В другом предельном случае, когда $\rho_s \to 0$, $\frac{\partial\lambda_{11}}{\partial\mu_s} \to 0$, имеем уравнение

$$s^2 \frac{\partial\lambda_{11}}{\partial\mu_u} - c_{11} = 0,$$

решение которого

$$\omega=\sqrt{c_{11}/\frac{\partial\lambda_{11}}{\partial\mu_{u}}}k \tag{11}$$

в том случае, когда

$$\frac{\partial\lambda_{11}}{\partial\mu_{u}}=-\frac{\partial\rho}{\partial u_{11}}=\rho \tag{12}$$

совпадает с законом дисперсии продольного звука в обычном кристалле.

Аналогичный результат получается из второго уравнения (8) для поперечных волн.

2. Как известно [7], в волнах второго звука колебания испытывают температура и энтропия. Возникновение незатухающих температурных волн обусловлено наличием двух движений в сверхтекучем кристалле. Одно из них соответствует сверхтекучему движению конденсата, а другое—описывает нормальное движение узлов решетки при отличной от нуля температуре.

При достаточно низких температурах, когда вкладом фононов в термодинамические величины нельзя пренебречь, существует область частот, соответствующая второму звуку

$$1/\tau_N\gg\omega\gg1/\tau_u, \tag{13}$$

где τ_N и τ_u—времена релаксации N и u типов столкновений фононов соответственно, ω—частота второго звука. В случае неподвижных узлов уравнения гидродинамики можно вывести аналогично случаю обычного кристалла [8].

Кинетическое уравнение фононов в первом приближении в отсутствие u-процессов имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}N^{(0)}+(\mathbf{v}\nabla)N^{(0)}=\hat{J}_N N^{(1)}, \tag{14}$$

где $N^{(0)}\equiv N_0(\varepsilon+\mathbf{p}\boldsymbol{\lambda}-\varepsilon\theta)$—функция распределения фононов, которая формируется в результате одних только N-столкновений (ε—энергия, $\lambda=v_s-u$, v_s —сверхтекучая скорость, u—дрейфовая скорость в состоянии неполного термодинамического равновесия, θ—безразмерная температура, равная $\delta T/T_0$).

Линеаризуя уравнение (14), получим

$$\frac{\partial N_0}{\partial\varepsilon}\left[\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathbf{p}\frac{\partial\lambda}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial\theta}{\partial t}\right]+\frac{\partial N_0}{\partial\varepsilon}[-(\mathbf{v}\nabla)(\mathbf{p}u)-\varepsilon(\mathbf{v}\nabla)\theta]=-\hat{J}_N N^{(1)}, \tag{15}$$

из которого с помощью законов сохранения энергии и импульса получим

$$\left\langle\varepsilon\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right\rangle\frac{\partial\rho}{\partial t}-\langle\varepsilon^2\rangle\frac{\partial\theta}{\partial t}-\frac{1}{3}\langle\varepsilon\mathbf{p}\mathbf{v}\rangle\operatorname{div}u=0, \tag{16}$$

$$\langle p_i p_k\rangle\frac{\partial}{\partial t}(v_{sk}-u_k)-\langle\varepsilon\mathbf{p}\mathbf{v}\rangle\frac{\partial\theta}{\partial x_i}=0, \tag{17}$$

где

$$< \dots > = \int (\dots) \frac{\partial N_0}{\partial \varepsilon} dp.$$

К этим уравнениям нужно добавить уравнения движения сверхтекучего кристалла. Они при неподвижных узлах в случае одноконденсатного изотропного кристалла запишутся в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\rho_s v_{sk} + \int p_k N dp\right\} = 0, \tag{18}$$

$$\frac{\partial v_{si}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\mu + \int \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} N dp\right) = 0. \tag{19}$$

Уравнения (16)—(19) вместе с уравнением состояния вещества

$$\rho = \left(\frac{\partial \rho}{\partial \mu}\right)_T \mu + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)_\mu \theta \tag{20}$$

составляют замкнутую систему относительно неизвестных величин v_s, μ, θ, u и ρ. Полагая, что все они изменяются в пространстве и во времени гармоническим образом, из условия разрешимости этой системы получим дисперсионное уравнение, которое с помощью равновесных параметров среды запишется в виде

$$\frac{1}{3}\rho_s s^4 - s^2\left[\rho_s + T_0\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right) + \frac{T_0}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial \rho}\right)_\theta \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_\mu \rho_s + \frac{c^2}{3}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \mu}\right)_\theta\right] +$$

$$+ c^2\left(\frac{\partial \rho}{\partial \mu}\right)_\theta = 0, \tag{21}$$

где $s^2 = k^2c^2/\omega^2$; c—скорость обычного продольного звука.

