ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1983 Естественные науки

Физика

УДК 523.855

М. Г. АБРАМЯН

КРУПНОМАСШТАБНЫЕ ОСЦИЛЛЯЦИИ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНЫХ ДВУХОСНЫХ БАРОВ С ГАЛО

Сфероидальное гравитирующее гало обеспечивает равновесие бесстолкновительных эллипсоидов с движением частиц в плоскости вращения по эллиптическим орбитам, концентрическим и подобным граничному эллипсоиду. Исследовано поведение двухосных баров относительно крупномасштабных колебаний типа эллипсоид-эллипсоид, сохраняющих направление оси вращения. Характеристики баровидных фигур табулированы. Оценены возрасты баров различных моделей.

1. **Введение.** Известно, что многие галактики, а также отдельные элементы галактик, например, перемычки SB-спиралей, имеют форму, близкую к эллипсоидальной. Успехи в построении теории SB-галактик пока скромны особенно на фоне значительного прогресса теории нормальных спиральных галактик [1]. Одна из главных трудностей состоит в построении бесстолкновительной модели перемычки (бара), вращение которой является твердотельным. Исследованию одной возможной модели баров в виде однородного эллипсоида посвящены работы Фримана и Вокулера [1].

В работе [2] была исследована модель бара в виде однородного бесстолкновительного трехосного эллипсоида с простейшей картиной движения частиц с учетом гравитации однородного сфероидального гало. Как показано в [1], аналогичным одиночным элипсоидам соответствуют мнимые значения угловой скорости вращения.

Равновесная функция распределения для этих фигур имеет вид [2]

$$f_0(\vec{r}, \vec{v}) = \frac{\rho_0}{\pi c \omega_0} \cdot \frac{\delta\left(v_x + \frac{a\nu}{b} y\right) \delta\left(v_y - \frac{b\nu}{a} x\right)}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - \frac{v_z^2}{c^2\omega_0^2}}}, \qquad (1.1)$$

где a, b, c—полуоси вложенного эллипсоида; ν, ω_0—частоты осцилляций частиц соответственно в плоскости и перпендикулярно плоскости вращения (везде $\pi G \rho_0 = 1$),

$$\omega_0^2 = 2\gamma_0 + 2\varkappa C_*; \quad \varkappa = \rho_*/\rho_0, \qquad (1.2)$$

ρ_0 и ρ_*—однородные плотности масс эллипсоида и сфероидального гало эксцентриситета e;

$$A_*=1-\frac{1}{2}C_*=\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}(\arcsin e-e\cdot\sqrt{1-e^2}). \tag{1.3}$$

Условие равновесия трехосных эллипсоидов выражается следующей системой уравнений:

$$a[\Omega^2(1+\lambda^2)-2\alpha_0-2\varkappa A_*]+2\lambda b\Omega^2=0,$$
$$b[\Omega^2(1+\lambda^2)-2\gamma_0-2\varkappa A_*]+2\lambda a\Omega^2=0, \tag{1.4}$$

где для двухосных баров ($a=1$, $b=c$)

$$\alpha_0=2(1-\gamma_0)=\frac{c^2}{(1-c^2)^{3/2}}\left[\ln\frac{1+\sqrt{1-c^2}}{1-\sqrt{1-c^2}}-2\sqrt{1-c^2}\right]. \tag{1.5}$$

В (1.4) использовано также обозначение

$$\nu=\lambda\Omega, \tag{1.6}$$

где Ω-угловая скорость вращения бара, для которой из (1.4) в случае двухосных баров получаем

$$\Omega^2=\frac{c}{\lambda}\cdot\frac{\gamma_0-\alpha_0}{1-c^2}. \tag{1.7}$$

Из (1.4) легко получить также вторую связь между физическими параметрами бара и гало:

$$\varkappa A_*=\frac{2c\lambda+\lambda^2+1}{2\lambda(1-c^2)}(\gamma_0-\alpha_0)c-\alpha_0. \tag{1.8}$$

Следует обратить внимание на следующее свойство соотношения (1.8) — оно инвариантно относительно замене $\lambda\to 1/\lambda$ в том случае, когда угловая скорость вращения бара обратно пропорциональна λ. Это значит, что барам данной геометрии соответствуют два разных значения угловой скорости вращения.

