ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 3,1990 Естественные науки

Механика

УДК 539.3

С.В.САРКИСЯН

К ЗАДАЧЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ СТРУНЫ

В работе получено уравнение для определения собственной частоты колебаний неоднородной струны, когда плотность материала струны изменяется по заданному закону.

1. Пусть имеем закрепленную по концам $(0,a)$ неоднородную струну. Свободные упругие колебания неоднородной струны описываются следующим уравнением [1]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\rho(x)}{F}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant a), \tag{1.1}$$

где $u(x,t)$ — смещение произвольной точки струны, $F=\text{const}$ — усилие в струне, $\rho(x)$ — плотность материала струны.

К уравнению (1.1) присоединим граничные условия

$$u(0,t) = u(a,t) = 0. \tag{1.2}$$

По методу Фурье решение уравнения (1.1) находим в виде

$$u(x,t) = X(x)\cdot T(t). \tag{1.3}$$

После подстановки (1.3) в уравнение (1.1) переменные разделяются и получаются два обыкновенных дифференциальных уравнения относительно искомых функций $X(x)$ и $T(t)$.

Предположим, что плотность $\rho(x)$, характеризующая неоднородность струны, задана следующим образом:

$$\rho(x) = p\left(1+\varepsilon\sin\frac{\pi x}{a}\right) \quad (p,\varepsilon = \text{const}),$$
$$\varepsilon > -1, \; p > 0. \tag{1.4}$$

В этом случае согласно (1.1)–(1.4) для функции $X(x)$ получим следующую краевую задачу:

$$X''(x) + \mu^2\left(1+\varepsilon\sin\frac{\pi x}{a}\right)\cdot X(x) = 0, \tag{1.5}$$

$$X(0) = X(a) = 0, \tag{1.6}$$

где $\mu^2 = \frac{\omega^2\rho}{F}$, ω — частота свободных колебаний струны. Решение уравнения (1.5), удовлетворяющее граничным условиям (1.6), представим в виде

$$X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi x}{a}. \tag{1.7}$$

Здесь a_k — неизвестные коэффициенты.

Подставляя (1.7) в уравнение (1.5), после некоторых преобразований будем иметь

$$\sum_{m=1}^{\infty}\left[\left(\mu^2-\frac{m^2\pi^2}{a^2}\right)a_m+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon\mu^2 a_k b_m(k)\right]\sin\frac{m\pi x}{a}=0,$$

$$b_m(k)=\frac{1}{2\pi}\begin{cases}\dfrac{(-1)^{m+k+1}-1}{m+k+1}-\dfrac{(-1)^{m+k-1}-1}{m+k-1}-\dfrac{(-1)^{k-m+1}-1}{k-m+1}-\\[2mm] -\dfrac{(-1)^{m-k+1}-1}{m-k+1}, \quad \text{при } (k\pm m)^2\neq 1;\\[2mm] \dfrac{(-1)^{m+k+1}-1}{m+k+1}-\dfrac{(-1)^{m+k-1}-1}{m+k-1}, \quad \text{при } (k-m)^2=1,\ (k+m)^2\neq 1;\\[2mm] 0, \quad \text{при } (k\pm m)^2=1.\end{cases} \tag{1.8}$$

Уравнение (1.8) служит для определения собственной частоты колебаний неоднородной струны. При k=m=1 из (1.8) получаем следующую частоту колебаний:

$$\omega=\frac{\pi}{a}\left[\frac{3\pi}{3\pi+8\varepsilon}\cdot\frac{F}{p}\right]^{1/2}. \tag{1.9}$$

Отметим, что при $\varepsilon=0$ из (1.9) получаем первую собственную частоту колебаний однородной струны. Если же краевую задачу (1.5)–(1.6) решить методом Бубнова-Галеркина и при этом довольствоваться только первым приближением, то для определения собственной частоты колебаний неоднородной струны получим формулу (1.9). При m=1 k=3 из (1.8) для частоты имеем

$$\omega=\frac{\pi}{a}\left[\frac{15\pi}{15\pi+32\varepsilon}\cdot\frac{F}{p}\right]^{1/2}. \tag{1.10}$$

При m=k=2 из (1.8) получаем первые две собственные частоты колебания неоднородной струны: первая частота выражается формулой (1.9), а для второй частоты будем иметь

$$\omega=\frac{2\pi}{a}\left[\frac{15\pi}{15\pi+32\varepsilon}\cdot\frac{F}{p}\right]^{1/2}. \tag{1.11}$$

Отметим, что частота, выраженная формулой (1.11), совпадает с частотой, вычисленной методом Бубнова-Галеркина при двух приближениях. Таким образом, поступая аналогично из (1.8) можно определить остальные собственные частоты колебания неоднородной струны.

