ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1985 Естественные науки

Физика

УДК 524.354

Д. М. СЕДРАКЯН

УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ СВЕРХПЛОТНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ В ПОДЪЯДЕРНОЙ ОБЛАСТИ

Исследованы «Ae»- и «Aen»-фазы сверхплотных конфигураций в предположении, что энергия связи ядра описывается формулой Вайтзекера. Получены основные формулы для определения концентрации ядер, электронов и нейтронов соответственно в «Ae»- и «Aen»-фазах. Эти соотношения дают возможность построить уравнение состояния в подъядерной области.

1. **Введение.** Для нахождения уравнения самого устойчивого состояния вещества в подъядерной области в работах [1—4] требуется абсолютный минимум энергии системы, которая задается конкретным выбором состава вещества («Ae»- или «Aen»-фазы). Однако, как покажем ниже, такая постановка задачи приводит к незамкнутой системе уравнений.

Действительно, в «Ae»-фазе минимизация энергии E (A, z, n) по A и z приводит к двум уравнениям для определения A и z при заданном числе нуклонов n. Причем для энергии ядра с массовым числом A и заряда z используется формула Вайтзекера [3, 4]. Минимизация полной энергии по z соответствует реакции нейтрализации $(A, z) \rightleftarrows (A, z+\alpha) + (\alpha e^-)$, однако минимум по A приводит к соотношению [1—5]

$$E = \mu_n N_n + \mu_p N_p, \tag{1}$$

где μ_n, μ_p —химические потенциалы нейтронов и протонов в ядре, $N_p \equiv z$, а $N_p = A - z$. Что касается «Aen»-фазы, то минимизация [1, 3] производится по переменным A, z, N_A, где N_A—число ядер [3]. Два из них приводят к условию равновесия реакции $(A, z) \rightleftarrows (A, z+\alpha) + (\alpha e^-)$, $(A, z) \rightleftarrows An + ze^-$, а третье условие—опять к уравнению (1). Легко заметить, что в уравнение (1) входят только термодинамические параметры атомного ядра, и оно должно выразить термодинамическую связь энергии ядра с химическими потенциалами нейтронов и протонов, из чего состоит атомное ядро. Однако при наличии внутриядерного давления $P_A \neq 0$ эта связь имеет вид

$$E + P_A V_A = \mu_n N_n + \mu_p N_p + f \cdot \sigma, \tag{1'}$$

где P_A—давление ядра, $V_A = A/n_0$—объем ядра, f и σ—соответственно поверхностное натяжение и площадь поверхности атомного ядра, а $f \cdot \sigma$—поверхностная энергия, равная согласно формулы Вайтзекера $c_1 A^{2/3}$. Так как $P_A V_A - f\sigma \neq 0$, то уравнение (1′) не совпадает с (1). При правильном определении химических потенциалов нейтронов μ_n и протонов μ_p соотношение (1′) превратится в тождество. Следовательно, термодинамическое соотношение (1), точнее (1′), не может быть уравнением для определения A и z.

Итак, требование абсолютного минимума полной энергии приводит к незамкнутой системе уравнений.

При правильной постановке рассмотренной задачи получится замкнутая система уравнений, которые соответствуют условиям равновесия, имеющимся в веществе реакций, и условию минимальности полной энергии, приходящейся на один нуклон.

2. Химические потенциалы нейтронов и протонов в ядре и условия равновесия. Для определения химических потенциалов нейтронов и протонов в ядрах исходим из формулы Вайтзекера для энергии ядра:

$$E_A=Mc^2=(A-z)m_nc^2+zm_pc^2-c_0A+c_1A^{2/3}+c_2z^2/A^{1/3}+$$
$$+c_3(A-2z)^2/A+c_4(A-2z)^4/A^3. \qquad (2)$$

постоянные коэффициенты которой c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 приведены в работе [3]. Термодинамический потенциал Гибсса для ядра запишем в следующем виде:

$$z_A(P_A,\ N_n,\ z,\ \sigma)=E_A+P_AV_A=(A-z)m_nc^2+zm_pc^2-c_0A+f\sigma+$$
$$+z\varphi+c_3(A-2z)^2/A+c_4(A-2z)^4/A^3+P_AV_A. \qquad (2')$$

где $z\varphi$—есть энергия кулоновского взаимодействия протонов, $\varphi=\frac{c_2z}{A^{1/3}}$ средний электростатический потенциал протонов, в f и σ для сферического ядра определяются следующими формулами:

$$\sigma=4\pi r_0^2, \qquad f=\left(\frac{4\pi n_0}{3}\right)^{2/3}\cdot\frac{c_1}{4\pi}. \qquad (3)$$

Здесь n_0, r_0—плотность нуклонов и радиус ядра, $A=n_0V_A$.

