ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1,1995 Естественные науки

Физика

УДК 530.12;531.51

Г. Г. АРУТЮНЯН, Е. С. ОГАНЕСЯН, В. В. ПАПОЯН, Л. Г. ПЕТРОСЯН

СТАТИЧЕСКИЕ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ С ОДНОРОДНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ВЕЩЕСТВА В ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ *

Для двух различных вариантов граничных условий в рамках обобщенной теории тяготения посчитаны интегральные параметры сферически-симметричных статических конфигураций.

1. Введение. Предсказание вариации G и связи ее с эволюцией Вселенной соответствует общей концепции Эрнста Маха, объясняющей инерциальные свойства тел действием всей удаленной материи во Вселенной. Основываясь на принципе Маха, можно заключить, что ускорение, сообщаемое пробной частице, должно зависеть не только от гравитационного воздействия фиксированных небесных тел, но также очень слабо от распределения вещества в непосредственной близости от этой частицы. Пусть пробная частица находится на расстоянии r от центра некоего тела массы m, тогда, с одной стороны, в соответствии с идеей Маха ускорение частицы из соображения размерности $a \sim mRc^2 / Mr^2$ (M - масса, R - радиус наблюдаемой части Вселенной), а с другой - она должна падать с ускорением $a \sim Gm/r^2$. Сравнение этих выражений [1] приводит к

$$\frac{GM}{c^2R} \sim 1,$$

т. е. размеры наблюдаемой части Вселенной порядка ее гравитационного радиуса, и как будто реализуются условия, отвечающие ситуации внутри черной дыры. Это выражение можно интерпретировать как

$$\frac{1}{G(r)} \sim \sum_i \frac{m_i}{c^2(r-r_i)},$$

и тогда сразу же возникает необходимость введения в теорию дальнодействующего скалярного поля $y(x^\mu)$, которое определяет значение G в данной точке и формируется распределением масс, причем для учета от удаленных масс необходимо, чтобы на больших расстояниях $y \sim O(1/r)$.

Таким образом, одним из способов математического описания переменной гравитационной связи является введение скалярного поля в качестве дополнительной переменной гравитационного взаимодействия. Это можно делать разными способами. Мы в настоящей работе отдаем предпочтение обобщенной теории тяготения (ОТТ), которая так или иначе связана с именами Йордана, Бранса, Дикке [2-4], а также

* Работа частично выполнена за счет фонда Сороса RYGOOO.

Г. С. Саакяна и М. А. Мнацаканяна [5], которые использовали идею о переменности гравитационной постоянной для построения теоретических моделей статических космогонических объектов и в рамках ОТТ получили конфигурации, массы которых существенно превышают солнечную, а с ростом компактности могут принимать сколь угодно большие значения. Последние впервые обратили внимание на то, что, помимо свойственных ОТО граничных условий в центре конфигурации, когда все физические характеристики принимают конечные значения, уравнения ОТТ допускают также "сингулярные" начальные условия, причем один из таких вариантов предполагает сведение к нулю гравитационного притяжения в центре конфигурации (при конечном центральном давлении). В [5] продемонстрированы оригинальная и остроумная процедура интегрирования для внутренней области конфигурации и способ сшивки с внешним решением. Однако константа β_0, входящая в известное решение Гекмана [2] в упомянутых расчетах, вслед за Йорданом считалась универсальной, не зависящей от центральной плотности звезды. Это привело к неточностям в условиях сшивки и вызвало необходимость повторного расчета статических центрально-симметричных моделей, что и выполнено в настоящей работе.

2.Формулировка краевой задачи. Таким образом в ОТТ метрику порождают не только вещество и негравитационные поля, но также гравитационный скаляр y, который в свою очередь генерируется материей согласно

$$\nabla_\mu y^\mu = \frac{8\pi T}{3-2\zeta}$$

и на пространственной бесконечности

$$y \to y_0 = \frac{2(2-\zeta)}{G_0(3-2\zeta)}$$

(∇_μ - символ ковариантного дифференцирования, ζ - безразмерная константа связи ОТТ).

