

Механика

УДК 539.3

Р. К. АЛЕКСАНЯН, В. А. ЕДОЯН

О НАПРЯЖЕНИЯХ ОКОЛО ВЕРШИНЫ КЛИНА,
СИММЕТРИЧНО СОБРАННОГО ИЗ ИЗОТРОПНОГО И
АНИЗОТРОПНОГО МАТЕРИАЛОВ

Рассматривается задача теории упругости составного клина, изготовленного из изотропного и анизотропного клиньев, соединенных между собой вдоль общей грани и находящихся в условиях плоской деформации.

С помощью локальных решений исследуется поведение поля напряжений в окрестности вершины клина, когда на одной стороне клина выполняются условия упругой симметрии, а на другой—свободного края.

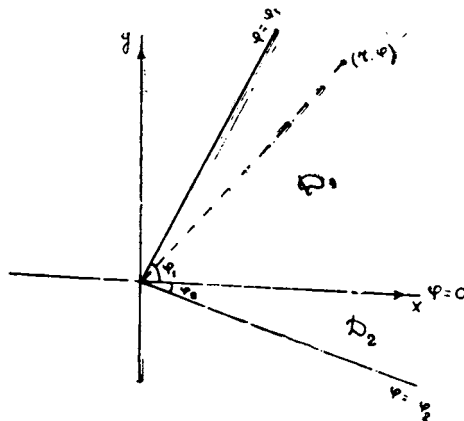
Для определения особенностей напряжений в вершине клина получено трансцендентное уравнение. Рассмотрены предельные случаи.

Исследованию напряженного состояния окрестности угловой точки поверхности соединения составного тела посвящены работы [1—12] и ряд других.

§ 1. Постановка задачи и основные соотношения

Области, соответствующие анизотропному и изотропному клиньям, обозначим через D_1 и D_2 (см. рисунок).

Тогда закон Гука соответственно примет вид [13]



$$\begin{aligned}\varepsilon_x^{(1)} &= \beta_{11}\sigma_x^{(1)} + \beta_{12}\sigma_y^{(1)} + \beta_{16}\sigma_{xy}^{(1)}, \\ \varepsilon_y^{(1)} &= \beta_{12}\sigma_x^{(1)} + \beta_{22}\sigma_y^{(1)} + \beta_{26}\sigma_{xy}^{(1)}, \\ \gamma_{xy}^{(1)} &= \beta_{16}\sigma_x^{(1)} + \beta_{26}\sigma_y^{(1)} + \beta_{66}\sigma_{xy}^{(1)},\end{aligned}\quad (1.1)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^{(2)} &= \frac{1}{2G} [\sigma_x^{(2)} - \nu(\sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(2)})], \\ \varepsilon_y^{(2)} &= \frac{1}{2G} [\sigma_y^{(2)} - \nu(\sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(2)})], \\ \gamma_{xy}^{(2)} &= \frac{1}{G} \sigma_{xy}^{(2)}.\end{aligned}\quad (1.2)$$

Компоненты напряжений определяются формулами

$$\sigma_x^{(i)} = \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial y^2}, \quad \sigma_y^{(i)} = \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy}^{(i)} = -\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x \partial y}, \quad (i=1, 2). \quad (1.3)$$

Здесь функции Φ_i ($i=1, 2$) удовлетворяют дифференциальным уравнениям [13]

$$\beta_{22} \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial x^4} - 2\beta_{26} \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial x^2 \partial y^2} + (2\beta_{12} + \beta_{66}) \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\beta_{16} \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial x \partial y^3} + \beta_{11} \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial y^4} = 0, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial^4 \Phi_2}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi_2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi_2}{\partial y^4} = 0. \quad (1.5)$$

На сторонах клина и на линии контакта выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} -\sigma_x^{(1)} \sin \varphi_1 + \sigma_{xy}^{(1)} \cos \varphi_1 &= 0 \\ -\sigma_{xy}^{(1)} \sin \varphi_1 + \sigma_y^{(1)} \cos \varphi_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{при } \begin{aligned} x &= r \cos \varphi_1, \\ y &= r \sin \varphi_1; \end{aligned} \\ & \left. \begin{aligned} \sigma_y^{(1)} &= \sigma_y^{(2)}, \quad \sigma_{xy}^{(1)} = \sigma_{xy}^{(2)} \\ U^{(1)} &= U^{(2)}, \quad V^{(1)} = V^{(2)} \end{aligned} \right\} \text{при } y=0; \\ & \sigma_{r\varphi}^{(2)} = 0, \quad V_{\varphi}^{(2)} = 0 \quad \text{при } \begin{aligned} x &= r \cos \varphi_2, \\ y &= -r \sin \varphi_2. \end{aligned} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Согласно работам [14—16] условия непрерывности перемещений на линии контакта и условие отсутствия нормального перемещения $V_{\varphi}^{(2)}$, на линии симметрии заменяются эквивалентными им условиями