Тогда давление внутри изолированного ядра определяется следующим образом:

$$P_A=\frac{2f}{r_0}=\frac{2}{3}c_1A^{-1/3}n_0.$$

Согласно определению химических потенциалов имеем [6]

$$\mu_n(P_A,\ y)=\left(\frac{\partial z_A}{\partial N_n}\right)_{P_A,\sigma,\varphi,N_p}=m_nc^2-c_0+c_3(1-4y^2)+$$
$$+c_4(1-2y)^3(1+6y)+P_A/n_0,$$
$$\mu_p(P_A,\ y)=\left(\frac{\partial z_A}{\partial N_p}\right)_{P_A,\sigma,\varphi,N_n}=m_pc^2-c_0+c_2yA^{2/3}-c_3(1-2y)^2(3-2y)-$$
$$-c_4(1-2y)^3(7-6y)+P_A/n_0.$$

Отметим, что с учетом (4) соотношение (1′) превращается в тождество, что и следовало ожидать. Для нахождения условия равновесия вещества в подъядерной области, состоящего в общем случае из атомных ядер, электронов и нейтронов, можно поступить следующим образом. Полная энергия смеси в заданном объеме есть сумма энергий ядер E_a, электронов E_e, свободных нейтронов E_n и поверхностной энергии ядер E_σ:

$$E=E_a+E_n+E_e+E_\sigma. \tag{5}$$

Изменение энергии системы определяется формулой

$$dE=T_\sigma dS_\sigma+fd\sigma_a+dE_a+dE_n+dE_e, \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} dE_a&=T_A dS_a-P_A dV_a+\mu_n dN_n+\mu_p dN_p,\\ dE_n&=T_n dS_n-P_n dV_n+\mu_n' dN_n',\\ dE_e&=T_e dS_e-P_e dV+\mu_e dN_e. \end{aligned} \tag{6'}$$

Здесь T_i, S_i, P_i, V_i ($i=a$, n, e, σ)—соответственно температура, энтропия, давление и объем ($V_a=N_A V_A$) атомных ядер, свободных нейтронов, электронов; T_σ, S_σ —поверхностная температура и энтропия ядер ($\sigma_a=\sigma N_A$); $\mu_n' N_n'$ и $\mu_e N_e$ —соответственно химические потенциалы и число свободных нейтронов и электронов. Полная энтропия системы:

$$S=S_a+S_n+S_\sigma+S_e. \tag{7}$$

Условие равновесия такой системы требует экстремум энтропии (6):

$$\delta S=\delta S_a+\delta S_n+\delta S_e+\delta S_\sigma=0.$$

Последнее имеет место при

$$E=\text{const},\quad V_n+V_a=V=\text{const},\quad N_n+N_p+N_n'=\text{const},\quad N_e=N_p \tag{8}$$

или

$$\delta E_\sigma=-\delta E_a-\delta E_n-\delta E_e,\quad \delta V_n=-\delta V_a,\quad \delta N_n'=-\delta N_n-\delta N_p,\quad \delta N_p=\delta N_e.$$

Находя δS_a, δS_n, δS_e и δS_σ из (6) и (6′) и подставляя в (7) с учетом (8), получим следующее соотношение:

$$\left(\frac{1}{T_A}-\frac{1}{T_\sigma}\right)\delta E_a+\left(\frac{1}{T_e}-\frac{1}{T_\sigma}\right)\delta E_e+\left(\frac{1}{T_n}-\frac{1}{T_\sigma}\right)\delta E_n+$$

$$+\left(\frac{\mu_n}{T_A}-\frac{\mu_p}{T_A}-\frac{\mu_e}{T_e}\right)\delta N_e+\left(\frac{\mu_n}{T_A}-\frac{\mu_n'}{T_n}\right)\delta N_n'+\left(\frac{P_A}{T_A}-\frac{P_n}{T_n}-\frac{f}{T_\sigma}\,\frac{\delta\sigma_a}{\delta V_a}\right)\delta V_a=0.$$

Так как δE_a, δE_e, δE_n, δV_a, δN_e и $\delta N_n'$ —произвольные вариации, то окончательно имеем

$$T_A=T_\sigma=T_n=T_e\equiv T,\quad P_A=f\cdot\frac{\partial\sigma_a}{\partial V_a}+P_n,\quad \mu_n=\mu_p+\mu_e,\quad \mu_n=\mu_n'. \tag{9}$$

Заметим, что для сферических ядер $\dfrac{\partial\sigma_a}{\partial V_a}=\dfrac{2}{r_0}$. Применим теперь (9) отдельно к «Ae»- и «Aen»-фазам.

3. **«Ae»-фаза.** Рассмотрим основное состояние «Ae»-плазмы, состоящей из вырожденного газа электронов и одинаковых ядер с минимальной энергией системы, приходящейся на один нуклон. Параметры A и z этих ядер определяются заданием граничной энергии вырожденного электронного газа, т. е. являются определенными функциями плотности нуклонов n.

Условия равновесия (9) для «Ae»-фазы дают

$$T_A = T_e = T_\sigma \equiv T, \quad P_A = 2f/r_0, \quad \mu_n = \mu_p + \mu_e. \tag{9'}$$

Заметим, что μ_n и μ_p определены формулами (4), с учетом которых (9') есть одно уравнение относительно A и z. Второе уравнение получается из требования электронейтральности плазмы (1):

$$n_e = \frac{zn}{A} = ny. \tag{10}$$

Здесь n_e и n—плотности электронов и нуклонов. С помощью (10) химический потенциал ультрарелятивистских электронов выражается следующим образом:

$$\mu_e = a(ny)^{1/3}, \tag{11}$$

где $a = (3\pi^2)^{1/3}\hbar c = 6 \cdot 10^{-11}$ meV. Третье уравнение получается из требования относительного минимума функции $f = \frac{\rho}{n} - m_n c^2$ —энергии, приходящейся на один нуклон «Ae»-плазмы. В этом случае

$$f(A, y) = -b(A, y) - \Delta mc^2 y + \frac{3}{4} a n^{1/3} y^{4/3}, \tag{12}$$

где

$$b(A, y) = c_0 - c_1 A^{-1/3} - c_2 y^2 A^{2/3} - c_3(1-2y)^2 - c_4(1-2y)^4.$$

Требование относительного минимума f приводит k

$$\frac{\partial f}{\partial A} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dA} = 0. \tag{13}$$

Из (9) и (4) получим первое уравнение относительно A и y:

$$4c_3(1-2y) + 8c_4(1-2y)^3 - c_2 y A^{2/3} + \Delta mc^2 = a(ny)^{1/3}. \tag{14}$$

С помощью (12—14) получим третье уравнение:

$$2 \cdot c_2 y^2 A \left[1 - \frac{c_2 y A^{2/3}}{c_2 y A^{2/3} + 8y[c_3 + 6c_4(1-2y)^2] + a(yn)^{1/3}/3}\right] = c_1. \tag{15}$$

Уравнения (14) и (15) составляют замкнутую систему для определения A и y как функции от плотности нуклонов n. Имея в виду, что давление электронов в «Ae»-фазе определяется через n_e, тогда (10), (14), (15) определяют уравнение состояния $\rho = \rho(P)$ в «Ae»-фазе.

4. **«Aen»-фаза.** С увеличением плотности вещества в «Ae»-фазе химический потенциал нейтронов растет, и когда $\mu_n - m_n c^2 > 0$, начинается испарение нейтронов и образуется новая «Aen»-фаза. В отличие от «Ae»-фазы, где имели место только равновесные реакции нейтронизации, в «Aen»-фазе устанавливается также динамическое равновесие между свободными нейтронами и нейтронами в ядрах. В этом случае из (9) имеем

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e, \quad \mu_n(P_A) = \mu_n'(P_A), \quad P_A = \frac{2f}{r_0} + P_n. \tag{16}$$

Первое из этих условий приводит к уравнению

$$4c_3(1-2y)+8c_4(1-2y)^3-c_2yA^{2/3}+smc^2-an^{1/3}\left[\frac{y(1-x)}{1-x\frac{n}{n_0}}\right]^{1/3}\equiv F_1=0, \tag{17}$$

где $x=n_n/n_0$, n_n —плотность свободных нейтронов. Второе уравнение есть

$$-c_0+c_3(1-4y^2)+c_4(1-2y)^3(1+6y)+\frac{2}{3}c_1A^{-1/3}+\frac{2}{5}c\frac{n}{n_0}x^{5/3}-cx^{2/3}\equiv F_2=0 \tag{18}$$

где

$$C=\frac{an^{1/3}}{2m_nc^2}.$$

Третье уравнение получается из требования относительного минимума полной энергии, приходящейся на один нуклон «Aen»-плазмы, которая имеет вид [2]:

$$f(A,x,y)=\frac{1-x}{1-x\frac{n}{n_0}}[b(A,y)+\Delta mc^2y]+\frac{3}{5}c\left[1-\frac{n(1-x)}{n_0\left(1-x\frac{n}{n_0}\right)}\right]x^{5/3}+ \tag{19}$$
$$+\frac{3}{4}an^{1/3}\left[\frac{y(1-x)}{1-x\frac{n}{n_0}}\right]^{4/3}.$$

Условие минимума гласит:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left[\frac{\partial F_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial A}-\frac{\partial F_1}{\partial A}\frac{\partial F_2}{\partial y}\right]+\frac{\partial f}{\partial y}\left[\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial A}-\frac{\partial F_1}{\partial A}\cdot\frac{\partial F_2}{\partial x}\right]+ \tag{20}$$
$$+\frac{\partial f}{\partial A}\left|\frac{\partial F_1}{\partial x}\frac{\partial F_2}{\partial y}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{\partial F_2}{\partial x}\right|=0,$$

где функции F_1 и F_2 определены соотношениями (17) и (18). Уравнения (17)—(20) определяют основные параметры «Aen»-фазы: A, x, y. Зная эти параметры как функции от n, можем построить уравнение состояния вещества $\rho=\rho(P)$ в «Aen»-фазе.

В конце отметим, что полученные нами основные уравнения как в «Ae»-, так в «Aen»-фазах существенно отличаются от уравнений, приведенных в работах [1, 3, 4].

Кафедра общей физики *Поступила 13.07.1984*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Саакян Г. С.** Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс. М.: Наука, 1972.

2. **Baym G., Bethe H. A. Pethick C. G.** Neutron Star matter.—Nuclear Physics. 1971, v. A 135, p. 225.

3. **Саакян Г. С., Григорян Л. Ш.** Явление пионизации вырожденного вещества.—Астрофизика, 1977, т. 13, с. 295.

4. **Григорян Л. Ш., Саакян Г. С.** Эффект пионизации и его астрофизические аспекты.—Физика элементарных частиц и атомного ядра. 1979, т. 10, с. 1075.

5. **Уилер Дж., Гарисон Б., Вокано М., Торн К.** Теория гравитации и гравитационный коллапс. М.: Мир, 1967.

6. **Кубо Р.** Термодинамика. М.: Мир, 1970, с. 202.

Դ. Մ. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ

ԳԵՐԽԻՏ ԿՈՆՖԻԳՈՒՐԱՑԻԱՆԵՐԻ ՎԻՃԱԿԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄԸ ՄԻՋՈՒԿԱՅԻՆԻՑ ՑԱԾՐ ՏԻՐՈՒՅԹՈՒՄ

Ամփոփում

Ուսումնասիրված են գերխիտ կոնֆիգուրացիաների «Ae» *և* «Aen» *փուլերը, երբ միջուկների կապի էներգիան նկարագրվում է Վայցզեկերի բանաձևով։ Ստացված են հիմնական հավասարումները այդ փուլում նյութի բաղադրիչ մասերի կոնցենտրացիաների որոշման համար։ Այդ հավասարումները հնարավորություն են տալիս կառուցելու նյութի վիճակի հավասարումը* «Ae» *և* «Aen» *փուլերում։*