Вид метрики выбирается следующим образом:

$$dS^2 = e^{2\nu(r)}c^2dt^2 - e^{2\lambda(r)}dr^2 - r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \tag{1}$$

и формируется она в соответствии с

$$G^\mu_\nu = \frac{8\pi}{y}T^\mu_\nu + \left(\frac{\nabla_\mu y^\mu}{y} - \delta^\mu_\nu \frac{\nabla_\alpha y^\alpha}{y}\right) - \zeta\left(\frac{y^\mu y_\nu}{y^2} - \delta^\mu_\nu \frac{y^\alpha y_\alpha}{2y^2}\right), \tag{2}$$

откуда видно, что ОТТ - это эйнштейновская теория с дополнительным источником в виде безмассового скалярного поля [7]. Конкретный вид (2) в случае (1) можно представить в виде [7]

$$\left[\frac{y_1}{y}\left(r^2 y e^{\nu-\lambda}\right)\right]_1 = -\frac{8\pi(\varepsilon - 3P)}{c^2(3-2\zeta)} r^2 e^{\nu+\lambda},$$

$$\left[\nu_1\left(r^2 y e^{\nu-\lambda}\right)\right]_1 = \frac{8\pi\left[\varepsilon(2-\zeta) + 3P(1-\zeta)\right]}{c^2(3-2\zeta)} r^2 e^{\nu+\lambda}, \tag{3}$$

$$\left[\frac{1}{r}\left(r^2 y e^{\nu-\lambda}\right)\right]_1 - y e^{\nu+\lambda} = \frac{8\pi\left[\varepsilon(\zeta-1)-\zeta P\right]}{c^2(3-2\zeta)} r^2 e^{\nu+\lambda},$$

$$\nu_1 = -P_1/(\varepsilon+P),$$

где $(\cdots)_1 = \frac{d}{dr}(\cdots)$, ε - плотность энергии, P - давление , которое, как обычно, предполагается идеальной жидкостью.

Заменяем (3) эквивалентной системой уравнений первого порядка, вводя обозначения $V(r)$ и $m(r)$ так, чтобы

$$y_1 = -\frac{V(r)}{r^2} e^{\lambda-\nu}, \tag{4}$$

$$V_1(r) = \frac{8\pi(\varepsilon-3P)}{c^2(3-2\zeta)} r^2 e^{\nu+\lambda}, \tag{5}$$

$$\nu_1 = \frac{m(r)e^{\lambda-\nu}}{yr^2} = -\frac{P_1}{\varepsilon+P}, \tag{6}$$

$$m_1(r) = \frac{8\pi\left[\varepsilon(2-\zeta)+3P(1-\zeta)\right]}{c^2(3-2\zeta)} r^2 e^{\nu+\lambda}, \tag{7}$$

$$\lambda_1 = \frac{8\pi e^{2\lambda} r\left[\varepsilon(1-\zeta)+P(3-2\zeta)\right]}{y(3-2\zeta)} - \frac{(m-V)}{yr^2} e^{\lambda-\nu} + \frac{V\left(m-\frac{\zeta}{2}V\right)}{yr^2} e^{2(\lambda-\nu)}. \tag{8}$$

Исчерпывающее решение внутренней задачи предусматривает задание условий в центре распределения масс (r=0), а также сшивку внутреннего и внешнего решений на поверхности ($r = r_s$), т. е. решение краевой задачи.

Для выполнения численного интегрирования системы (4) - (8) необходимо позаботиться о перенормировке неизвестных функций, чтобы иметь возможность начать счет от центра конфигурации. Перепишем с этой целью (4) - (8) в следующих обозначениях:

$$r = r_c x,\ y = y_c y_1(x),\ V = V_c y_2(x),$$
$$\nu = \nu_c + y_3(x),\ m = m_c y_4(x),$$
$$\lambda = \lambda_c + y_5(x),\ y_6 = P/\varepsilon.$$