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^{(1)}}{\partial x} &= \frac{\partial U^{(2)}}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 V^{(1)}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V^{(2)}}{\partial x^2} \quad \text{при } y=0, \\ \frac{\partial^2 V_{\varphi}^{(2)}}{\partial r^2} &= 0 \quad \text{при } \begin{aligned} x &= r \cos \varphi_2, \\ y &= -r \sin \varphi_2. \end{aligned} \end{aligned}$$

Используя (1.1)–(1.3) и учитывая, что

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial x}, \quad \varepsilon_y^{(i)} = \frac{\partial V^{(i)}}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}^{(i)} = \frac{\partial U^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial V^{(i)}}{\partial x} \quad (i=1,2),$$

условия (1.6) можем выразить через функции напряжений Φ_i ($i=1,2$):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} \sin \varphi_1 + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} \cos \varphi_1 &= 0, \\ \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} \sin \varphi_1 + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} \cos \varphi_1 &= 0, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & \text{при} \\ & x = r \cos \varphi_1, \\ & y = r \sin \varphi_1; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x \partial y};$$

$$\beta_{11} \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + b_{12} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} - b_{16} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} \right) = \frac{1}{2G} \left[m \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} - (1-m) \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} \right];$$

$$\beta_{11} \left[\frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial y^3} - 2b_{16} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial y^2 \partial x} + (b_{12} + b_{66}) \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial y \partial x^2} - b_{26} \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial x^3} \right] =$$

$$= \frac{1}{2G} \left[m \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial y^3} + (1+m) \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial x^2 \partial y} \right] \quad \text{при} \quad y=0; \quad (1.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} \right) = 0 \quad \text{при} \quad \begin{aligned} & x = r \cos \varphi_2, \\ & y = -r \sin \varphi_2; \end{aligned}$$

$$\frac{m}{r^3} \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial \varphi^3} + \frac{m+1}{r} \frac{\partial^3 \Phi_2}{\partial r^2 \partial \varphi} - \frac{2-m}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial r \partial \varphi} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} = 0,$$

где

$$b_{ij} = \beta_{ij} / \beta_{11} \quad (i, j=1, 2, 6),$$

$m = 1 - \nu$, ν — коэффициент Пуассона.

§ 2. Метод решения

Представляя решение уравнения (1.4) в виде [3]

$$\Phi_1(x, y) = A(x + \delta y)^{\lambda+1},$$

получаем относительно δ следующее уравнение:

$$\delta^4 - 2b_{16}\delta^3 + (2b_{12} + b_{66})\delta^2 - 2b_{26}\delta + b_{42} = 0. \quad (2.1)$$

Если корни этого уравнения простые, то решение представляется

$$\Phi_1(x, y) = \sum_{k=1}^4 A_k(x + \delta_k y)^{\lambda+1}. \quad (2.2)$$

В случае совпадения корней уравнения (2.1) решение уравнения (1.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y) = & C_1(x + \delta y)^{\lambda+1} + C_2(x + \bar{\delta}y)^{\lambda+1} + C_3(x + \bar{\delta}y)(x + \delta y)^{\lambda} + \\ & + C_4(x + \delta y)(x + \bar{\delta}y)^{\lambda}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Решение уравнения (1.2) будет

$$\begin{aligned} \Phi_2(x, y) = & B_1(x + iy)^{\lambda+1} + B_2(x - iy)^{\lambda+1} + B_3(x + iy)^{\lambda}(x - iy) + \\ & + B_4(x - iy)^{\lambda}(x + iy), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где A_k, B_k, C_k ($k=1, 2, 3, 4$) — неопределенные постоянные.