Краевую задачу (1.5)–(1.6) можно решить методом малого параметра [2]. Представляя функцию X(x) и μ^2 в виде ряда по степеням ε (здесь в представлении (1.4) предполагается, что ε малый параметр) из (1.5)–(1.6) получается рекуррентная система краевых задач. Из условия ортогональности приближений, если довольствоваться первыми двумя приближениями, для первой собственной частоты колебания неоднородной струны получим

$$\omega=\frac{\pi}{a}\left[\frac{3\pi-8\varepsilon}{3\pi}\cdot\frac{F}{p}\right]^{1/2}. \tag{1.12}$$

Если в формуле (1.9) в подкоренном выражении считать, что ε малый параметр, и разложить в ряд по степеням ε, при этом сохраняя два члена ряда, то из (1.9) получим частоту колебания неоднородной струны (1.12), вычисленную по методу малого параметра.

Для плотности струны

$$\rho(x)=p_1\left(1+\varepsilon_1\cos\frac{\pi x}{a}\right)\ (p_1,\varepsilon_1=\text{const}),\quad p_1>0,\ |\varepsilon_1|<1, \tag{1.13}$$

представляя решение полученной краевой задачи в виде (1.7) и поступая аналогично вышеизложенному, получим следующее уравнение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(\theta^2-\frac{n^2\pi^2}{a^2}\right)\sin\frac{n\pi x}{a}+\frac{\theta^2\varepsilon_1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}\sin\frac{n\pi x}{a}+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}\sin\frac{n\pi x}{a}\right]=0, \tag{1.14}$$

где $\theta^2=\dfrac{\omega^2 p_1}{F}$. Из (1.14) при n=2 получаем следующие частоты колебания:

$$\omega_{1,2}=\frac{\pi}{a}\left[\frac{5\pm(9+4\varepsilon_1^2)^{1/2}}{4-\varepsilon_1^2}\cdot\frac{2F}{p_1}\right]^{1/2}. \tag{1.15}$$

Отметим, что при $\varepsilon_1=0$ из (1.15) получаем первые две собственные частоты колебаний однородной струны

$$\omega_1=\frac{\pi}{a}\left(\frac{F}{p_1}\right)^{1/2},\quad \omega_2=\frac{2\pi}{a}\left(\frac{F}{p_1}\right)^{1/2}.$$

Если же краевую задачу решить методом Бубнова-Галеркина при двух приближениях, то для определения собственной частоты колебания неоднородной струны получим формулу (1.15).

Уравнение (1.14) служит для определения собственных частот колебаний неоднородной струны при неоднородности типа (1.13). Отметим, что обобщенное решение для продольных колебаний неоднородной балки приведено в [3].

2. Поставим следующую задачу. Пусть плотность $\rho(x)$ материала неоднородной струны удовлетворяет изопериметрическому условию

$$\int_0^a \rho(x)dx=\rho_0 a \tag{2.1}$$

и задана в виде (1.4). Требуется определить те значения параметра ε, при котором первая собственная частота колебаний неоднородной струны принимала бы максимальное или минимальное значение по сравнению с первой частотой колебания однородной струны с плотностью материала ρ_0=const.

Изопериметрическое условие (2.1) согласно (1.4) примет вид

$$p\left(1+\frac{2\varepsilon}{\pi}\right)=\rho_0. \tag{2.2}$$

Из (1.9) с учетом условия (2.2) получим

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2}=\frac{3\pi+6\varepsilon}{3\pi+8\varepsilon},$$

где $\omega_0=\dfrac{\pi}{a}\left(\dfrac{F}{\rho_0}\right)^{1/2}$ – первая собственная частота колебаний однородной струны с плотностью ρ_0. Из (2.3) следует, что отношение частот представляет собой монотонно убывающую функцию относительно ε. Таким образом, получается, что если ε принадлежит интервалу $(0,+\infty)$, то частота колебаний неоднородной струны уменьшается по сравнению с частотой колебания однородной струны при условии (2.2). Если же ε принадлежит интервалу $(-1,0)$, то частота колебания увеличивается. Собственная частота колебания неоднородной струны стремится к максимальному значению $\omega_0 \cdot \left(\frac{3\pi-6}{3\pi-8}\right)^{1/2}$ при $\varepsilon \to -1$ и стремится к минимальному значению $\omega_0(3/4)^{1/2}$ при $\varepsilon \to +\infty$.

Кафедра механики сплошной среды *Поступила 3.07.1990*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Работнов Ю.Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.:Наука, 1979, 744с.
2. **Саркисян В.С.** Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Ер., Изд-во ЕГУ, 1976, 534с.
3. **Кристенсен Р.М.** Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982, 334с.

Ամփոփում

Աշխատանքում ստացված է անհամասեռ լարի սեփական տատանման հաճախությունը որոշելու համար հավասարում, երբ լարի նյութի խտությունը փոխվում է տրված օրենքով:

SUMMARY

In the paper an equation is obtained to define the vibration frequency of the nonhomogeneous string, when the density of the string's material changes by the given rule.