В результате система уравнений сводится к виду

$$\frac{dy_1}{dx} = -\frac{y_2(x)}{x^2} e^{y_5-y_3} \tag{9}$$

$$\frac{dy_2}{dx} = 8\pi x^2 e^{y_5+y_3}(1-3y_6)/(3-2\zeta), \tag{10}$$

$$\frac{dy_3}{dx} = \frac{y_4}{y_1} e^{y_5-y_3} / x^2, \tag{11}$$

$$\frac{dy_5}{dx} = \frac{8\pi x e^{2y_5}}{y_1(3-2\zeta)}\left[(1-\zeta)+y_6(3-\zeta)\right] - \frac{e^{y_5-y_3}}{y_1 x^2}(y_4-y_2) + \tag{12}$$

$$+\frac{e^{2(y_5-y_3)}}{y_1^2 x^3} y_2\left(y_4 - \frac{\zeta}{2} y_2\right),$$

$$\frac{dy_4}{dx} = 8\pi x^2 e^{y_5+y_3}\left[2-\zeta+3y_6(1-\zeta)\right]/(3-2\zeta), \tag{13}$$

$$\frac{dy_6}{dx} = -(1+y_6)\frac{dy_3}{dx}, \tag{14}$$

если, конечно, с использованием произвола в выборе константы r_c потребовать выполнения соотношения

$$r_c^2 e^{2\lambda_c}\varepsilon = y_c, \tag{15}$$

а также выбрать V_c и m_c соответствуюшим образом:

$$m_c = V_c = r_c y_c e^{\nu_c-\lambda_c}. \tag{16}$$

Заметим, что система уравнений записана для однопараметрического уравнения состояния вещества с однородным распределением материи ($\varepsilon = const$). Вблизи центра конфигурации система уравнений (9)-(14) допускает следующие возможные типы поведения искомых функций:

а) "сингулярные" условия в центре

$$y_1(x) = x^{-p}, \quad p = \frac{2}{\zeta}\left(1-\sqrt{1-\frac{\zeta}{2}}\right),$$

$$y_2(x) = p + c_1\frac{x^{n+3}}{n+3}, \quad c_1 = \frac{8\pi(1-3y_6(0))}{3-2\zeta},$$

$$e^{y_3(x)} = 1 + c_2\frac{x^{n+3}}{(n+3)^2}, \quad c_2 = \frac{8\pi\left[2-\zeta+3y_6(0)(1-\zeta)\right]}{3-2\zeta}, \tag{17}$$

$$y_4(x) = c_2\frac{x^{n+3}}{n+3}, \quad n = 1-p,$$

$$e^{y_5(x)} = x^n,$$

$$y_6(x)=y_6(0)-\frac{c_2}{(n+3)^2}(1+y_6(0))x^{n+3};$$

б) "несингулярные" условия в центре

$$y_1(x)=1-\frac{c_1}{6}x^2,\ c_3=\frac{8\pi[1-\zeta+y_6(0)(3-\zeta)]}{3-2\zeta},$$

$$y_2(x)=\frac{c_1}{3}x^3,$$

$$e^{y_3(x)}=1+\frac{c_2}{6}x^2,$$

$$y_4(x)=\frac{c_2}{3}x^3, \tag{18}$$

$$e^{y_5(x)}=1+\frac{x^2}{2}\left(\frac{c_1-c_2}{3}+c_3\right),$$

$$y_6(x)=y_6(0)-[1+y_6(0)]\frac{c_2x^2}{6}.$$

Необходимо отметить, что поведение (18) аналогично поведению соответствующих функций при решении задачи в ОТО, а условия (17) возможны лишь в рамках ОТТ.

При заданных ζ и $y_6(0)=\dfrac{P(0)}{\varepsilon}$ численное интегрирование системы следует вести от x=0 до границы $x=x_s$, определяемой из условия $P(x_s)=0$ или эквивалентного условия

$$\left(\frac{dy_4}{dx}\Big/\frac{dy_2}{dx}\right)_{P=0}=2-\zeta. \tag{19}$$

Сшивка на границе конфигурации осуществляется с внешним решением в виде

$$ds^2=\left(\frac{\xi-1}{\xi+1}\right)^{\frac{1}{\eta}}dt^2-\frac{(\xi^2-1)}{\left(\xi-\dfrac{1-a}{\eta}\right)^2}dr^2-r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2\right), \tag{20}$$

$$y=y_0\left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)^{\frac{a}{2\eta}},\ r=r_0\eta\sqrt{\xi^2-1}\left(\frac{\xi+1}{\xi-1}\right)^{\frac{1-a}{2\eta}}$$