В полярной системе координат (2.3) и (2.4) можно представить соответственно в виде

$$\Phi_1^* = (r \cdot R)^{\lambda+1} [K \cos(\lambda+1)\theta + L \sin(\lambda+1)\theta + T \cos(\lambda-1)\theta + H \sin(\lambda-1)\theta], \quad (2.5)$$

$$\Phi_2^* = r^{\lambda+1} [M \cos(\lambda+1)\varphi + N \sin(\lambda+1)\varphi + E \cos(\lambda-1)\varphi + F \sin(\lambda-1)\varphi], \quad (2.6)$$

где приняты следующие обозначения:

$$K = C_1 + C_2, \quad T = C_3 + C_4, \quad M = B_1 + B_2,$$

$$L = i(C_1 - C_2), \quad H = i(C_3 - C_4), \quad N = i(B_1 - B_2),$$

$$E = B_3 - B_4, \quad F = i(B_3 - B_4),$$

$$R = \sqrt{(\cos \varphi + \xi \sin \varphi)^2 + \eta^2 \sin^2 \varphi}, \quad \theta = \arg(\cos \varphi + \xi \sin \varphi + i \eta \sin \varphi).$$

Подставляя (2.2), (2.4) в (1.8), получаем однородную алгебраическую систему относительно постоянных A_k и B_k ($k=1, 2, 3, 4$). Из условия существования нетривиального решения получается трансцендентное уравнение относительно параметра λ , в котором содержатся постоянные изотропного и анизотропного клиньев, а также угла разворота φ_1 и φ_2 .

Задача об особенностях напряжений в вершине составного клина сводится к нахождению корня λ_1 трансцендентного уравнения с наименьшей действительной частью в полосе $0 < \text{Re} \lambda < 1$.

Подробнее рассмотрим случай, когда уравнение (2.1) имеет двукратные корни:

$$\delta = \xi + i\eta, \quad \bar{\delta} = \xi - i\eta.$$

Легко видеть, что тогда имеют место

$$b_{16} = 2\xi, \quad 2b_{12} + b_{66} = \xi^2 + \eta^2,$$

$$b_{26} = 2\xi(\xi^2 + \eta^2), \quad b_{22} = (\xi^2 + \eta^2)^2. \quad (2.7)$$

Подставляя выражения (2.3), (2.4), (2.6) в условия (1.7), а также учитывая (2.7), после некоторых преобразований получаем следующую систему:

$$C_1^+ K + S_1^+ L + C_1^- T + S_1^- H = 0, \quad \lambda + S_1^+ K - \lambda + C_1^+ L + \lambda - S_1^- T - \lambda - C_1^- H = 0,$$

$$S_2^+ M + C_2^+ N = 0, \quad S_2^- E + C_2^- F = 0, \quad K + T - M - E = 0, \quad (2.8)$$

$$\lambda + \xi K + \lambda + \eta L + \lambda + \xi T + \lambda - \eta H - \lambda + N - \lambda - F = 0,$$

$$\begin{aligned} \lambda + K - (4m^* - \lambda^+)T - \mu\lambda + M + \mu(4m - \lambda^+)E &= 0, \\ \lambda + \xi K + \lambda^+ \eta L - \xi(4m^* - \lambda^+)T + \eta(4m^* + \lambda^-)H - \mu\lambda + N - \mu(4m + \lambda^-)F &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} C_{\mp}^{\pm} &= \cos(\lambda \pm 1)\theta_1, & C_{\mp}^{\pm} &= \cos(\lambda \pm 1)\varphi_2, \\ S_{\mp}^{\pm} &= \sin(\lambda \pm 1)\theta_1, & S_{\mp}^{\pm} &= \sin(\lambda \pm 1)\varphi_2, \\ \lambda^{\pm} &= \lambda \pm 1, & m^* &= 1 - \nu^* = \eta^2/\xi^2 + \eta^2 - b_{12}, \\ \mu &= 1/2G\beta_{11}(\xi^2 + \eta^2 - b_{12}), & \theta_1 &= \theta|_{\varphi=\varphi_1}. \end{aligned}$$

Приравнивая к нулю определитель однородной системы (2.8), получаем трансцендентное уравнение:

$$\begin{aligned} & \eta(\mu - 1)(\lambda^2 \sin^2 \theta_1 - \sin^2 \lambda \theta_1) \{ [4\mu m - (\mu - 1)] \sin 2\lambda \varphi_2 - \\ & - \lambda(\mu - 1) \sin 2\varphi_2 \} + 2\mu m m^* \{ (\lambda \sin 2\theta_1 - \sin 2\lambda \theta_1) [(1 - \xi^2) \times \\ & \times \cos 2\varphi_2 - (1 + \xi^2) \cos 2\lambda \varphi_2 - 2\xi \sin 2\varphi_2] + [\eta^2 (\lambda \sin 2\theta_1 + \\ & + \sin 2\lambda \theta_1) - 4\xi \eta \lambda \sin^2 \theta_1] (\cos 2\varphi_2 + \cos 2\lambda \varphi_2) - 4\eta (\sin 2\lambda \varphi_2 \times \\ & \times \sin^2 \lambda \theta_1 + \lambda \sin 2\varphi_2 \sin^2 \theta_1) \} + 4m^* \eta (\lambda \sin 2\varphi_2 + \sin 2\lambda \varphi_2) [(\mu - 1) \sin^2 \lambda \theta_1 + \\ & + m^*] = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

