ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1982 Естественные науки

Механика

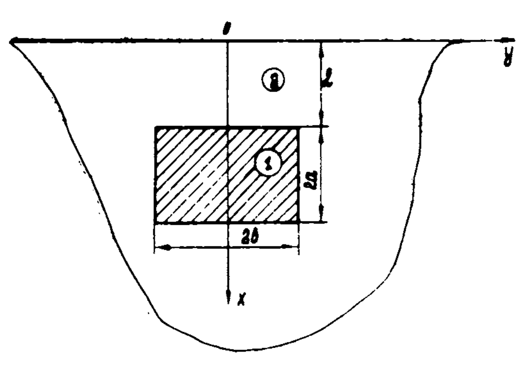
УДК 539.3

Ю. М. КОЛЯНО, К. В. ВИШНЕВСКИЙ

О РЕШЕНИИ СТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ПЛАСТИН ДВУМЕРНОЙ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ СТРУКТУРЫ

Предлагается основанный на применении аппарата обобщенных функций способ определения температурных напряжений в кусочно-однородных пластинах с прямоугольным инородным включением. Для разделения уравнений равновесия статической задачи термоупругости в перемещениях, содержащих значения контактных напряжений, вводятся две разрешающие функции и последовательно решаются две краевые задачи для систем двух уравнений типа Пуассона. Решение поставленной задачи с помощью конечного и бесконечного интегральных преобразований Фурье сводится к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов.

Рассмотрим свободную от внешней нагрузки полубесконечную пластину с прямоугольным включением (см. рисунок) при заданной посто-



янной температуре t_0. Пусть материал включения отличается от основного материала модулем упругости E и температурным коэффициентом линейного расширения α_t, что справедливо для металлических материалов [1]. Физико-механические характеристики такой пластинки представим в виде

$$p(x,\ y)=p_2+(p_1-p_2)N(x)N(y), \qquad (1)$$

где

$$N(x)=S_-(x-d)-S_+(x-c),\quad N(y)=S_-(y+b)-S_+(y-b),$$

$$S_\pm(\zeta)=\begin{cases}1 & ,\ \zeta>0\\ (1\mp 1)/2, & \zeta=0,\\ 0 & ,\ \zeta<0\end{cases}\quad c=d+2a,$$

индексами «1» и «2» снабжены физико-механические характеристики включения и основного материала.

Подставив (1) в известные [2] уравнения термоупругости неоднородных пластин в перемещениях, использовав соотношения Дюгамеля-Неймана [3] и конструкцию умножения обобщенных функций [4], получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\alpha^-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\alpha^+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=4\alpha N(y)[\sigma_{xx}\delta_-(x-d)-$$
$$-\sigma_{xx}\delta_+(x-c)]+\beta N(y)[\delta_-(x-d)-\delta_+(x-c)]+4\alpha N(x)\times$$
$$\times[\sigma_{xy}\delta_-(y+b)-\sigma_{xy}\delta_+(y-b)],\quad (x,\ u,\ d,\ c\ \rightleftarrows\ y,\ v,\ -b,\ b),\tag{2}$$

где

$$\alpha=\alpha^-\alpha^+\gamma,\quad \alpha^\pm=(1\pm\nu)/2,\quad \beta=\alpha^+t_0(\alpha_{t1}-\alpha_{t2}),$$

$$\gamma=(1-K_E)/E_2,\quad K_E=E_1/E_2,\quad \delta_\pm(\zeta)=\frac{d}{d\zeta}S_\pm(\zeta).$$

Принимая во внимание симметрию рассматриваемой системы относительно оси ox и представляя фигурирующие в (2) компоненты тензора напряжений на поверхностях контакта рядами Фурье [5]

$$\sigma_{xx}|_{x=k}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n A_n^{(k)}\cos\lambda_n y,\quad \sigma_{xy}|_{x=k}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n^{(k)}\sin\lambda_n y,$$

$$\sigma_{yy}|_{y=b}=-\sigma_{yy}|_{y=-b}=\sum_{n=0}^{\infty}[\varepsilon_n C_n\cos\varkappa_n x+D_n\sin\varkappa_n x],\tag{3}$$

$$\sigma_{xy}|_{y=b}=-\sigma_{xy}|_{y=-b}=\sum_{n=0}^{\infty}[\varepsilon_n F_n\cos\varkappa_n x+H_n\sin\varkappa_n x],$$