В результате интегрирования определяются $y_i(x)$ $(i=1,2,\cdots 6)$ и их производные. Знание этих величин дает возможность определить a, η и ξ_s:

$$a = y_2(x_s) / y_4(x_s), \tag{21}$$

$$\eta = \sqrt{(a-1)^2 + a - \frac{1}{2}\zeta a^2}, \tag{22}$$

$$\xi_s = \left[1 - A_s \frac{a(1-a)}{\eta^2}\right] \Big/ \left[\frac{1-a}{\eta} - \frac{a}{\eta} A_s\right], \tag{23}$$

$$A_s = \left(y_1 \frac{dy_5}{dx} \Big/ \frac{dy_1}{dx} \right)_{x_s},$$

после чего вычисляются $y_c, V_c, m_c, v_c, \lambda_c, r_c, r_s = r_c x_s$. Остается только определить массу конфигурации. Один из способов определения массы конфигурации состоит в интегрировании от нуля до r_s комбинации исходных полевых уравнений, имеющей вид

$$\frac{d}{dr}\left(r^2 e^{-\lambda} \frac{d}{dr}\left(e^{v} y\right)\right) = \frac{8\pi r^2 e^{v+\lambda}\left[3P(2-\zeta) + \varepsilon(1-\zeta)\right]}{3-2\zeta} \tag{24}$$

В итоге для массы конфигурации получается

$$M = \frac{1}{y_0(1-a)} \left\{ \frac{8\pi m_c}{3-2\zeta} \int_0^{x_s} x^2 e^{y_3+y_5}\left[3y_6(2-\zeta) + 1 - \zeta\right] dx - pm_c \right\} = \tag{25}$$

$$= \frac{m_s}{y_0} = \frac{m_c y_4(x_s)}{y_0} = \frac{3-2\zeta}{2(2-\zeta)} m_c y_4(x_s).$$

3. Результаты численного интегрирования. На рис. 1 и 2 представлена зависимость параметра ξ_s внешнего решения (20) (удовлетворяющего, как известно, условию $\xi > 1$) от $q_c = y_6(0) = \dfrac{P(0)}{\varepsilon}$. Причем на рис. 1 конфигурации рассчитаны с несингулярными начальными условиями, а на рис. 2 - модели с сингулярными начальными условиями. Четко проявляется то обстоятельство, что статические центрально-симметричные конфигурации с однородным распределением вещества существуют только для $y_6(0) \le q_{max}(\zeta)$

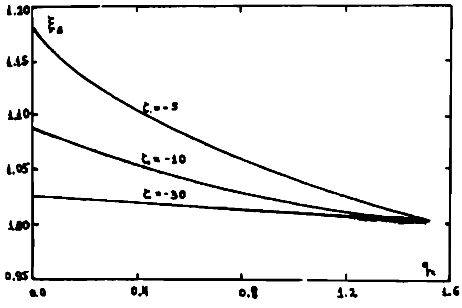

Рис. 1. Зависимость граничного значения параметра ξ_s, входящего во внешнее решение, от $q_c = \dfrac{P(0)}{\varepsilon}$ для различных значений ζ. Область определения параметра $\xi \ge 1$, поэтому рассматриваемые центрально-симметричные статические конфигурации с однородным распределением вещества и несингулярными начальными условиями существуют лишь для $q_c \le q_{max}(\zeta)$. При стремлении $\zeta \to -\infty$ $q_{max} \to \infty$.

Значение $q_{max}(\zeta)$ тем больше, чем больше абсолютная величина ζ. Этот факт был обнаружен и в старых работах.

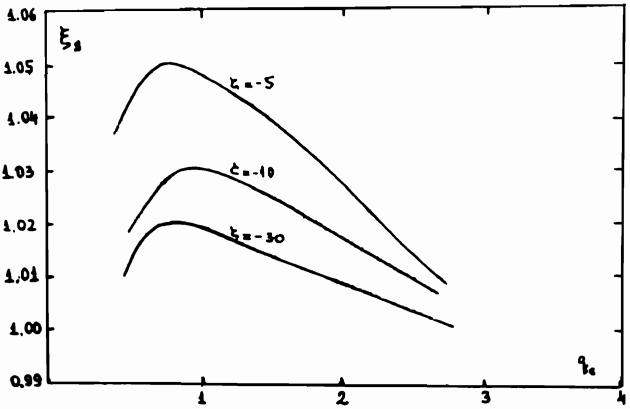

Рис. 2. Зависимость ξ_s от q_c для сингулярных начальных условий и различных значений параметра ζ. Область центральных давлений, в которой существуют статические сферически-симметричные конфигурации, значительно шире по сравнению с предыдущим случаем.

