ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3, 1980 Естественные науки

Механика

УДК 539.3

А. В. КЕРОПЯН, В. С. САРКИСЯН

ПЕРЕДАЧА НАГРУЗКИ ОТ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО БЕСКОНЕЧНОГО ВКЛЮЧЕНИЯ К УПРУГОЙ ПОЛОСЕ

Работа посвящена исследованию плоской контактной задаче о передаче нагрузки от кусочно-однородного бесконечного включения малой толщины к защемленной по двум краям упругой полосе. Рассматривается случай, когда бесконечное включение состоит из трех кусков.

Решение задачи при помощи интегрального преобразования Фурье сводится к решению Фредгольмового интегрального уравнения второго рода. Показывается, что тангенциальные контактные напряжения в точках $x=\pm a$ имеют логарифмическую особенность, а нормальные напряжения в точках $x=\pm a$—конечный скачок. Особенности в точках $x=\pm a$ обусловлены неоднородностью включения.

Пусть бесконечная упругая полоса (модуль упругости E, коэффициент Пуассона γ и толщина 2H) защемлена гранями $y=\pm H$ и усилена бесконечным упругим включением с достаточно малой постоянной толщины h, модуль упругости которого при $|x|>a$ равен E_1, а при $|x|<a$—E_2, и пусть на включения действует сила $P\delta(x)$, направленная по оси ox (рис. 1). Здесь $\delta(x)$—дельта-функция Дирака. Требуется определить закон распределения нормальных и тангенциальных контактных напряжений вдоль линии соединения включения с полосой. Здесь, как и в работах [1—6], относительно включения предполагается, что его толщина в процессе деформации не изменяется, а под действием только тангенциальных контактных напряжений оно растягивается или сжимается как стержень, находясь в одноосном напряженном состоянии.

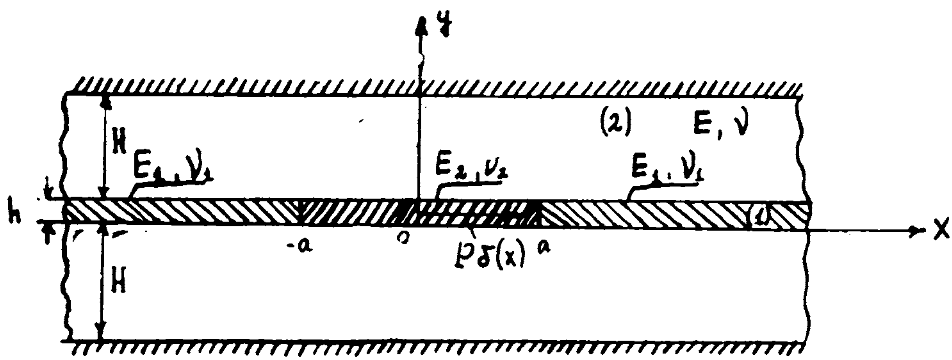

Рис. 1.

Обозначим интенсивности нормальных и горизонтальных контактных напряжений, действующих вдоль линии соединения включения с упругой полосой, через $q(x)$ и $\tau(x)$ соответственно.

Известно, что трансформанта Фурье горизонтальных перемещений точек контактирующей части упругой полосы с включением имеет вид [6]

$$\bar{u}^{(2)}(\sigma)=\bar{\tau}(\sigma)K^*(\sigma), \quad -\infty<\sigma<\infty, \tag{1}$$

где

$$K^*(\sigma)=\frac{(\varkappa+1)^2(\mathrm{ch}2\sigma H-1)-2\varkappa^2H^2\sigma^2}{\mu|\sigma|(2\varkappa+1)[(\varkappa+1)\mathrm{sh}2|\sigma|H-2\varkappa|\sigma|H]},$$

$\bar{\tau}(\sigma)$—трансформанта Фурье касательных напряжений, а $\varkappa=(\lambda+\mu)/2\mu$, λ и μ—постоянные Ламе материала полосы.

С другой стороны, согласно принятой выше модели уравнения равновесия включения при указанных условиях имеют вид

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2u^{(1)}}{dx^2}=\frac{2\tau(x)}{E_1h}, \quad -\infty<x<-a,\\
&\frac{d^2u^{(1)}}{dx^2}=\frac{2\tau(x)}{E_2h}-\frac{P\delta(x)}{E_2h}, \quad -a<x<a,\\
&\frac{d^2u^{(1)}}{dx^2}=\frac{2\tau(x)}{E_1h}, \quad a<x<\infty,
\end{aligned}\tag{2}$$

при условиях

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{du^{(1)}}{dx}\right|_{x=+a-0}-\left.\frac{du^{(1)}}{dx}\right|_{x=+a+0}=u'_a\neq0,\\
&\left.\frac{du^{(1)}}{dx}\right|_{x=-a-0}-\left.\frac{du^{(1)}}{dx}\right|_{x=-a+0}=u'_{-a}=-u'_a.
\end{aligned}\tag{3}$$

Здесь $u^{(1)}(x)$ — горизонтальные перемещения точек включения, $\tau(x)$—тангенциальные контактные напряжения, u'_a —пока неизвестная постоянная, подлежащая определению.

Уравнения (2) с условием (3) в обобщенных функциях эквивалентны следующему дифференциальному уравнению [5, 6]:

$$\frac{dU^{(1)}}{dx}=\frac{2\tau_1(x)}{E_1h}+\frac{2\tau_0(x)}{E_2h}-u'_a[\delta(x-a)-\delta(x+a)]-$$

$$-\frac{P\delta(x)}{E_2h}, \quad -\infty<x<\infty, \tag{4}$$

где

$$U^{(1)}(x)=\theta(-x-a)\frac{du^{(1)}}{dx}+[\theta(x+a)-\theta(x-a)]\frac{du^{(1)}}{dx}+\theta(x-a)\frac{du^{(1)}}{dx},$$

$$\tau_1(x)=[\theta(x-a)+\theta(-x-a)]\tau(x), \qquad (5)$$
$$\tau_0(x)=[\theta(x+a)-\theta(x-a)]\tau(x),$$
$$\tau(x)=\tau_1(x)+\tau_0(x),$$

$\Theta(x)$—функция Хевисайда.

Применив к (4) обобщенное преобразование Фурье, получим

$$-i\sigma\bar{U}^{(1)}(\sigma)=\frac{2\bar{\tau}_1(\sigma)}{E_1h}+\frac{2\bar{\tau}_0(\sigma)}{E_2h}-\left(2iu_a'\sin\sigma a+\frac{P}{E_2h}\right). \qquad (6)$$

Так как на линии соединения включения с полосой имеет место условие

$$u^{(1)}(x)=u^{(2)}(x), \quad -\infty<x<\infty, \qquad (7)$$

то на основании (1), (5), (6), (7) получим следующее функциональное уравнение относительно $\bar{\tau}_1(\sigma)$ и $\bar{\tau}_0(\sigma)$:

$$\bar{\tau}_1(\sigma)=-\frac{\lambda_2+K_1^{**}(\sigma)}{\lambda_1+K_1^{**}(\sigma)}\bar{\tau}_0(\sigma)+\bar{g}(\sigma), \quad -\infty<\sigma<\infty. \qquad (8)$$

Здесь приняты обозначения

$$K_1^{**}(\sigma)=\mu\sigma^2K^*(\sigma), \qquad \bar{g}(\sigma)=\frac{\bar{f}(\sigma)}{\lambda_1+K_1^{**}(\sigma)}, \qquad (9)$$

$$\lambda_1=\frac{2\mu}{E_1h}, \qquad \lambda_2=\frac{2\mu}{E_2h}, \qquad \lambda_2'=\frac{1}{2}\lambda_2, \quad \bar{f}(\sigma)=2i\mu u_a'\sin\sigma a+\lambda_2'P.$$

Применив к (8) обратное преобразование Фурье, получим

$$\tau_1(x)=-\tau_0(x)+(\lambda_1-\lambda_2)\int_{-a}^{a}K(|x-s|)\tau_0(s)ds+g(x), \quad -\infty<x<\infty. \qquad (10)$$

Здесь

$$K(|x-s|)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda_1+K_1^{**}(\sigma)}e^{-i\sigma(x-s)}\,d\sigma,$$

$$g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(2i\mu u_a'\sin\sigma a+\lambda_2P)}{\lambda_1+K_1^{**}(\sigma)}e^{-i\sigma x}\,d\sigma.$$

Поскольку при $|x|<a$ $\tau_1(x)=0$, из (10) получим

$$\tau_0(x)=(\lambda_1-\lambda_2)\int_{-a}^{a}K(|x-s|)\tau_0(s)ds+g(x), \quad |x|<a. \qquad (11)$$

Уравнение (11) Фредгольмого—интегральное уравнение, поскольку, как нетрудно видеть,

$$K(x)=\frac{A}{\pi}\ln\frac{1}{|\bar{\lambda}x|}+R(x),$$

$$R(x)=A\left\{-\frac{C}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(\bar{\lambda}x)^{2n}}{\pi(2n)!}\left(\ln\frac{1}{|\bar{\lambda}x|}+1+\ldots+\frac{1}{2n}-C\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{(\bar{\lambda}|x|)^{2n-1}}{2(2n-1)!}\right]\right\}+\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_1+K_1^*(\sigma)}-\frac{A}{\bar{\lambda}+\sigma}\right)e^{-i\sigma x}d\sigma,$$

где

$$\lambda_1=\frac{2\mu}{E_1h},\quad \bar{\lambda}=A\lambda_1,\quad A=\frac{2\varkappa+1}{\varkappa+1},$$

C—постоянная Эйлера.