приходим к системе дифференциальных уравнений, которая после применения к ней интегрального преобразования Фурье по координате y запишется в виде

$$\frac{d^2\bar u}{dx^2}+\eta^2\alpha^-\bar u-i\eta\alpha^+\frac{d\bar v}{dx}=\Phi^{(d)}\delta_-(x-d)-\Phi^{(c)}\delta_+(x-c)+$$

$$+N(x)\sum_{n=0}^{\infty}(\varepsilon_n\chi_n^{(F)}\cos\varkappa_n x+\chi_n^{(H)}\sin\varkappa_n x),$$

$$\alpha^-\frac{d^2\bar v}{dx^2}+\eta^2\alpha^-\bar v-i\eta\alpha^+\frac{d\bar u}{dx}=\Psi^{(d)}\delta_-(x-d)-\Psi^{(c)}\delta_+(x-c)+$$

$$+N(x)\left[\chi+\sum_{n=0}^{\infty}(\varepsilon_n\chi_n^{(C)}\cos\varkappa_n x+\chi_n^{(D)}\sin\varkappa_n x)\right], \tag{4}$$

где

$$\bar{u}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u\exp(i\eta y)dy;\quad k=d,\ c;\quad \lambda_n=n\pi/b,$$

$$\varkappa_n=n\pi/a;\quad \varepsilon_n=\begin{cases}1/2, & n=0\\ 1, & n>0\end{cases};\quad \Phi^{(k)}=\frac{4\alpha}{\sqrt{2\pi}}\left[\left(A_0^{(k)}+\frac{\beta}{\alpha}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\mathrm{Sic}(\eta b)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n^{(k)}\bar{\varphi}_n^{+}\right];\quad \Psi^{(k)}=\frac{4i\alpha}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=1}^{\infty}B_n^{(k)}\bar{\varphi}_n^{-};$$

$$\chi=-\frac{4\alpha}{\sqrt{2\pi}}\left(C_0\cos\eta b+\frac{4i\beta}{\alpha}\sin\eta b\right);\quad \chi^{(L)}=-\frac{8\alpha}{\sqrt{2\pi}}\cos\eta b L_n;$$

$$L=C,\ D,\ F,\ H;\quad \bar{\varphi}_n^{\pm}=\mathrm{Sic}[b(\eta-\lambda_n)]\pm\mathrm{Sic}[b(\eta+\lambda_n)];$$

$$\mathrm{Sic}(\zeta)=\zeta^{-1}\sin\zeta;\quad \mathrm{Coc}(\zeta)=\zeta^{-1}\cos\zeta.$$

Для разделения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2), (3) введем в рассмотрение функции

$$e=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \Omega=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{5}$$

Тогда для определения функций e и Ω вместо (2), (3) получим систему двух независимых уравнений типа Пуассона, которые связаны между собой только через граничные условия. В пространстве изображений по Фурье решение этой задачи можно представить в следующем виде:

$$\bar{e}(x)=\frac{2\alpha}{\sqrt{2\pi}}\left\{\bar{\psi}^{(0)}(x)+(1-2\nu)\bar{\psi}^{(0)}(0)\exp(-|\eta|x)+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n^{(d)}\bar{\psi}_n^{[1d]}(x)-\right.$$

$$-A_n^{(c)}\bar{\psi}_n^{[1c]}(x)+B_n^{(d)}\bar{\psi}_n^{[2d]}(x)-B_n^{(c)}\bar{\psi}_n^{[2c]}(x)+C_n\bar{\psi}_n^{[3]}(x)+ \tag{6}$$

$$\left.+D_n\bar{\psi}_n^{[4]}(x)+F_n\bar{\psi}_n^{[5]}(x)+H_n\bar{\psi}_n^{[6]}(x)]\right\},\quad \bar{e},\ \bar{\psi}\rightleftarrows\bar{\Omega},\ \bar{\omega},$$

где

$$\bar{\psi}^{(0)}(x)=\bar{\psi}(x-d)-\bar{\psi}(x-c)+2N(x)\left(C_0 i\mathrm{Coc}(\eta b)+\right.$$

$$\left.+\frac{4\beta}{\alpha}\mathrm{Sic}(\eta b)\right),\quad \bar{\psi}(x-k)=\left\{\left[\left(A_0^{(k)}+\frac{5\beta}{\alpha}\right)\mathrm{Sic}(\eta b)-C_0 i\mathrm{Coc}(\eta b)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\mu\,\mathrm{sign}_{-}(\mu(x-k))+2F_0 i\mathrm{Coc}(\eta b)\right\}\exp(-|\eta|\,|x-k|);$$

$$\mu=\begin{cases}+1, & k=d\\ -1, & k=c\end{cases};\quad \bar{\psi}_n^{[jk]}(x)=\bar{\psi}_n^{(j)}(x-k)+(1-2\nu)(\bar{\psi}_n^{(j)}(x+k),\quad j=1,2;$$

