ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1,1991 Естественные науки

Механика

УДК 539.3

З.Б.ОГАНИСЯН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА КРАЯХ ПЛАСТИНКИ ПРИ ЗАДАННОМ СПЕКТРЕ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ

В работе показана возможность восстановления граничных условий на краях пластинки по известным значениям частот собственных колебаний, что позволяет проверить состояние условий закрепления на краях пластинки, предусмотренных проектом.

Предполагается, что два противоположных края пластинки закреплены шарнирно, а на других двух краях ищутся условия, обеспечивающие данные частоты собственных колебаний.

I. Пусть тонкая прямоугольная пластинка с известными геометрическими (длина a, ширина b, толщина h) и физическими (модуль Юнга E, коэффициент Пуассона ν, плотность материала ρ) характеристиками имеет заданный спектр собственных частот $\omega_{m,n}$, где $m,n\in N$. Требуется по известным $\omega_{m,n}$ определить граничные условия, при которых реализуются данные частоты.

Уравнения колебаний пластинки представляется в виде [I.2]

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\lambda^2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2} + \lambda^4\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\rho h a^4}{D}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \tag{1.1}$$

где $w(x,y,t)$ – прогиб, $x,y\in[0,1]$ – безразмерные координаты по длине и по ширине пластинки, $\lambda=a/b, D=Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ – жесткость пластинки при изгибе.

Рассмотрим случай, когда по краям $y=0$ и $y=1$ имеет место шарнирное опирание пластинки:

$$w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,\ (y=0,\ y=1). \tag{1.2}$$

На краях $x=\text{const}$ наиболее общие граничные условия можно представить в виде

$$a_{i1}^{(j)}w + a_{i2}^{(j)}\frac{\partial w}{\partial x} + a_{i3}^{(j)}M_{11} + a_{i4}^{(j)}T_{13} = 0\ (i=1,2), \tag{1.3}$$

причем $j=1,2$ соответственно для краев $x=0$ и $x=1$.

Здесь

$$M_{11} = -Da^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu}{\lambda^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \text{ – изгибающий момент,}$$

$$T_{13} = -Da^3\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{1}{\lambda^2}\cdot\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right) \text{ – поперечное усилие.}$$

С учетом (I.2) функция w(x,y,t) представляется в виде

$$w(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x,t)\sin n\pi y. \tag{1.4}$$

Подстановкой (I.4) в уравнение колебаний (1.1) и граничные условия (1.3) для определения $w_n(x,t)$ получается уравнение

$$\frac{\partial^4 w_n}{\partial x^4} - 2(\lambda n\pi)^2\frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} + (\lambda n\pi)^4 w_n + \frac{\rho h a^4}{D}\cdot\frac{\partial^2 w_n}{\partial t^2} = 0 \tag{1.5}$$

при граничных условиях

$$\begin{cases} w_n = \alpha_{11}\dfrac{\partial^3 w_n}{\partial x^3} + \alpha_{12}\dfrac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}, \\ \dfrac{\partial w_n}{\partial x} = \alpha_{21}\dfrac{\partial^3 w_n}{\partial x^3} + \alpha_{22}\dfrac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} \quad \text{при } x=0 \end{cases} \tag{1.6}$$

и

$$\begin{cases} w_n = \beta_{11}\dfrac{\partial^3 w_n}{\partial x^3} + \beta_{12}\dfrac{\partial^2 w_n}{\partial x^2}, \\ \dfrac{\partial w_n}{\partial x} = \beta_{21}\dfrac{\partial^3 w_n}{\partial x^3} + \beta_{22}\dfrac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} \quad \text{при } x=1, \end{cases} \tag{1.7}$$

где α_{1k} и β_{1k} – коэффициенты, подлежащие определению.

При дальнейших выкладках предполагается, что n=1, т.е. для любого m нам известны наименьшие по n частоты собственных колебаний. В дальнейшем индекс n=1 опускается.