2. **Крупномасштабные осцилляции двухосных баров.** Вопрос устойчивости бесстолкновительных вложенных баров рассмотрим по схеме исследования крупномасштабных осцилляций эллипсоидов Фримана [1].

Нестационарное уравнение Больцмана во вращающейся с угловой скоростью Ω системе отсчета для рассматриваемой системы имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t}+v_x\frac{\partial f}{\partial x}+v_y\frac{\partial f}{\partial y}+v_z\frac{\partial f}{\partial z}+\left(\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial V_*}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial v_z}+ \tag{2.1}$$
$$+\left[\Omega^2x+2v_y\Omega+\frac{\partial}{\partial x}(V+V_*)\right]\frac{\partial f}{\partial v_x}+\left[\Omega^2y-2v_x\Omega+\frac{\partial}{\partial y}(V+V_*)\right]\frac{\partial f}{\partial v_y}=0,$$

где $$V_*(x,\ y,\ z)=-\varkappa[A_*(x^2+y^2)+C_*z^2] \tag{2.2}$$

внутренний потенциал однородного сфероидального гало, возмущением которого пренебрегаем, $(V,\ y,\ z,\ t)$—возмущенный потенциал бара.

Заменяя $v_x \to v_x - \frac{\lambda\Omega}{c} y$, $v_y \to v_y + c\lambda\Omega x$ и представляя

$$V(x,\ y,\ z,\ t) = -\alpha_0 x^2 - \gamma_0 (y^2 + z^2) + \varepsilon V_1(x,\ y,\ z,\ t), \tag{2.3}$$

где ε—малый параметр теории возмущений, $|\varepsilon| \ll 1$. Учитывая условие равновесия (1.4), уравнение (2.1) для возмущенных параметров приведем к виду

$$\hat{L}f + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + \left(2 + \frac{\lambda}{c}\right)\Omega v_y \frac{\partial f}{\partial v_x} - (2 + \lambda c) v_x \frac{\partial f}{\partial v_y} =$$

$$= \frac{\partial V_1}{\partial x} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} \frac{\partial f_0}{\partial v_y} + \frac{\partial V_1}{\partial z} \frac{\partial f_0}{\partial v_z}, \tag{2.4}$$

где

$$\hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\lambda\Omega}{c} y \frac{\partial}{\partial x} + \lambda c \Omega x \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} - \omega_0^2 z \frac{\partial}{\partial v_z}. \tag{2.5}$$

Правая часть уравнения (2.4) диктует представить возмущенную функцию распределения в виде

$$f = A\delta(v_x)\delta(v_y) + \varepsilon B\delta'(v_x)\delta(v_y) + \varepsilon C\delta(v_x)\delta'(v_y), \tag{2.6}$$

где

$$A = \frac{\rho_0}{\pi c \omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - \frac{y^2 + z^2}{c^2} - \frac{v_z^2}{c^2 \omega_0^2} - \varepsilon\chi}}, \tag{2.7}$$

χ, B, C—подлежащие определению функции от x, y, z, t, v_z. Подставляя (2.6), (2.7) в (2.4) и приравнивая коэффициенты при различных комбинациях $\delta \cdot \delta$, получим дифференциальные уравнения относительно функций χ, $B' = B/A(\varepsilon = 0)$, $C' = C/A(\varepsilon = 0)$:

$$\hat{L}\chi - \frac{2\pi\omega_0 c}{\rho_0}\left(1 - x^2 - \frac{y^2 + z^2}{c^2} - \frac{v_z^2}{c^2\omega_0^2}\right)\left(\frac{\partial B'}{\partial x} + \frac{\partial C'}{\partial y}\right) -$$

$$-\left(xB' + \frac{y}{c^2} C'\right)\frac{2\pi\omega_0 c}{\rho_0} = \frac{2v_z}{c^2\omega_0^2} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial z}, \tag{2.8}$$

$$\hat{L}B' - \left(2 + \frac{\lambda}{c}\right)\Omega C' = \frac{\rho_0}{\pi\omega_0 c} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial x}, \tag{2.9}$$

$$\hat{L}C' + (2 + \lambda c)\Omega B' = \frac{\rho_0}{\pi\omega_0 c} \cdot \frac{\partial V_1}{\partial y}. \tag{2.10}$$

Эта система уравнений должна быть решена совместно с уравнением Пуассона, где, помимо изменения локальной плотности ρ_1, необходимо учитывать также изменение границы равновесного бара. Для возмущения плотности легко получить формулу [1]

$$\rho_1 = -\frac{\rho_0}{2\pi\omega_0 c}\int dv_z \frac{\partial}{\partial v_z}\left(\frac{\chi_1}{v_z}\right)\left(1 - x^2 - \frac{y^2+z^2}{c^2} - \frac{v_z^2}{c^2\omega_0^2}\right)^{-1/2}, \qquad (2.11)$$

а возмущенная граница бара будет описываться уравнением

$$1 - x^2 - \frac{y^2+z^2}{c^2} - \varepsilon\chi_0 = 0, \qquad (2.12)$$

где

$$\chi_0 = \chi(\varepsilon = 0), \qquad \chi_1 = \chi - \chi_0. \qquad (2.13)$$

Для систем с квадратичным потенциалом возмущения гравитационного потенциала V_1 могут быть представлены в виде полиномов по степеням декартовых координат с неопределенными коэффициентами. Ограничиваясь самыми крупномасштабными колебаниями бара типа эллипсоид-эллипсоид, сохраняющими направление главной оси z, можно положить [1]

$$V_1(x, y, z, t) = (\alpha_1 x^2 + \alpha_3 y^2 + \alpha_4 z^2 - 2i\alpha_2 xy)e^{i\omega t}. \qquad (2.14)$$

Подставляя (2.14) в (2.8)—(2.10) и решая их, для χ получим следующее полиномиальное решение:

$$\chi = s_0 + s_1 x^2 + 2is_{12}xy + s_2 y^2 + s_3 z^2 + is_{34} z v_z + s_4 v_z^2, \qquad (2.15)$$

где s_i, s_{in} —функции от параметров бара λ, c; Ω, ω_0, ω, а также от неопределенных параметров α_i (см.(2.24)).

Производя интегрирование в (2.11) с учетом (2.15), (2.13) для возмущения плотности бара получим

$$\rho_1 = -\rho_0 \frac{\omega_0^2 c^2}{2} \cdot s_4. \qquad (2.16)$$

Возмущенная граница бара опишется уравнением

$$x^2 + \frac{y^2+z^2}{c^2} = 1 - \varepsilon(D_1 x^2 + 2is_{12}xy + D_2 y^2 + D_3 z^2), \qquad (2.17)$$

где

$$D_1 = s_0 + s_1; \qquad D_2 = \frac{s_0}{c^2} + s_2; \quad D_3 = \frac{s_0}{c^2} + s_3. \qquad (2.18)$$

Возмущение гравитационного потенциала бара V_1 можно вычислить, написав точный потенциал однородного эллипсоида с плотностью $\rho_0 + \rho_1$ в новых границах (2.17) и вычитав из него невозмущенный потенциал. Эта процедура приводит к следующей окончательной формуле:

$$\varepsilon V_1 = \varepsilon\frac{\rho_1}{\rho_0}[\alpha_0 x^2 + \gamma_0(y^2+z^2)] + 2\delta xy(\gamma_0 - \alpha_0) + \varepsilon[\alpha_{(1)}x^2 + \beta_{(1)}y^2 + \gamma_{(1)}z^2], \qquad (2.19)$$

где

$$\alpha_{(1)} = D_1\left[2I\left(0, \frac{5}{2}, 1\right) - I\left(1, \frac{5}{2}, 1\right)\right] - c^2(D_2 + D_3)\, I\left(1, \frac{3}{2}, 2\right),$$

$$\beta_{(1)} = -D_1 I\left(1, \frac{3}{2}, 2\right) + c^2 D_2 \left[2c^2 I\left(0, \frac{1}{2}, 3\right) - I\left(1, \frac{1}{2}, 3\right)\right] - -c^2 D_3 I\left(1, \frac{1}{2}, 3\right),$$

$$\gamma_{(1)} = -D_1 I\left(1, \frac{3}{2}, 2\right) - c^2 D_2 I\left(1, \frac{1}{2}, 3\right) + c^2 D_3 \left[2c^2 I\left(0, \frac{1}{2}, 3\right) - - I\left(1, \frac{1}{2}, 3\right)\right],$$

$$\delta = i\varepsilon s_{12} \frac{c^2}{1-c^2}, \quad I(k, m, n) = \frac{c^2}{2} \int_0^\infty \frac{t^k dt}{(1+t)^m (c^2+t)^n}.$$

Сравнивая (2.19) с исходным выражением возмущений гравитационного потенциала (2.14), получим однородную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_1, a_2, a_3, a_4:

$$a_1 = \alpha_{(1)} - \omega_0^2 \alpha_0 c^2 s_4, \qquad a_3 = \beta_{(1)} - \omega_0^2 \gamma_0 c^2 s_4,$$
$$a_2 = 2s_{12}(\alpha_0 - \gamma_0)\frac{c^2}{1-c^2}, \qquad a_4 = \gamma_{(1)} - \omega_0^2 \gamma_0 c^2 s_4. \tag{2.20}$$

Искомое дисперсионное уравнение рассматриваемых возмущений получается из (2.20) приравниванием нулю определителя системы:

$$\mathrm{Det}\, \| r_{ik} \| = 0, \quad i, k = 1;\ 2;\ 3;\ 4, \tag{2.21}$$

где

$$r_{11} = s + s_0^{(1)} P(1,1) + (c^2 s_2^{(1)} - 2s_1^{(1)}) P(1, 3);$$
$$r_{12} = s_0^{(2)} P(1, 1) + (c^2 s_2^{(2)} - 2s_1^{(2)}) P(1, 3); \quad r_{21} = c\lambda\Omega^2 s_{12}^{(1)};$$
$$r_{13} = s_0^{(3)} P(1, 1) + (c^2 s_2^{(3)} - 2s_1^{(3)}) P(1, 3); \quad r_{23} = c\lambda\Omega^2 s_{12}^{(3)};$$
$$r_{14} = (2c^2 + 4c^4 - 6Kc^2)(1-c^2)^{-2}; \quad r_{22} = s + c\lambda\Omega^2 s_{12}^{(2)};$$
$$r_{31} = s_0^{(1)} P(3, 1) + s_1^{(1)} P(1, 3) + c^2 s_2^{(1)} P(3, 3); \quad r_{24} = 0;$$
$$r_{32} = s_0^{(2)} P(3, 1) + s_1^{(2)} P(1, 3) + c^2 s_2^{(2)} P(3, 3); \tag{2.22}$$
$$r_{33} = s_0^{(3)} P(3, 1) + s_1^{(3)} P(1, 3) + c^2 s_2^{(3)} P(3, 3) + s;$$
$$r_{4i} = s_0^{(i)} P(2, 1) + s_1^{(i)} P(1, 3) + c^2 s_2^{(i)} P(2, 3), \quad i = 1;\ 2;\ 3;$$
$$r_{34} = \frac{2 - 5c^2 + 3Kc^2}{2(1-c^2)^2}; \quad K = \frac{c^2}{2\sqrt{1-c^2}} \ln \frac{1+\sqrt{1-c^2}}{1-\sqrt{1-c^2}};$$
$$r_{44} = \omega^2 - 4\omega_0^2 + \frac{6 - 11c^2 + (8+5c^2)K}{2(1-c^2)^2}; \quad E(n, m) = \frac{2P(n, m)}{(1-c^2)^2}.$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$$E(1, 1) = (5 - 2c^2)c^2 - (4 - c^2)K; \quad E(1, 3) = -3c^2 + (2 + c^2)K;$$

$$
\begin{aligned}
&4E(2,1)=-2-7c^2+(8+c^2)K; \quad 4E(2,3)=2+c^2-(8+c^2)K;\\
&4E(3,1)=-6-7c^2+(8+5c^2)K; \quad 4E(3,3)=-2+c^2-(4-5c^2)K;\\
&s=(\lambda+2c)(\omega^2-4\lambda^2\Omega^2)[(\tau\Omega^2-\omega^2)^2-4\lambda^2\Omega^2\omega^2];\\
&s_0^{(1)}=4(\omega^2-4\lambda^2\Omega^2)[\Omega^2(4c\lambda^2+2c\tau-\lambda\tau)-\omega^2(\lambda+2c)];\\
&s_0^{(2)}=4(\omega^2\Omega-4\lambda^2\Omega^3)(\lambda\tau-4\lambda^2c-4\lambda c^2);\\
&s_0^{(3)}=4(\lambda-2c)(\omega^2-4\lambda^2\Omega^2)[\Omega^2(\tau-4\lambda c)-\omega^2];\\
&s_1^{(1)}=4\Omega^4(14\lambda^2\tau c+2c\lambda^4+\lambda\tau^2-4\lambda^3\tau)-4\Omega^2\omega^2(8\lambda^3+18c\lambda^2+\\
&\qquad +4c\tau+\lambda\tau)+8(\lambda+2c)\omega^4; \qquad\qquad (2.23)\\
&s_1^{(2)}=4\omega\Omega^3(4\lambda^3\tau-24c\lambda^4-24c^2\lambda^3-4c\lambda^2\tau-2c^2\lambda\tau+\tau^2c)+\\
&\qquad +4\Omega\omega^3(6c\lambda^2+10c\lambda-\lambda\tau-c\tau);\\
&s_1^{(3)}=(\lambda-2c)[4\Omega^4(4\lambda^2\tau-24c\lambda^3-2c\lambda\tau)-4\omega^2\Omega^2(4\lambda^2-10c\lambda+\tau)+4\omega^4];\\
&cs_{12}^{(1)}=2\Omega^3\omega(4\lambda^5\tau+8\lambda^4+2c\lambda\tau+8c\lambda^3-\tau^2)-2\Omega\omega^3(2\lambda^2+6c\lambda-\tau);\\
&cs_{12}^{(2)}=-4\Omega^2\lambda\tau^2(2c+\lambda)+\omega^2\Omega^2(16c\lambda\tau+4c^2\tau-16c^2\lambda^2+4\lambda^2\tau+\tau^2)+(\tau+4c)\omega^4;\\
&cs_{12}^{(3)}=4\Omega\,\omega(\lambda-2c)[\Omega^2(\tau c-4\lambda^3-4c\lambda^2)+\omega^2(\lambda-c);\\
&c^2s_2^{(1)}=4\Omega^4(10c\lambda^2\tau+24c\lambda^4-8\tau\lambda^3-\lambda\tau^2)-4\omega^2\Omega^2(4\lambda^3+18c\lambda^2-4\lambda\tau+\\
&\qquad +2c\tau)+4(\lambda+2c)\omega^4; \qquad \tau=2(2+\lambda/c+\lambda c);\\
&c^2s_2^{(2)}=4\Omega^3\omega(8\lambda^3\tau-24c\lambda^4-24c^2\lambda^3+4c\lambda^2\tau+2c\lambda\tau-c\tau^2)+4\Omega\omega^3(6c\lambda^2+\\
&\qquad +2c^2\lambda-2\lambda\tau+c\tau);\\
&c^2s_2^{(3)}=8(\lambda-2c)[\Omega^4(4\lambda^2\tau-12c\lambda^3+c\lambda\tau)-\omega^2\Omega^2(4\lambda^2+\tau-c\lambda)+\omega^4].
\end{aligned}
$$

Левая часть дисперсионного уравнения (2.21) представляет собой полином десятой степени относительно ω^2, исследование которого проводилось на ЭВМ. Задавались значения параметров c, λ, e и находились как равновесные параметры бара (ρ_*/ρ_0, Ω, ω_0), так и частоты и инкременты его крупномасштабных возмущений. Подобные расчеты показали, что вообще рассматриваемые двухосные бары неустойчивы относительно крупномасштабных возмущений типа (2.14), однако инкремент неустойчивости сильно зависит от значения параметра λ, характеризующего отношение частоты осцилляций звезд в плоскости вращения на угловую скорость вращения бара.

В таблице приведены некоторые характеристики баров со сферическим гало для трех значений параметра λ (0,1; 1; 10). Отношение плотностей масс гало—бар имеет минимум при $\lambda=1$, а угловая скорость вращения бара убывает с ростом λ. Такова и зависимость инкремента неустойчивости бара от λ; следовательно, более устойчивыми являются быстровращающиеся бары, т. е. модели с меньшими значениями λ. Действительно, бары с $\lambda=0{,}1$ за время заметного роста возмущений совершают 10—25 оборотов, в то время как бары с $\lambda=10$ совершают 0.4—3 оборота. Правда, последний результат отчасти отражает тот факт, что

Таблица

Характеристики двухосных баров со сферическим гало ($e=0$)

c/a	ρ_*/ρ_0	$\frac{\Omega}{\sqrt{\pi G\rho_0}}$	$\frac{\mathrm{Im}\,\omega}{\Omega}$	λ
0,1	0,6720	0,9740	0,0975	
0,2	1,1983	1,3170	0,0695	
0,3	1,6024	1,5341	0,0576	
0,4	1,9090	1,6823	0,0512	
0,5	2,1394	1,7874	0,0467	0,1
0,6	2,3100	1,8628	0,0442	
0,7	2,4360	1,9168	0,0420	
0,8	2,5260	1,9552	0,0420	
0,9	2,5890	1,9799	0,0426	
0,1	0,0957	0,3080	0,6624	
0,2	0,1447	0,4159	0,1918	
0,3	0,1728	0,4848	0,1437	
0,4	0,1890	0,5320	0,1219	
0,5	0,1980	0,5648	0,1199	1
0,6	0,2025	0,5891	0,1154	
0,7	0,2040	0,6058	0,1131	
0,8	0,2040	0,6181	0,1123	
0,9	0,2025	0,6269	0,1105	
0,1	0,6720	0,0974	2,3989	
0,2	1,1983	0,1317	1,4394	
0,3	1,6024	0,1534	0,9885	
0,4	1,9090	0,1682	0,7470	
0,5	2,1394	0,1787	0,2915	10
0,6	2,3100	0,1863	0,3092	
0,7	2,4360	0,1917	0,3263	
0,8	2,5260	0,1955	0,3955	
0,9	2,5890	0,1980	0,4887	

бары с $\lambda=10$ вращаются медленнее (в 10 раз! (см. таблицу)), чем бары с $\lambda=0.1$, но сравнение абсолютных значений инкрементов показывает, что чем меньше значение параметра λ, тем больше характерное время роста амплитуды возмущений. Зависимость инкремента неустойчивости бара от эксцентриситета гало (e) слабая, так что описанная картина остается почти неизменной и для других значений e.

Кафедра общей физики

Поступила 2.06.1982

ЛИТЕРАТУРА

1. **Поляченко В. Л., Фридман А. М.** Равновесие и устойчивость гравитирующих систем. Наука, М.: 1976.
2. **Абрамян М. Г.** Вложенные бесстолкновительные эллипсоиды. Уч. записки ЕГУ, 1978, № 1 (137), с. 64.

Մ. Գ. ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ

ՈՉ ԲԱԽՈՒՄԱՅԻՆ ԵՐԿԱՌԱՆՑՔ ԷԼԻՊՍՈԻԴՆԵՐԻ ՄԵԾ ՄԱՍՇՏԱԲԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ ՀԱԼՈՅԻ ՀԱՇՎԱՌՄԱՄԲ

Ամփոփում

Սֆերոիդալ գրավիտացվող հալոյի առկայությունը ապահովում է ներդրված համասեռ ոչ-բախումային էլիպսոիդի հավասարակշռությունը, որում մասնիկների շարժումը կատարվում է էլիպտիկ համակենտրոն ուղեծրերով։ Ուսումնասիրված է ներդրված էլիպսոիդների կայունությունը պտտման առանցքը անփոփոխ պահող «էլիպսոիդ-էլիպսոիդ» տիպի մեծ մասշտաբի տատանումների նկատմամբ։ Բնութագրական պարամետրերը հաշված են և բերված աղյուսակի տեսքով։ Գնահատված են տարբեր մոդելների կյանքի տևողությունները։