$$\bar{\psi}_n^{[j]}(x)=\bar{\psi}_n^{(j)}(x^-)+(1-2\nu)\bar{\psi}_n^{(j)}(x^+),\quad j=\overline{3,6};\quad \bar{e},\ \bar{\psi}^{[\cdot]}\rightleftarrows\bar{\Omega},\quad \bar{\omega}^{[\cdot]};$$

$$\bar{\psi}_n^{(1)}(x\pm k)=\bar{\varphi}_n^{+}\mu\,\mathrm{sign}_-(\mu(x\pm k))\exp(-|\eta||x\pm k|);$$

$$\bar{\psi}_n^{(2)}(x\pm k)=i\bar{\varphi}_n^{-}\exp(-|\eta||x\pm k|);\quad \bar{\psi}_n^{(j)}(x^+)=-2\Big[i\eta\cos\eta b\times$$

$$\times\bar{\varphi}(1,0/x^{\pm})\sin\left(\frac{\pi}{2}(j-4)+\varkappa_n d\right)+\cos\eta b\bar{\varphi}(0,\ 0/x^{\pm})\sin\left(\frac{\pi}{2}(j-4)+\right.$$

$$\left.+\varkappa_n d\right)\Big]+4N(x)i\eta\cos\eta b\cos\left(\frac{\pi}{2}(j-3)-\varkappa_n x\right),\quad j=3,\ 4;$$

$$\bar{\psi}_n^{(j)}(x^{\pm})=2\varkappa_n\Big[\cos\eta b\bar{\varphi}(1,0/x^{\pm})\cos\left(\frac{\pi}{2}(j-6)+\varkappa_n d\right)-i\mathrm{Coc}(\eta b)\times$$

$$\times\bar{\varphi}(0,\ 0/x^{\pm})\sin\left(\frac{\pi}{2}(j-6)+\varkappa_n d\right)+4\varkappa_n N(x)\cos\eta b\sin\left(\frac{\pi}{2}(j-6)-\right.$$

$$\left.-\varkappa_n x\right)+[4i\mathrm{Coc}(\eta b)(\eta^2+\varkappa_n^2)\bar{\varphi}(0,\ 0/x^{+})]S_+(6-j),\quad j=5,6;$$

$$\alpha^-\bar{\omega}^{(3)}(x)=\frac{1}{|\eta|}\frac{d}{dx}[\bar{\psi}(x-d)-\bar{\psi}(x-c)]+\frac{4i}{\alpha^-}N(x)F_0\mathrm{Coc}(\eta b);$$

$$\alpha^-\bar{\omega}_n^{(j)}(x\pm k)=\frac{1}{|\eta|}\frac{d}{dx}\bar{\varphi}_n^{(j)}(x\pm k),\quad j=1,\ 2;\quad \alpha^-\bar{\omega}_n^{(j)}(x\pm)=$$

$$=2\varkappa_n\Big[\bar{\varphi}(1,\ 0/x^{\pm})\cos\eta b\sin\left(\frac{\pi}{2}(3-j)+\varkappa_n d\right)-\bar{\varphi}(0,\ 0/x^{\pm})\times$$

$$\times\varkappa_n i\mathrm{Coc}(\eta b)\cos\left(\frac{\pi}{2}(3-j)+\varkappa_n d\right)\Big]-2\varkappa_n N(x)\cos\eta b(\eta^2+\varkappa_n^2)^{-1}\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\pi}{2}(4-j)+\varkappa_n x\right)+i\mathrm{Coc}(\eta b)(\eta^2+\varkappa_n^2)\bar{\varphi}(0,\ 0/x^{\pm})S_+(4-j),\quad j=3,4;$$

$$\alpha^-\bar{\omega}_n^{(j)}(x^{\pm})=2\Big[\bar{\varphi}(1,\ 0/x^{\pm})i\eta\cos\eta b\sin\left(\frac{\pi}{2}(6-j)+\varkappa_n d\right)+$$

$$+\varkappa_n\bar{\varphi}(0,\ 0/x^{\pm})\cos\eta b\cos\left(\frac{\pi}{2}(6-j)+\varkappa_n d\right)+N(x)(\eta^2+\varkappa_n^2)^{-1}\times$$

$$\times i\eta\cos\eta b\sin\left(\frac{\pi}{2}(6-j)+\varkappa_n x\right)\Big],\quad j=5,\ 6;\quad \bar{\varphi}(\alpha,\ \beta/x^{\pm})=(\eta^2+\varkappa_n^2)^{-1}\times$$

$$\times\{[\mathrm{sign}_-(x\pm d)]^\alpha[|x\pm d|]^\beta\exp(-|\eta||x\pm d|)-[\mathrm{sign}_\pm(x\pm c)]^\alpha\times$$

$$\times[|x\pm c|]^\beta\exp(-|\eta||x\pm c|)\};\quad \mathrm{sign}_\pm(\zeta)=2S_\pm(\zeta)-1.$$

По известным функциям $\bar{e}$ и $\bar{\Omega}$ и нулевым граничным условиям не представляет затруднений определить компоненты тензора деформации

$$\left\{\begin{aligned} &\bar{\varepsilon}_{yy}(x)=\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}\bar{e}(0)-\bar{\varepsilon}_{yyr}(0)\right]\exp(-|\eta|x)+\bar{\varepsilon}_{yyr}(x),\\ &\bar{\varepsilon}_{xx}(x)=\bar{e}(x)-\bar{\varepsilon}_{yy}(x),\\ &\bar{\varepsilon}_{xy}(x)=\frac{1}{2}\bar{\Omega}(x)+\frac{i}{\eta}\frac{d\bar{\varepsilon}_{yy}}{dx}-\frac{1}{2}\bar{\Omega}(0)-\frac{i}{\eta}\left.\frac{d\bar{\varepsilon}_{yy}}{dx}\right|_{x=0}. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Здесь $\bar{\varepsilon}_{yyr}$ —частное решение соответствующего обыкновенного дифференциального уравнения для $\bar{\varepsilon}_{yy}$, получаемого из соотношений (5). Структура $\bar{\varepsilon}_{yyr}$ аналогична выражениям (6) с заменой соответственно $\bar{e}$, $\bar{\psi}\rightleftarrows\bar{\varepsilon}_{yyr}$, $\bar{r}$, где

$$\bar{r}^{(0)}(x)=\bar{r}(x-d)-\bar{r}(x-c)-(1-2\nu)\,2^{-1}(1+x)\exp(-|\eta|x)[\,|\eta|\bar{\psi}^{(0)}(0)+$$

$$+\frac{i\eta}{\alpha^-}\bar{\omega}^{(0)}(0)]+\left[C_0 i\,\mathrm{Coc}(\eta b)-\frac{4\beta}{\alpha}\mathrm{Sic}\,(\eta b)\right][\bar{\varphi}(1,\ 0/x^-)-2N(x)];$$

$$\bar{r}(x-k)=-\frac{\alpha^+}{|\eta|\alpha^-}\left[\left(A_0^{(k)}+\frac{5\beta}{\alpha}\right)\eta\sin\eta b-i\eta\cos\eta b\,C_0\right](x-k)\times$$

$$\times\exp(-|\eta||x-k|)+\left(1-\frac{|\eta|}{\alpha^-}\right)i\,\mathrm{Coc}(\eta b)F_0+|\eta||x-k|\exp(-|\eta||x-|);k$$

$$\bar{r}_n^{(1k)}(x)=-\frac{\alpha^+}{\alpha^-}\,(x-k)\exp(-|\eta||x-k|)\eta\bar{\varphi}_n^+-(1-2\nu)\,2^{-1}(1+x)\times$$

$$\times\exp(-|\eta|\,|x-k|)\left[\,|\eta|\,\bar{\psi}_n^{(1)}(0-k)+\frac{i\eta}{\alpha^-}\bar{\omega}_n^{(1)}(0-k)\right];\quad \bar{r}_n^{(2k)}(x)=$$

$$=\left(1-\frac{|\eta|}{\alpha^-}\right)i\bar{\varphi}_n^-(1+|\eta||x-k)\exp(-|\eta||x-k|)-(1-2\nu)\,2^{-1}(1+x)\times$$

$$\times\exp(-|\eta||x-k|)\left[|\eta|\bar{\psi}_n^{(2)}(0-k)+\frac{i\eta}{\alpha^-}\bar{\omega}_n^{(2)}(0-k)\right];\quad \bar{r}_n^{(j)}(x)=$$

$$=2\frac{\alpha^+}{\alpha^-}\left[\frac{2}{\nu|\eta|}(\eta^2+\varkappa_n^2)S_+(4-j)+\left(1-\frac{1}{\nu}\right)(\eta^2+\varkappa_n^2)+\varkappa_n^2\right]i\eta\cos\eta b\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\pi}{2}(4-j)-\varkappa_n d\right)\bar{\varphi}(1,1/x^-)+\cos\eta b\left(1+\frac{i|\eta|}{\eta\alpha^-}\right)\varkappa_n\cos\left(\frac{\pi}{2}(4-j)-\right.$$

$$\left.-\varkappa_n d\right)[\bar{\varphi}(0,\ 0/x^-)+|\eta|\bar{\varphi}(0,\ 1/x^-)]-(1-2\nu)2^{-1}(1+x)[|\eta|\bar{\psi}_n^{(j)}(0^-)+$$

$$+\frac{i\eta}{\alpha^-}\bar{\omega}_n^{(j)}(0^-)]\exp(-|\eta|x)+\left(i\eta-\frac{i}{\eta}\frac{x_n}{\alpha^-}\right)\left[\bar{K}_n(j-3/x)-2N(x)\times\right.$$

$$\left.\times\cos\left(\frac{\pi}{2}(j-3)+x_nx\right)\right],\quad j=3,\ 4;\quad \bar{r}_n^{(j)}(x)=2\frac{\alpha^+}{\alpha^-}x_n|\eta|\cos\eta b\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\pi}{2}(j-5)+x_nd\right)\bar{\varphi}(1,\ 1/x^-)+i\operatorname{Coc}(\eta b)\cos\left(\frac{\pi}{2}(j-5)-x_nd\right)\times$$

$$\times(\eta^2+x_n^2)[\bar{\varphi}(0,\ 0/x^-)+|\eta|\bar{\varphi}(0,\ 1/x^-)-(1-2\nu)2^{-1}(|\eta|\bar{\psi}_n^{(j)}(0^-)+$$

$$+\frac{i\eta}{\alpha^-}\bar{\omega}_n^{(j)}(0^-)\Big](1+x)\exp(-|\eta|x)+(-1)^{6-j}\left(x_n+\frac{1}{\alpha^-}\right)\left[\bar{K}_n(6-j/x)-\right.$$

$$\left.-2N(x)\cos\left(\frac{\pi}{2}(6-j)+x_nx\right)\right];\quad \bar{K}_n(m/x)=2\eta^2\cos\eta b\times$$

$$\times\left[\cos\left(x_nd-\frac{m\pi}{2}\right)\bar{\varphi}(1,\ 0,\ x^-)+\frac{x_n}{|\eta|}\sin\left(x_nd-\frac{m\pi}{2}\right)\bar{\varphi}(0,\ 0/x^-)\right].$$

Отметим, что предлагаемый способ разделения уравнений равновесия неоднородного упругого тела в перемещениях выгодно отличается от традиционных [3] (Папковича-Нейбера и т. п. и путем сведения к бигармоническому уравнению для компонент вектора перемещений) тем, что не содержит в себе какой-либо переопределенности.

Возвратившись в (7) от трансформантов к оригиналам по Фурье, согласно закону Дюгамеля-Неймана [3] получим искомые температурные напряжения

$$\sigma_{xx}=\pi^{-1}E(1-\nu)\gamma\Big\{U_0^{(0)}+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n^{(d)}U_n^{(1d)}-A_n^{(c)}U_n^{(1c)}+B_n^{(d)}U_n^{(2d)}-$$

$$-B_n^{(c)}U_n^{(2c)}+C_nU_n^{(3)}+D_nU_n^{(4)}+F_nU_n^{(5)}+H_nU_n^{(6)}]\Big\};\qquad (8)$$

$$\sigma_{xx},\ U\rightleftarrows\sigma_{yy},\ V\rightleftarrows\sigma_{xy},\ W;$$

где

$$U_0^{(0)}(x,\ y)=\frac{\pi\alpha_t t_0}{\gamma(1-\nu)E}+\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}(\bar{\psi}^{(0)}(x)-\bar{\psi}^{(0)}(0)\exp(-|\eta|x)+\right.$$

$$\left.+\bar{r}^{(0)}(0)\exp(-|\eta|x)-\bar{r}^{(0)}(x)\right]\exp(-i\eta y)d\eta;$$

$$U_n^{(jk)}(x,\ y)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}(\bar{\psi}_n^{(jk)}(x)-\bar{\psi}_n^{(jk)}(0)\exp(-|\eta|x))+\right.$$

$$+\bar{r}_n^{(jk)}(0)\exp(-|\eta|x)-\bar{r}_n^{(jk)}(x)\Big]\exp(-i\eta y)d\eta,\quad j=1,\ 2;$$

$$U_n^{(j)}(x,\ y)=\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\frac{1-\nu}{1-2\nu}(\bar{\psi}_n^{[j]}(x)-\bar{\psi}_n^{[j]}(0)\exp(-|\eta|x))+$$

$$+\bar{r}_n^{(j)}(0)\exp(-|\eta|x)-\bar{r}_n^{(j)}(x)\Big]\exp(-i\eta y)d\eta,\quad j=\overline{3,\ 6};$$

$$V_0^{(0)}(x,\ y)=-\frac{\pi\alpha_t t_0}{\gamma(1-\nu)E}+\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\frac{\nu}{1-2\nu}\bar{\psi}^{(0)}(x)+\frac{\nu(3-4\nu)}{1-2\nu}\bar{\psi}^{(0)}(0)\times$$

$$\times\exp(-|\eta|x)-\bar{r}^{(0)}(0)\exp(-|\eta|x)+\bar{r}^{(0)}(x)\Big]\exp(-i\eta y)d\eta;$$

$$V_n^{(jk)}(x,\ y)=\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\frac{\nu}{1-2\nu}\bar{\psi}_n^{[jk]}(x)+\Big(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\bar{\psi}_n^{[jk]}(0)-\bar{r}_n^{[jk]}(0)\Big)\times$$

$$\times\exp(-|\eta|x)+\bar{r}_n^{(jk)}(x)\Big]\exp(-i\eta y)d\eta,\quad j=1,\ 2;$$

$$V_n^{(j)}(x,\ y)=\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\bar{\psi}_n^{[j]}(x)\frac{\nu}{1-2\nu}+\Big(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\bar{\psi}_n^{[j]}(0)-\bar{r}_n^{(j)}(0)\Big)\exp(-|\eta|x)+$$

$$+\bar{r}_n^{(j)}(x)\Big]\exp(-i\eta y)d\eta,\quad j=\overline{3,\ 6};\quad W_0^{(0)}(x,\ y)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\frac{1}{2}\Big[\bar{\omega}^{(0)}(x)-\bar{\omega}^{(0)}(0)(2(1-\nu)+(1-2\nu)\exp(-|\eta|\,x))\Big]+$$

$$+(1-\exp(-|\eta|x))\frac{i\eta}{|\eta|}\Big[2\frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu}\bar{\psi}^{(0)}(0)-\bar{r}^{(0)}(0)\Big]+\frac{i}{\eta}\Big(\frac{d\bar{r}^{(0)}}{dx}-$$

$$-\frac{d\bar{r}^{(0)}}{dx}\Big|_{x=0}\Big)\Big\}\exp(-i\eta y)d\eta;\quad W_n^{(jk)}(x,\ y)=\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\frac{1}{2}\Big[\bar{\omega}_n^{[jk]}(x)-$$

$$-\bar{\omega}_n^{[jk]}(0)\Big]+(1-\exp(-|\eta|x))\frac{i\eta}{|\eta|}\Big(2\frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu}\bar{\psi}_n^{[jk]}(0)-\bar{r}_n^{[jk]}(0)\Big)+$$

$$+\frac{i}{\eta}\Big(\frac{d\bar{r}_n^{(jk)}}{dx}-\frac{d\bar{r}_n^{(jk)}}{dx}\Big|_{x=0}\Big)\Big\}\exp(-i\eta y)d\eta,\quad j=1,\ 2;\quad W_n^{(j)}(x,\ y)=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}[\tilde{\omega}_n^{(j)}(x)-\tilde{\omega}_n^{(j)}(0)]+(1-\exp(-|\eta|x))\frac{i\eta}{|\eta|}\left(2\frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu}\tilde{\psi}_n^{(j)}(0)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\tilde{r}_n^{(j)}(0)\right)+\frac{1}{\eta}\left(\frac{d\tilde{r}_n^{(j)}}{dx}-\frac{d\tilde{r}_n^{(j)}}{dx}\bigg|_{x=0}\right)\right\}\exp(-i\eta y)d\eta,\quad j=\overline{3,6}.$$

Подставив соотношения (8) в разложения (3), на основании свойства ортонормированности рядов Фурье [5] получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов $A_n^{(d)}$, $A_n^{(c)}$, $B_n^{(d)}$, $B_n^{(c)}$, C_n, D_n, F_n, H_n:

$$\left\{\begin{aligned}
A_m^{(d)}&=\hat{U}_{om}^{(0)}(d)+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n^{(d)}\hat{U}_{nm}^{(1d)}(d)-A_n^{(c)}\hat{U}_{nm}^{(1c)}(d)+B_n^{(d)}\hat{U}_{nm}^{(2d)}(d)-\\
&-B_n^{(c)}\hat{U}_{nm}^{(2c)}(d)+C_n\hat{U}_{nm}^{(3)}(d)+D_n\hat{U}_{nm}^{(4)}(d)+F_n\hat{U}_{nm}^{(5)}(d)+H_n\hat{U}_{nm}^{(6)}(d)],\\
A_m^{(c)}&=\hat{U}_{om}^{(0)}(c)+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n^{(d)}\hat{U}_{nm}^{(1d)}(c)-A_n^{(c)}\hat{U}_{nm}^{(1c)}(c)+B_n^{(d)}\hat{U}_{nm}^{(2d)}(c)-\\
&-B_n^{(c)}\hat{U}_{nm}^{(2c)}(c)+C_n\hat{U}_{nm}^{(3)}(c)+D_n\hat{U}_{nm}^{(4)}(c)+F_n\hat{U}_{nm}^{(5)}(c)+H_n\hat{U}_{nm}^{(6)}(c)],\\
B_m^{(d)}&=\hat{W}_{om}^{(0)}(d)+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n^{(d)}\hat{W}_{nm}^{(1d)}(d)-A_n^{(c)}\hat{W}_{nm}^{(1c)}(d)+B_n^{(d)}\hat{W}_{nm}^{(2d)}(d)-\\
&-B_n^{(c)}\hat{W}_{nm}^{(2c)}(d)+C_n\hat{W}_{nm}^{(3)}(d)+D_n\hat{W}_{nm}^{(4)}(d)+F_n\hat{W}_{nm}^{(5)}(d)+H_nW_{nm}^{(6)}(d)],\\
B_m^{(c)}&=\hat{W}_{om}^{(0)}(c)+\sum_{n+1}^{\infty}[A_n^{(d)}\hat{W}_{nm}^{(1d)}(c)-A_n^{(c)}\hat{W}_{nm}^{(1c)}(c)+B_n^{(d)}\hat{W}_{nm}^{(2d)}(c)-\\
&-B_n^{(c)}\hat{W}_{nm}^{(2c)}(c)+C_n\hat{W}_{nm}^{(3)}(c)+D_n\hat{W}_{nm}^{(4)}(c)+F_n\hat{W}_{nm}^{(5)}(c)+H_n\hat{W}_{nm}^{(6)}(c)],\\
C_m&=\overset{*}{V}{}_{om}^{(0)}+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n^{(d)}\overset{*}{V}{}_{nm}^{(1d)}-A_n^{(c)}\overset{*}{V}{}_{nm}^{(1c)}+B_n^{(d)}\overset{*}{V}{}_{nm}^{(2d)}-B_n^{(c)}\overset{*}{V}{}_{nm}^{(2c)}+\\
&+C_n\overset{*}{V}{}_{nm}^{(3)}+D_n\overset{*}{V}{}_{nm}^{(4)}+F_n\overset{*}{V}{}_{nm}^{(5)}+H_n\overset{*}{V}{}_{nm}^{(6)}],\\
D_m&=\mathring{V}_{om}^{(0)}+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n^{(d)}\mathring{V}_{nm}^{(1d)}-A_n^{(c)}\mathring{V}_{nm}^{(1c)}+B_n^{(d)}\mathring{V}_{nm}^{(2b)}-B_n^{(c)}\mathring{V}_{nm}^{(2c)}+\\
&+C_n\mathring{V}_{nm}^{(3)}+D_n\mathring{V}_{nm}^{(4)}+F_n\mathring{V}_{nm}^{(5)}+H_n\mathring{V}_{nm}^{(6)}],\\
F_m&=\overset{*}{W}{}_{om}^{(0)}+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n^{(d)}\overset{*}{W}{}_{nm}^{(1d)}-A_n^{(c)}\overset{*}{W}{}_{nm}^{(1c)}+B_n^{(d)}\overset{*}{W}{}_{nm}^{(2d)}-B_n^{(c)}\overset{*}{W}{}_{nm}^{(2c)}+\\
&+C_n\overset{*}{W}{}_{nm}^{(3)}+D_n\overset{*}{W}{}_{nm}^{(4)}+F_n\overset{*}{W}{}_{nm}^{(5)}+H_n\overset{*}{W}{}_{nm}^{(6)}],\\
H_m&=\mathring{W}_{om}^{(0)}+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n^{(d)}\mathring{W}_{nm}^{(1d)}-A_n^{(c)}\mathring{W}_{nm}^{(1c)}+B_n^{(d)}\mathring{W}_{nm}^{(2d)}-B_n^{(c)}\mathring{W}_{nm}^{(2c)}+\\
&+C_n\mathring{W}_{nm}^{(3)}+D_n\mathring{W}_{nm}^{(4)}+F_n\mathring{W}_{nm}^{(5)}+H_n\mathring{W}_{nm}^{(6)}],
\end{aligned}\right.$$

где

$$\hat{U}^{(\zeta)}_{nm}(x)=\frac{1}{b}\int\limits_{-b}^{b}U^{(\zeta)}_{n}(x,\ y)\cos\lambda_m y dy;\quad \hat{W}^{(\zeta)}_{nm}(x)=$$

$$=\frac{1}{b}\int\limits_{-b}^{b}W^{(\zeta)}_{n}(x,\ y)\ \sin\lambda_m y dy;\quad \overset{*}{V}{}^{(\zeta)}_{nm}=\frac{1}{a}\int\limits_{d}^{c}V^{(\zeta)}_{n}(x,\ b)\times$$

$$\times\cos\varkappa_m x dx;\quad \overset{\circ}{V}{}^{(\zeta)}_{nm}=\frac{1}{a}\int\limits_{d}^{c}V^{(\zeta)}_{n}(x,\ b)\sin\varkappa_m x dx;$$

$$\overset{\circ}{W}{}^{(\zeta)}_{nm}=\frac{1}{a}\int\limits_{d}^{c}W^{(\zeta)}_{n}(x,\ b)\sin\varkappa_m x dx;\quad \overset{*}{W}{}^{(\zeta)}_{nm}=\frac{1}{a}\int\limits_{d}^{c}W^{(\zeta)}_{n}(x,\ b)\times$$

$$\times\cos\varkappa_m x dx;\quad \zeta=0,\ 1k,\ 2k,\quad \overline{3,6};\quad m=\overline{0,\ \infty},\quad n=\overline{0,\ \infty}.$$

Отметим, что все интегралы в формулах (8) выражаются через комбинации элементарных и интегральных показательных функций [6]. Например,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\bar{\psi}^{(2)}_{n}(x\pm k)\exp(-i\eta y)d\eta=2(-1)^{n}\lambda_n\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\sin\eta b\sin\eta y}{\eta^2-\lambda_n^2}\times$$

$$\times\exp(-\eta|x\pm k|)d\eta=(-1)^{n}\lambda_n^{-1}[\Psi_n(y+b,\ |x\pm k|)-\Psi_n(y-b,\ |x\pm k|)],$$

где

$$\Psi_n(\mu,\ \rho)=\frac{1}{4}[\exp(-z\lambda_n)Ei(-z\lambda_n)+\exp(-\bar{z}\lambda_n)\times$$

$$\times Ei(\bar{z}\lambda_n)+\exp(z\lambda_n)Ei(-\bar{z}\lambda_n)+\exp(z\lambda_n)\times Ei(\bar{z}\lambda_n)],\quad z=\rho+i\mu.$$

При $E_1=E_2$ и $\alpha_{t_1}=\alpha_{t_2}$ для однородного полупространства из (8) следует, что $\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{xy}=0$, как и ожидалось, поскольку постоянное температурное поле не вызывает температурных напряжений в однородном теле.

Институт прикладных проблем механики и математики АН УССР

Поступила 1.07.1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мелан Э., Паркус Г.** Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: Физматгиз, 1958, 167 с.
2. **Коляно Ю. М., Попович В. С.** Уравнения термоупругости неоднородных и кусочно-однородных пластин.—В кн.: Математические методы в термомеханике. К.: Наук. думка, 1978, с. 50—63.
3. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975, 872 с.
4. **Коляно Ю. М., Попович В. С.** Об одном эффективном методе решения задач тер-

моупругости для кусочно-однородных тел, нагреваемых внешней средой.— ФХММ, 1976, № 2, с. 108—112.
5. **Толстов Г. П.** Ряды Фурье. М.: Наука, 1980, 384 с.
6. **Градштейн И. М., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962, 1100 с.

ՅՈՒ. Մ. ԿՈԼՅԱՆՈ, Կ. Վ. ՎԻՇՆԵՎՍԿԻ

ԵՐԿՉԱՓ, ԿՏՈՐ ԱՌ ԿՏՈՐ ՀԱՄԱՍԵՌ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔՈՎ ՍԱԼԵՐԻ ՋԵՐՄԱԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՍՏԱՏԻԿ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ընդհանրացված ֆունկցիաների ապարատի կիրառմամբ առաջարկվում է ջերմաառաձգական լարումների որոշման եղանակ կտոր առ կտոր համասեռ և այլ նյութից ուղղանկյուն ներդիրով սալերի համար։

Ջերմաառաձգականության ստատիկ խնդրի հավասարակշռության հավասարումները առանձնացնելու համար գրված տեղափոխություններում, որոնք պարունակում են կոնտակտային լարումները, ներմուծվում են երկու ֆունկցիաներ և հաջորդաբար լուծվում երկու եզրային խնդիրներ Պուասոնի տիպի հավասարումների համակարգի համար։ Խնդրի լուծումը Ֆուրյեի վերջավոր և անվերջ ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ բերվում է անհայտ գործակիցների նկատմամբ գծային հավասարումների անվերջ համակարգի։