Первоначально рассмотрим случай, когда края (x=0 и x=1) пластинки находятся в одинаковых условиях. В этом случае граничные условия можно представить в виде (I.6) при x=0 и условий симметрии и антисимметрии в середине пластинки (на линии x=0,5):

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0, \quad \text{при } x=0{,}5 \tag{1.8}$$

или

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \text{при } x=0{,}5. \tag{1.9}$$

Характеристическое уравнение для определения нечетных по номеру частот из (I.6), (I.8) получается в виде

$$\begin{aligned} &2\alpha\beta\Omega^2 \operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\alpha_{11} + 2\Omega^2\operatorname{ch}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\alpha_{22} + \alpha\beta\left[\beta\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \alpha\operatorname{ch}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right]\alpha_{12} + \\ &+ \left[\beta^3\operatorname{ch}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} - \alpha^3\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right]\alpha_{21} + \alpha^2\beta^2\left[\alpha\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \beta\operatorname{ch}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right]\cdot \\ &\cdot(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) = -\alpha\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \beta\operatorname{ch}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

а для четных из (I.6), (I.9) получается

$$\begin{aligned} &2\alpha\beta\Omega^2 \operatorname{ch}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\alpha_{11} - 2\Omega^2\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\alpha_{22} - \alpha\beta\left[\alpha\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \beta\operatorname{ch}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right]\alpha_{12} + \\ &+ \left[\beta^3\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \alpha^3\operatorname{ch}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right]\alpha_{21} + \alpha^2\beta^2\left[\beta\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \alpha\operatorname{ch}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right]\cdot \\ &\cdot(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}) = \alpha\operatorname{ch}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} - \beta\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

где введены обозначения

$\Omega = a(\rho h\omega^2/D)^{1/4}$, $\alpha = (\Omega^2+(\lambda\pi)^2)^{1/2}$, $\beta = (\Omega^2-(\lambda\pi)^2)^{1/2}$, ω – частота собственных колебаний.

Из (I.10) и (1.11) очевидно, что для определения α_{ik} (i,k= =1,2) необходимо и достаточно иметь значения первых четырех частот собственных колебаний.

Таким образом, для определения α_{ik} получается следующая система алгебраических уравнений:

$$
\begin{aligned}
b_{11}x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3+b_{14}x_4 &= b_{15}x_5+b_{10},\\
b_{21}x_1+b_{22}x_2+b_{23}x_3+b_{24}x_4 &= b_{25}x_5+b_{20},\\
b_{31}x_1+b_{32}x_2+b_{33}x_3+b_{34}x_4 &= b_{35}x_5+b_{30},\\
b_{41}x_1+b_{42}x_2+b_{43}x_3+b_{44}x_4 &= b_{45}x_5+b_{40},
\end{aligned}
\qquad (1.12)
$$

где $x_1=\alpha_{11}$, $x_2=\alpha_{22}$, $x_3=\alpha_{12}$, $x_4=\alpha_{21}$

$$
b_{11} = \begin{cases} 2\alpha_1\beta_1\Omega_1^2 \operatorname{sh}\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\beta_1}{2}, & i=1,3,\\ 2\alpha_1\beta_1\Omega_1^2 \operatorname{ch}\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\beta_1}{2}, & i=2,4; \end{cases}
$$

$$
b_{12} = \begin{cases} 2\Omega_1^2 \operatorname{ch}\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\beta_1}{2}, & i=1,3,\\ -2\Omega_1^2 \operatorname{sh}\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\beta_1}{2}, & i=2,4; \end{cases}
$$

$$
b_{13} = \begin{cases} \alpha_1\beta_1\left[\beta_1\operatorname{sh}\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\beta_1}{2} - \alpha_1\operatorname{ch}\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\beta_1}{2}\right], & i=1,3,\\ -\alpha_1\beta_1\left[\alpha_1\operatorname{sh}\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\beta_1}{2} + \beta_1\operatorname{ch}\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\beta_1}{2}\right], & i=2,4; \end{cases}
$$

$$
b_{14} = \begin{cases} \beta_1^3\operatorname{ch}\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\beta_1}{2} - \alpha_1^3\operatorname{ch}\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\beta_1}{2}, & i=1,3,\\ \beta_1^3\operatorname{sh}\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\beta_1}{2} + \alpha_1^3\operatorname{ch}\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\beta_1}{2}, & i=2,4; \end{cases}
$$

$$
b_{15} = \begin{cases} -\alpha_1^2\beta_1^2\left[\alpha_1\operatorname{sh}\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\beta_1}{2} + \beta_1\operatorname{ch}\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\beta_1}{2}\right], & i=1,3,\\ -\alpha_1^2\beta_1^2\left[\beta_1\operatorname{sh}\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\beta_i}{2} - \alpha_1\operatorname{ch}\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\beta_1}{2}\right], & i=2,4; \end{cases}
$$

$$
b_{10} = \begin{cases} -\alpha_1\operatorname{sh}\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\beta_1}{2} - \beta_1\operatorname{ch}\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\beta_1}{2}, & i=1,3,\\ -\alpha_1\operatorname{ch}\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\beta_1}{2} - \beta_1\operatorname{sh}\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\beta_1}{2}, & i=2,4; \end{cases}
$$

$$
x_5 = x_1x_2 - x_3x_4. \qquad (1.13)
$$

С учетом линейности уравнений (1.12) x_i (i=1,2,3,4) выражаются через x_5 следующим образом:

$$x_1 = Q_1 x_5 + R_1. \tag{1.14}$$

Подстановкой (I.14) в (1.13) для определения x_5 получается квадратное уравнение. После нахождения x_5 x_i ($i=1,2,3,4$), а следовательно, α_{ik} можно определить из (I.14).

2. В частном случае,когда можно предположить, что взамен условий (I.6) реализованы условия

$$\begin{cases} w = \alpha_{11}\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} = \alpha_{22}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{cases} \tag{2.1}$$

для определения искомых α_{11}, α_{22}, необходимо и достаточно знание лишь двух собственных значений задачи собственных колебаний пластинки.

В этом случае для определения α_{11}, α_{22} получается система

$$2\alpha_1\beta_1\Omega_1^2 \mathrm{sh}\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\beta_1}{2}\alpha_{11} + 2\Omega_1^2 \mathrm{ch}\frac{\alpha_1}{2}\cos\frac{\beta_1}{2}\alpha_{22} + \alpha_1^2\beta_1^2\left[\beta_1 \mathrm{ch}\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\beta_1}{2} + \alpha_1 \mathrm{sh}\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\beta_1}{2}\right]\alpha_{11}\alpha_{22} = -\beta_1 \mathrm{ch}\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\beta_1}{2} - \alpha_1 \mathrm{sh}\frac{\alpha_1}{2}\sin\frac{\beta_1}{2};$$

$$2\alpha_2\beta_2\Omega_2^2 \mathrm{ch}\frac{\alpha_2}{2}\cos\frac{\beta_2}{2}\alpha_{11} - 2\Omega_2^2 \mathrm{sh}\frac{\alpha_2}{2}\sin\frac{\beta_2}{2}\alpha_{22} + \alpha_2^2\beta_2^2\left[\beta_2 \mathrm{sh}\frac{\alpha_2}{2}\cos\frac{\beta_2}{2} - \alpha_2 \mathrm{ch}\frac{\alpha_2}{2}\sin\frac{\beta_2}{2}\right]\alpha_{11}\alpha_{22} = -\beta_2 \mathrm{sh}\frac{\alpha_2}{2}\cos\frac{\beta_2}{2} + \alpha_2 \mathrm{ch}\frac{\alpha_2}{2}\sin\frac{\beta_2}{2}.$$

Результаты вычислений $\alpha_{22}(\alpha_{11}\approx 0)$ для заданных Ω_1, Ω_2, изменяющихся в интервале

$$\Omega_{iш} \leqslant \Omega_i \leqslant \Omega_{iз} \quad (i=1,2),$$

приведены в таблице. Здесь $\Omega_{iш}$ — собственные значения задачи собственных колебаний шарнирно-заделанной, а $\Omega_{iз}$ — жестко заделанной по краям пластинок.

$\Omega_2 \backslash \Omega_1$	4.44	4.54	4.63	4.72	4.82	4.91	5.00	5.10	5.19	5.29	5.38
7.02	10^6	0.87	0.35	0.17	0.09	0.04	-	-	-	-	-
7.15	-	1.16	0.43	0.21	0.11	0.05	0.02	-	-	-	-
7.29	-	1.65	0.53	0.26	0.14	0.07	0.03	-	-	-	-
7.42	-	2.74	0.66	0.31	0.17	0.09	0.04	0.01	-	-	-
7.55	-	8.21	0.88	0.38	0.20	0.11	0.06	0.02	-	-	-
7.66	-	-	1.32	0.49	0.25	0.14	0.07	0.03	-	-	-
7.81	-	-	3.18	0.68	0.31	0.17	0.09	0.05	0.01	-	-
7.94	-	-	-	1.32	0.43	0.22	0.12	0.06	0.02	-	-
8.07	-	-	-	-	0.94	0.31	0.15	0.08	0.04	-	-
8.20	-	-	-	-	-	-	0.23	0.11	0.05	0.02	-
8.32	-	-	-	-	-	-	-	0.17	0.07	0.03	0.00

Черточки в клетках означают, что соответствующие собственные значения не могут задаваться граничными условиями типа (2.1).

3. Рассмотрим теперь случай, когда на краях пластинки могут быть реализованы различные условия, т.е. условия (1.6) и (1.7).

В общем случае для определения восьми неизвестных α_{ik} и β_{ik} необходимо иметь значения восьми собственных значений Ω_i. Тогда для определения α_{ik}, β_{ik} получается следующая система восьми уравнений:

$$\det \left\| C_{kj}^{(i)} \right\| = 0 \qquad (i=1,2,\ldots,8), \tag{3.1}$$

где $C_{11}^{(i)} = -\alpha_{11}\alpha_i^3$, $C_{12}^{(i)} = 1-\alpha_{12}\alpha_i^2$, $C_{13}^{(i)} = \alpha_{11}\beta_i$, $C_{14}^{(i)} = 1+\alpha_{12}\beta_i^2$,

$C_{21}^{(i)}=\alpha_i(1-\alpha_{21}\alpha_i^2)$, $C_{22}^{(i)}= -\alpha_{22}\alpha_i^2$, $C_{23}^{(i)}= \beta_i(1+\alpha_{21}\beta_i^2)$, $C_{24}^{(i)}= \alpha_{22}\beta_i^2$,

$C_{31}^{(i)} = \mathrm{sh}\alpha_i-\beta_{11}\alpha_i^3\mathrm{ch}\alpha_i-\beta_{12}\alpha_i^2\mathrm{sh}\alpha_i$, $C_{32}^{(i)} = \mathrm{ch}\alpha_i-\beta_{11}\alpha_i^3\mathrm{sh}\alpha_i-\beta_{12}\alpha_i^2\mathrm{ch}\alpha_i$,

$C_{33}^{(i)} = \sin\beta_i + \beta_{11}\beta_i^3\cos\beta_i + \beta_{12}\beta_i^2\sin\beta_i$,

$C_{34}^{(i)} = \cos\beta_i - \beta_{11}\beta_i^3\sin\beta_i + \beta_{12}\beta_i^2\cos\beta_i$,

$C_{41}^{(i)} = \alpha_i\mathrm{ch}\alpha_i - \beta_{12}\alpha_i^3\mathrm{ch}\alpha_i - \beta_{22}\alpha_i^2\mathrm{sh}\alpha_i$,

$C_{42}^{(i)} = \alpha_i\mathrm{sh}\alpha_i - \beta_{21}\alpha_i^3\mathrm{sh}\alpha_i - \beta_{22}\alpha_i^2\mathrm{ch}\alpha_i$,

$C_{43}^{(i)} = \beta_i\cos\beta_i + \beta_{21}\beta_i^3\cos\beta_i + \beta_{22}\beta_i^2\sin\beta_i$,

$C_{44}^{(i)} = -\beta_i\sin\beta_i - \beta_{21}\beta_i^3\sin\beta_i + \beta_{22}\beta_i^2\cos\beta_i$.

Для простоты рассмотрим частный случай. Пусть на краях $x=0$, $x=1$ реализованы условия

$$\begin{aligned} w &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \alpha_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{при } x=0, \\ w &= 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \beta_{22}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{при } x=1. \end{aligned} \tag{3.2}$$

В этом случае характеристическое уравнение для определения собственных частот из (1.5) и (3.2) получается в виде

$$\Omega^2(\beta\,\mathrm{sh}\alpha\cos\beta - \alpha\,\mathrm{ch}\alpha\sin\beta)x_1 + 2\Omega^4\mathrm{sh}\alpha\sin\beta\, x_2 = \alpha\beta(1-\mathrm{ch}\alpha\cos\beta) + (\lambda\pi)^2\mathrm{sh}\alpha\sin\beta, \tag{3.3}$$

где

$$x_1 = \alpha_{22} - \beta_{22}, \quad x_2 = \alpha_{22}\beta_{22}. \tag{3.4}$$

Следовательно, для определения искомых α_{22}, β_{22} необходимо задаться значениями двух частот собственных колебаний.

Если, напр., $\Omega_1=5{,}12$ и $\Omega_2=8{,}06$, то из (3.3)-(3.4) получаются

$$\alpha_{22} = 0{,}376, \quad \beta_{22} = 0{,}031,$$

и граничные условия на краях пластинки имеют вид

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0{,}376\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{при } x=0,$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0{,}031 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{при } x=1.$$

Таким образом, в работе показана принципиальная возможность определения условий закрепления краев пластинки на основе известных значений частот собственных колебаний.

Кафедра применения средств вычислительной техники в естественных науках

Поступила 13.07.1990

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тимошенко С., Янг Д., Уивер У.** Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985, 472 с.
2. **Бидерман В.** Прикладная теория механических колебаний.М.: Высш. школа, 1972, 410 с.

Զ.Բ.ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

ՍԵՓԱԿԱՆ ԼԱՅՆԱԿԱՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՏՐՎԱԾ ՀԱՃԱԽԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՐԺԵՔՆԵՐՈՎ ՍԱԼԻ ԵԶՐԱՅԻՆ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԻ ՎԵՐԱԿԱՆԳՆՄԱՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում ցույց է տրված սեփական տատանումների հաճախականությունների հայտնի արժեքներով սալի եզրային պայմանների վերականգնման հնարավորությունը, որը թույլ է տալիս ստուգել սալի եզրերում նախագծով նախատեսված ամրացման պայմանների վիճակը:

Ենթադրվում է, որ սալի երկու հանդիպակաց եզրերը հոդակապորեն ամրացված են, իսկ մյուս երկու եզրերում փնտրվում են պայմանները, որոնք ապահովում են սեփական տատանումների տրված հաճախականությունները:

Z.B.HOVHANNESYAN

ON THE PROBLEM OF BORDER CONDITIONS RESTORATION ON THE EDGES OF A PLATE, WHEN TRANSVERSE NATURAL OSCILLATIONS FREQUENCIES SPECTR ARE DEFINED

SUMMARY

In this paper the possibility of border conditions restoration on the edges of a plate according to the given natural oscillations conditions on the edges of a plate, mentioned in the project is shown.

It is supposed, that two opposite edges of the plate are fastened in hinges, and on two other edges conditions providing given natural oscillations are looked for.