С другой стороны, так как

$$g(x)=\frac{A\mu u_a'}{\pi}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+\frac{A\lambda_2' P}{\pi}\ln\frac{1}{|\bar{\lambda}x|}+$$

$$+\mu u_a'[R(x-a)-R(x+a)]+\lambda_2' PR(x),$$

то отсюда следует, что искомое решение уравнения (II) в точках $x=\pm a$, $x=0$ имеет логарифмическую особенность. Отметим, что особенность в точках $x=\pm a$ обусловлена неоднородностью включения.

Далее, поскольку

$$\sup_{|s|<a}\int_{-a}^{a}K(|x-s|)dx<\infty,$$

то отсюда следует, что решение уравнения (11) при некоторых значениях λ_1, λ_2 в пространстве суммируемых функций $L_1(-a, a)$ можно решать методом последовательных приближений.

Определяя вышеуказанным образом тангенциальные контактные напряжения на участке $|x|<a$, для $\tau_1(x)$ будем иметь

$$\tau_1(x)=(\lambda_1-\lambda_2)\int_{-a}^{a}K(|x-s|)\tau_0(s)ds+g(x),\quad |x|>a.$$

Постоянная u_a' определяется из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tau(s)ds=P.$$

С определением $\tau(x)$ нормальные контактные напряжения будут даваться формулой

$$q(x) = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_{-a}^{a} K_1(|x-s|)\tau_0(s)ds + g_1(x), \quad -\infty < x < \infty. \tag{12}$$

Здесь

$$K_1(|x-s|) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_1^*(\sigma)}{\lambda_1 + K_1^{**}(\sigma)} e^{-i\sigma(x-s)}\, d\sigma,$$

$$g_1(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g_1(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma,$$

$$g_1(\sigma) = \frac{(2i\mu u_a' \sin\sigma a + \lambda_2' P)}{\lambda_1 + K_1^{**}(\sigma)} K_1^*(\sigma),$$

$$K_1^*(\sigma) = \frac{i\,\mathrm{sgn}\,\sigma [4\varkappa^2 H^2 \sigma^2 + (\varkappa+1)(1 - \mathrm{ch}\,2\sigma H)]}{(2\varkappa+1)[(\varkappa+1)\mathrm{sh}\,2|\sigma|H - 2\varkappa|\sigma|H]}.$$

Так как $g_1(\sigma)$ при $\sigma \to \pm\infty$ имеет порядок

$$g_1(\sigma) \approx \frac{\lambda_2' P}{i\sigma} + \frac{2\mu u_a' \sin\sigma a}{\sigma},$$

то отсюда следует, что $q(x)$ в точках $x = \pm a$, $x = 0$ имеет конечный скачок, причем скачок в точках $x = \pm a$ обусловлен неоднородностью включения.

Кафедра механики сплошной среды *Поступила 28.07.1980*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Melan E.**, Ingr-Arch., Bd. 3, Nr. 2, S. 123—129, 1932.
2. **Bufler H.**, VDI—Forschungsheft, Vol. 485, S. B., № 27, 1961.
3. **Саркисян В. С., Аванесян Р. Г.**, ДАН Арм. ССР, 64, № 3, 1977.
4. **Аванесян Р. Г., Саркисян В. С.**, Уч. записки ЕГУ, № 2, 1978.
5. **Григорян Э. Х.**, Уч. записки ЕГУ, № 3, 1979.
6. **Керопян А. В.**, Уч. записки ЕГУ, № 2, 1980.

Ա. Վ. ՔԵՐՈՓՅԱՆ, Վ. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ԿՏՈՐ ԱՌ ԿՏՈՐ ՀԱՄԱՍԵՌ ԱՆՎԵՐՋ ՆԵՐԴԻՐԻՑ ՈՒԺԻ ՓՈԽԱՆՑՈՒՄԸ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՇԵՐՏԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքը նվիրված է փոքր հաստությամբ կտոր առ կտոր համասեռ անվերջ ներդիրով ուժեղացված, երկու եզրերով ամրակցված առաձգա-

կան շերտի հարթ կոնտակտային խնդրի ուսումնասիրությանը։ Դիտարկված է այն դեպքը, երբ անվերջ ներդիրը բաղկացած է երեք կտորներից։ Խնդրի լուծումը Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ բերվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը։ Ցույց է տրվում, որ շոշափող կոնտակտային լարումները $x=\pm a$ *կետերում ունեն լոգարիթմական եզակիություն, իսկ նորմալ լարումները* $x=\pm a$ *կետերում ունեն վերջավոր թռիչք։ Եզակիությունները* $x=\pm a$ *կետերում պայմանավորված են ներդիրի անհամասեռությամբ։*