На рис. 3 изображена зависимость массы M конфигураций от параметра q_c. Здесь в отличие от упомянутых работ прослеживается четкое различие между $M(q_c)$, соответствующими сингулярным и несингулярным условиям в центре звезды. Кривые приводятся только для значений ζ = - 30 (как в прежних работах) и ζ = -1000,

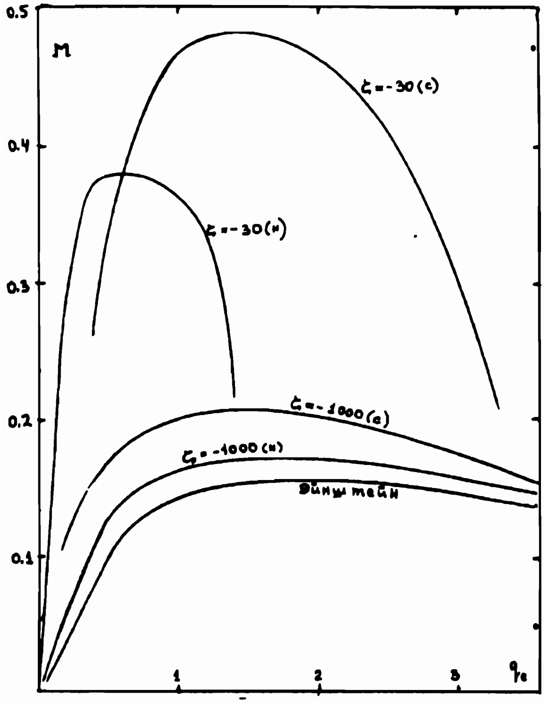

Рис. 3. Зависимость массы M статических сферически-симметричных конфигураций от q_c для сингулярных (значок (с)) и несингулярных (значок (н)) начальных условий и для различных значений параметра теории ζ. Представлена также кривая, посчитанная в эйнштейновском варианте теории ($\zeta = -\infty$). Естественно, что семейство моделей с ζ = -1000 при несингулярных условиях в центре звезды очень близко ложится к предельному варианту.

причем очевидно, что ζ = -1000 с несингулярными начальными условиями почти совпадает с эйнштейновским вариантом.

Авторы благодарны участникам семинара кафедры теоретической физики за обсуждения.

Кафедра теоретической физики *Поступила 23.09.1994*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Sciama D.** Mon. Not. Roy. - Astron. Soc., 1953, v. 113, p. 34.
2. **Jordan P.** Schwerkraft und Weltall-Vieweg and Sohn, Braunsweig: 1955.
3. **Brans C., Dicke R.** Phys. Rev., 1961, v. 124, p. 925.
4. **Brans C.**, Phys. Rev., 1962, v.125, p.2194.
5. **Саакян Г. С., Мнацаканян М. А.**, Астрофизика, 1969, v. 5, p. 555; 1968 v. 4, p. 567.
6. **Salmona A.**, Phys. Rev., 1967, v. 154, p. 1218.
7. **Арутюнян Г. Г., Папоян В. В.**, Препринт ОИЯИ, P2-94-84. 1994.

Գ. Գ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Ե. Ս. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ,
Վ. Վ. ՊԱՊՈՅԱՆ, Լ. Գ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ՆՅՈՒԹԻ ՀԱՄԱՍԵՌ ԲԱՇԽՈՒՄՈՎ ՍՏԱՏԻԿ ԿԵՆՏՐՈՆԱՀԱՄԱՉԱՓ ԿՈՆՖԻԳՈՒՐԱՑԻԱՆԵՐԸ ՋԳՈՂԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՇՐՋԱՆԱԿՆԵՐՈՒՄ

Ամփոփում

Ձգողականության ընդհանրացված տեսության շրջանակներում երկու տարբեր սահմանային պայմանների դեպքում հաշվարկված են ստատիկ կենտրոնահամաչափ կոնֆիգուրացիաների ինտեգրալ պարամետրերը: