ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1982 Естественные науки

УДК 521.6

Механика

А. С. САРКИСЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ СПУТНИКА ТРЕХОСНОЙ ПЛАНЕТЫ

Рассматриваются периодические движения пассивно гравитирующей материальной точки в поле тяготения равномерно вращающегося трехосного твердого тела и достаточно удаленного твердого тела, оказывающего возмущающее действие на движение материальной точки. Методом Пуанкаре определения характеристических показателей устанавливаются необходимые условия устойчивости для возможных периодических решений. Далее определяются значения для орбитальных переменных, при которых найденные условия выполняются.

Рассмотрим движение пассивно гравитирующей материальной точки (спутника) P_0 в поле тяготения равномерно вращающегося трехосного твердого тела P. Предположим, что достаточно удаленное третье тело P_1, имеющее сферическое распределение плотности, оказывает возмущающее действие на движение рассматривамой материальной точки. Будем считать, что тело P с массой M и с главными центральными моментами инерции A, B, C вращается вокруг оси с наименьшим моментом инерции и обладает динамической симметрий относительно экваториальной плоскости. Центры масс тел P и P_1 обращаются по круговым орбитам вокруг общего центра инерции со средним движением n', и ось вращения тела P перпендикулярна к плоскости ее орбиты.

Опишем движение спутника каноническими элементами Делоне, отнесенными к вращающейся прямоугольной системе координат, начало, основная плоскость и ось аппликат которой совпадают соответственно с центром инерции, экваториальной плоскостью и осью вращения тела P. Тогда согласно [1] дифференциальные уравнения движения будут иметь вид

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial F}{\partial y_i},\quad \frac{dy_i}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial x_i}\quad (i=1,\ 2,\ 3), \tag{1}$$

где переменные x_i и y_i, а также гамильтониан F определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} x_1&=\beta\sqrt{a}, & y_1&=n(t-t_\pi),\\ x_2&=\beta\sqrt{a(1-e^2)} & y_2&=\pi-\Omega,\\ x_3&=\beta\sqrt{a(1-e^2)}\cos i, & y_3&=\Omega-n't, \end{aligned} \tag{2}$$

$$F=F_0+\mu F_1. \tag{3}$$

Здесь $\beta=\sqrt{fM}$, где f—гравитационная постоянная, а a, e, i, π, Ω, t_π, n—элементы, характеризующие эллиптическое движение спутника, а именно: a—большая полуось орбиты, e—эксцентриситет, i—наклонность, π—долгота перицентра, Ω—долгота восходящего узла, t_π—время прохождения через перицентр, n—среднее движение спутника. F_0—основная часть гамильтониана F—будет

$$F_0=\frac{\beta^4}{2x_1^2}+n'x_3. \tag{4}$$

Возмущающая часть μF_1, где μ—малый параметр, обуславливает собой те возмущения, которые имеют место в силу трехосности тела P и наличия достаточно удаленного твердого тела P_1. Возмущающая функция F_1 зависит от всех переменных x_i, y_i и записывается как

$$F_1=\sum K\cos(k_1y_1+k_2y_2+k_3y_3). \tag{5}$$

Согласно [2] в выражение для F_1 входят также масса тела P_1 и линейные комбинации из моментов инерции второго порядка, т. е. из A, B, C тела P.

При $\mu=0$ уравнения движения имеют порождающие решения $x_i^{(0)}$, $y_i^{(0)}$, равные

$$\begin{cases} x_1^0=a, & y_1^{(0)}=nt+\omega_1, \\ x_2^{(0)}=a_2, & y_2^{(0)}=\omega_2, \\ x_3^{(0)}=a_3, & y_3^{(0)}=-n't+\omega_3, \end{cases} \tag{6}$$

где a_i и ω_i—постоянные интегрирования.

Пусть порождающим решениям (6) соответствуют периодические решения системы (1). Тогда эти решения можно представить в виде ряда по степеням малого параметра μ:

$$x_i=\varphi_i(t)=x_i^{(0)}+\sum_{\sigma=1}^{\infty}\mu^\sigma x_i^{(\sigma)}(t),\quad y_i=\psi_i(t)=y_i^{(0)}+\sum\mu^\sigma y_i^{(\sigma)}(t). \tag{7}$$

Положим $x_i=\varphi_i+\zeta_i$, $y_i=\psi_i+\eta_i$, где ζ_i и η_i—малые возмущения. Тогда уравнения в вариациях будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\zeta_i}{dt}=\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{\dfrac{\partial^2F}{\partial y_i\partial x_k}\zeta_k+\dfrac{\partial^2F}{\partial y_i\partial y_k}\eta_k\right\}, \\ \dfrac{d\eta_i}{dt}=-\sum\limits_{k=1}^{n}\left\{\dfrac{\partial^2F}{\partial x_i\partial x_k}\zeta_k+\dfrac{\partial^2F}{\partial x_i\partial y_k}\eta_k\right\}. \end{cases} \tag{8}$$

Частные производные вычислены здесь при $x_i=\varphi_i$, $y_i=\psi_i$.

Уравнения (8) представляют собой систему линейных однородных уравнений с периодическими коэффициентами, структура общих решений которых имеет вид

$$\zeta_i=\sum_{j=1}^{2n} A_j e^{\alpha_j t} S_{ij}, \quad \eta_i=\sum_{j=1}^{2n} A_j e^{\alpha_j t} T_{ij}, \tag{9}$$

где A_j—постоянные интегрирования, S_{ij} и T_{ij}—периодические функции, α_j—характеристические показатели.

Пуанкаре, исследуя устойчивость периодических решений в задаче трех тел [3], показал, что необходимые условия устойчивости можно установить рассмотрением значений одних лишь характеристических показателей, заранее представив их в виде рядов по возрастающим степеням $\sqrt{\mu}$. При этом если уравнения движения не зависят явно от времени и имеют интеграл живых сил ($F=\text{const}$), то характеристические показатели α попарно равны по абсолютной величине и противоположны по знаку, и два значения из $2n$ показателей равны нулю. Если невозмущенный гамильтониан F_0 не зависит хотя бы от одной из переменных x_i (допустим, от x_n), то могут появиться еще два нулевых показателя. Чтобы число нулевых характеристических показателей было равно двум и только двум, должны выполняться следующие два условия (если R—среднее, по Пуанкаре, значение F_1):

1) окаймленный гессиан F_0 по $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ не равняется нулю;

2) гессианы R по $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{n-1}$ и по $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{n-1}, \omega_n, \gamma_n$ не равняются нулю. Здесь $x_n^{(0)}+\gamma_n$—начальное значение x_n при $t=0$. Невыполнение любого из этих условий приведет к тому, что уравнения движения будут иметь четыре нулевых характеристических показателя.

Вернемся к дифференциальным уравнениям нашей задачи. Они не зависят явно от времени и допускают интеграл живых сил. Кроме того, F_0 не зависит от x_2 (см. (4)). Проверим условия 1, 2 для нашей задачи:

$$1)\ H_1(F_0)_{x_1, x_2}=n'^2\frac{3\beta^4}{x_1^4}\neq 0; \tag{10}$$

$$2)\ H(R)_{\omega_3}=\frac{\partial^2 R}{\partial\omega_3^2}\neq 0, \tag{11}$$

$$H(R)_{\omega_2,\omega_3,\gamma_2}=\frac{\partial^2 R}{\partial\gamma_2^2}\left(\frac{\partial^2 R}{\partial\omega_2^2}\cdot\frac{\partial^2 R}{\partial\omega_3^2}-\frac{\partial^2 R}{\partial\omega_2\partial\omega_3}\cdot\frac{\partial^2 R}{\partial\omega_3\partial\omega_2}\right)\neq 0.$$

Как видно из (10) и (11), условия 1, 2 удовлетворяются, а это значит, что число нулевых характеристических показателей в нашей задаче равно двум. Этот результат совпадает с результатом, полученным Пуанкаре в пространственной задаче трех тел.

Приступим к вычислению характеристических показателей, не равных нулю. Как показал Пуанкаре [3], уравнения (8) в данном случае допускают четыре набора частных решений $\zeta_i=e^{\alpha t}S_i$, $\eta_i=e^{\alpha t}T_i$, для которых характеристические показатели α имеют вид

$$\alpha=\sum_{\sigma=1}^{\infty}(\sqrt{\mu})^{\sigma}\alpha_{\sigma}. \tag{12}$$

Причем два из (12) вида $\alpha=\alpha_1\sqrt{\mu}+\alpha_3\mu\sqrt{\mu}+\ldots$, а остальные два—$\alpha=\alpha_2\mu+\alpha_4\mu^2+\ldots$. Основные коэффициенты разложений $\alpha_1^{(1,2)}$ и $\alpha_2^{(1,2)}$ нам и предстоит вычислить. Вычисления произведем для соизмеримости $\frac{n}{n'}=$ $=\frac{1}{1}$. Тогда для пертурбационной функции F_1 будем иметь

$$F_1=\frac{f(\bar{I}_1+\bar{I}_2)\beta^6}{4x_1^6}K_1+\frac{f(\bar{I}_1-\bar{I}_2)\beta^6}{4x_1^6}\{\sum K_2\cos k(y_1\pm y_2+y_3)\}+$$
$$+\frac{fM_1x_1^2}{2\beta^4R_0^2}\{\sum K_3\cos k(y_1\pm y_2+y_3)\}+\frac{fM_1x_1^4}{4\beta^4R_0^3c}\{\sum K_4\cos k(y_1\pm y_2+y_3)\}, \quad (13)$$

где M_1—масса возмущающего тела P_1; R_0—средний радиус тела P; c—отношение расстояния между центрами инерций тел P и P_1 к R_0; $\bar{I}_1=\frac{B+C-2A}{\mu}$; $\bar{I}_2=\frac{A+B-2B}{\mu}$; $\mu=\frac{1}{c^2}\ll 1$ — малый параметр. Коэффициенты K_1, K_2, K_3, K_4—функции от переменных x_2, x_3, и e, а k принимают значения +1, +2. Осредняя по Пуанкаре функцию F_1 для ее среднего значения R, получим

$$R=\frac{f(\bar{I}_1+\bar{I}_2)\beta^6}{4x_1^6}K_1+\frac{f(\bar{I}_1-\bar{I}_2)\beta^6}{4x_1^6}\{\sum K_2\cos k(\omega_1+\omega_2+\omega_3)\}+$$
$$+\frac{fM_1x_1^2}{2\beta^2R_0^2}\{\sum K_3\cos k(\omega_1\pm\omega_2+\omega_3)\}+\frac{fM_1x_1^4}{4\beta^4R_0^3c}\{\sum K_4\cos k(\omega_1\pm\omega_2+\omega_3)\}. \quad (14)$$

Из (14) видно, что $\frac{\partial^2R}{\partial\omega_1^2}=\frac{\partial^2R}{\partial\omega_3^2}=\frac{\partial^2R}{\partial\omega_1\partial\omega_3}=\frac{\partial^2R}{\partial\omega_3\partial\omega_1}$ и $\frac{\partial^2R}{\partial\omega_1\partial\omega_2}=$ $=\frac{\partial^2R}{\partial\omega_2\partial\omega_1}=\frac{\partial^2R}{\partial\omega_2\partial\omega_3}=\frac{\partial^2R}{\partial\omega_3\partial\omega_2}$. Введем обозначения $\frac{\partial^2R}{\partial\omega_1^2}=N_1$, $\frac{\partial^2R}{\partial\omega_1\partial\omega_2}=$ $=N_2$, $\frac{\partial^2R}{\partial\omega_2^2}=N_3$, $\frac{\partial^2R}{\partial\gamma_2^2}=N_4$. Тогда, воспользовавшись алгоритмами для вычисления α_1 и α_2, приведенными Пуанкаре в [3] и Баркиным в [4], получим

$$\alpha_1^{(1,2)}=\pm\sqrt{\frac{3\beta^4}{x_1^4}N_1}, \quad (15)$$

$$\alpha_2^{(1,2)}=\pm\sqrt{\frac{N_4(N_2^2-N_1N_3)}{N_1}}. \quad (16)$$

Судить об устойчивости по характеристическим показателям в строгом смысле можно только в отрицательную сторону. А именно: если среди характеристических показателей существует хотя бы один с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение неустойчиво. Лишь только тогда, когда вещественные части всех характеристических показателей равны нулю, среди соответствующих периодических решений могут быть устойчивые. Следовательно необходимыми условиями устойчивости для периодических решений, изучаемых в данной работе, будут

$$[\alpha_1^{(1,2)}]^2<0, \quad [\alpha_2^{(1,2)}]^2<0, \quad (17)$$

т. е. $\alpha_1^{(1,2)}$ и $\alpha_2^{(1,2)}$ должны быть чисто мнимыми. Для выполнения условий (17), как видно из (15) и (16), должны выполняться следующие неравенства:

$$N_1<0, \quad N_4(N_2^2-N_1N_3)>0. \quad (18)$$

Неравенства (18) можно заменить равносильными неравенствами, состоящими из трех групп:

$$
\begin{gathered}
N_1<0, \quad N_4>0, \quad N_3>0; \\
N_1<0, \quad N_4>0, \quad N_3<0, \quad |N_1N_3|<N_2^2; \\
N_1<0, \quad N_4<0, \quad N_3<0, \quad |N_1N_3|>N_2^2.
\end{gathered}
\tag{19}
$$

Выполнение любого из трех групп неравенств (19) гарантирует чисто мнимые значения для $\alpha_1^{(1,2)}$ и $\alpha_2^{(1,2)}$.

В качестве примера приведем значения орбитальных элементов, полученных в результате рассмотрения третьей группы неравенств. При этом предполагается, что эксцентриситеты спутниковых орбит достаточно малы. Тогда будем иметь

$$
C>B>A; \quad \frac{\pi}{2}\leqslant i\leqslant\frac{3\pi}{2}; \quad \omega_1=0;
$$

$$
\omega_2=0, \ \omega_3=0; \quad \omega_2=\frac{\pi}{2}, \quad \omega_3=\frac{3\pi}{2};
$$

$$
\omega_2=\pi, \ \omega_3=\pi; \quad \omega_2=\frac{3\pi}{2}, \quad \omega_3=\frac{\pi}{2}.
$$

Институт механики АН Арм. ССР

Поступила 1.12.1981

ЛИТЕРАТУРА

1. **Шарлье К.** Небесная механика. М.: Наука, 1966, с. 458—459.
2. **Демин В. Г.** Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. М.: Наука, 1968, с. 93—99.
3. **Пуанкаре А.** Избранные труды, т. I. М.: Наука, 1971, с. 170—204.
4. **Баркин Ю. В.** Вычисление характеристических показателей периодических решений Пуанкаре и устойчивость вращательных движений небесных тел по законам Кассини.—Письма в астрономический журнал, 1979, т. 5, № 2.

Ա. Ս. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ԾԽԱԽԱՆՑՔ ՄՈԼՈՐԱԿԻ ԱՐԲԱՆՅԱԿԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

Դիտարկվում են նյութական կետի պարբերական շարժումները հավասարաչափ պտտվող եռառանցք պինդ մարմնի և բավականաչափ հեռու գտնվող պինդ մարմնի գրավիտացիոն դաշտում։ Պուանկարեի փոքր պարամետրի մեթոդի օգնությամբ ստացվել են կայունության անհրաժեշտ պայմանները տրված խնդրի համար։ Գտնվել են ուղեծրային փոփոխականների այն արժեքները, որոնք բավարարում են այդ պայմաններին։