В предельном случае $T_0 \to 0$, уравнение (21) дает две независимые волны с законами дисперсии

$$s^2 = 3 \quad \text{и} \quad s^2 = \frac{c^2}{\rho_s}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \mu}\right)_T, \tag{22}$$

соответствующие обычному второму звуку и волне плотности при неподвижных узлах.

Таким образом, при отличной от нуля температуре возникает зацепление волн температуры и плотности: волна второго звука возбуждает волну плотности при неподвижных узлах и—наоборот. Они связаны посредством величины $\alpha(T_0) = T_0\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)\left[1 + \frac{\rho_s}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial \rho}\right)\right]$, которая играет роль коэффициента теплового расширения при неподвижных узлах. В этом смысле ситуация здесь аналогична той, которая имеет место в классическом кристалле, когда, благодаря термоупругому эффекту, волны второго звука зацепляются с упругими волнами.

Приближенные корни дисперсионного уравнения (21), когда имеет место условие $\alpha/\rho_s \ll 1$, имеют вид

$$s_1^2 = 3\left|\rho_s - \frac{c^2}{3}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \mu}\right)_{T_0} - \alpha(T_0)\right|\left[\rho_s - \frac{c^2}{3}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \mu}\right)_{T_0}\right]^{-1},$$

$$s_2^2 = -\frac{c^2}{3}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\mu}\right)_T \left[\rho_s - \frac{c^2}{3}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\mu}\right)_T - \alpha(T_0)\right]\left[\rho_s - \frac{c^2}{3}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\mu}\right)_{T_0}\right]. \qquad (23)$$

Из этих формул в пределе $\alpha \to 0$ при $T_0 \to 0$ получаются выражения (22).

ЕГУ, КПИ *Поступила 15.07.1985*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Андреев А. Ф., Лифшиц И. М.** Квантовая теория дефектов в кристаллах.—ЖЭТФ, 1969, т. 56, вып. 6, с. 2057—2068.
2. **Bretz M., Dash I. G., Hinckernell D. C., Mclean E. O., Vilches O. E.** Phases of He^3 and He^4 Monolayer Films Adsorbed on Basalplane Oriented Graphite. Phys. Rev. A, 1983, v. 8, p. 1589 — 1613.
3. **Халатников И. М.** Теория сверхтекучести. М.: Наука, 1971, 318 с.
4. **Андреев А. Ф., Башкин Е. П.** Двухскоростная гидродинамика сверхтекучих растворов.—ЖЭТФ, 1975, 69, вып. I, с. 319—327.
5. **Варданян Г. А., Седракян Д. М.** О магнитной гидродинамике сверхтекучих растворов.—ЖТЭФ, 1981, 81, вып. 5, с. 1731—1737.
6. **Варданян Г. А., Папоян К. В., Седракян Д. М.** О гидродинамике сверхтекучих растворов.—ФНТ, 1984, 10, вып. 2, с. 130—135.
7. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Статистическая физика. М.: Наука, 1975, 583 с.
8. **Гуржи Р. Н.** Гидродинамические эффекты в твердых телах.—УФН, 1984, т. 94, вып. 4, с. 689—712.

Գ. Ա. ՎԱՐԴԱՆՅԱՆ, Կ. Վ. ՊԱՊՈՅԱՆ, Դ. Մ. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ

ԳԵՐՀՈՍՈՒՆ ԲՅՈՒՐԵՂԻ ՀԻԴՐՈԴԻՆԱՄԻԿԱՅԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Գերհոսուն համակարգի օրինակ կարող է հանդիսանալ հելիումի քվանտային բյուրեղը, որը առաջանում է գրաֆիտի մակերևույթին ադսորբցիայի հետևանքով։ Փորձնականորեն հայտնաբերվել է, որ միատոմական վանողական ուժերի շնորհիվ հելիումի մի ատոմին հասնում է գրաֆիտի բյուրեղական ցանցի երեք հանգույց, որը ապահովում է վականսիոնների բավարար կոնցենտրացիա գերհոսուն կոնդենսատի ստացման համար։

Վականսիոնների առկայությամբ բյուրեղական ցանցում հնարավոր է երկու տիպի գերհոսուն շարժում և հետևաբար երկու կոնդենսատ։

Ներկա աշխատանքում առաջադրված մակրոսկոպիկ շարժման հավասարումները թույլ են տալիս ուսումնասիրելու տատանումների սպեկտրը այդպիսի համակարգերում։