§ 3. Обсуждение результатов

Общее аналитическое исследование существования корня трансцендентного уравнения (2.9) с наименьшей действительной частью в полосе $0 < \operatorname{Re} \lambda < 1$, а следовательно, установление наличия особенности напряжений в вершине клина в зависимости от параметров задачи невозможны. Однако при фиксированных значениях некоторых параметров можно численным методом выявить влияние остальных параметров на особенность напряжений в вершине клина.

В работах [3] и [14] показано, что задачи об определении порядка особенности напряжений в вершине однородного анизотропного клина в случае двукратных корней уравнений (2.1) сводится к аналогичной задаче для «приведенного» изотропного клина.

Из представления (2.8) видно, что условия непрерывности касательного напряжения и нормального перемещения линии контакта невозможно привести к аналогичным условиям для «приведенного» составного изотропного клина, а остальные условия приводятся — с помощью введенных обозначений. Тем самым вопрос о характере напряжений в вершине составного анизотропного клина не приводится к аналогичному вопросу для «приведенного» составного изотропного клина.

В частном случае из (2.9) при $\xi=0$, $\eta=1$ получается трансцендентное уравнение, соответствующее случаю изотропных материалов [5]. При $\mu \rightarrow \infty$ ($G \rightarrow 0$) получается

$$\sin^2 \lambda \theta_1 - \lambda^2 \sin^2 \theta_1 = 0,$$

что совпадает с уравнением для случая свободной окрестности вершины однородного анизотропного клина [3].

При $\mu \rightarrow 0$ ($G \rightarrow \infty$) получается

$$\lambda^2 \sin^2 \theta_1 - (4m^* - 1) \sin^2 \lambda \theta_1 - 4m^{*2} = 0,$$

что совпадает с уравнением в случае частично заделанной окрестности вершины однородного анизотропного клина [4].

В заключение авторы выражают благодарность проф. В. С. Саркисяну за помощь в ходе выполнения работы.

ЕрПИ им. К. Маркса

Поступила 8.11.1981

ЛИТЕРАТУРА

1. Аксентян О. К. Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра.— ПММ. 1967, т. 31, вып. 1.
2. Аксентян О. К., Лущик О. Н. Об условиях ограниченности напряжений у ребра составного клина.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1978, № 5.
3. Алексанян Р. К. Об одном классе решений уравнений плоской задачи теории упругости анизотропного тела.— ДАН Арм. ССР, 1975, т. 61, № 5.
4. Едоян В. А. О напряженном состоянии окрестности угловой точки контура с частично соединенным жестким телом в плоской задаче теории упругости для анизотропного тела.— ДАН Арм. ССР, 1980, т. 71, № 1, с. 22—27.
5. Карамян К. О., Алексанян Р. К., Едоян В. А. Влияние угла наклона боковых граней облицовочных плит на прочность совместной их работы с бетоном при температурных воздействиях.— Тр. Арм. НИИСА, 1976, вып. 26, с. 55—69.
6. Лущик О. Н. О поведении корней уравнения, определяющего особенность напряженного состояния в окрестности вершины составного клина.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1975, № 5, с. 82—93.
7. Михайлов С. Е. Сингулярность напряжений в окрестности ребра в составном неоднородном анизотропном теле и некоторые приложения к композитам.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1975, № 5, с. 101—110.
8. Чобанян К. С. Явление малонапряженности края поверхности контакта нагруженного составного тела. Открытие № 102.— Бюллетень открытия и изобретения, 1971, № 36.
9. Bogy D. B. Two-edge bonded elastic wedges of different material and wedges angles under surface traction.—I. appl. mech. 1971, v. 38, p. 1—10.
10. Dempsey I. P., Sinclair G. B. On the stress singularities in the plane elasticity of the composite wedge.—I. Elasticity, 1979, v. 9, №4, p. 373—391.
11. Hein V. L., Erdogan F. Stress singularities in a two materials wedge.—Int. J. Fract. mech. 1971, v. 7, № 3, p. 317—329.
12. Theococarus P. S. The order of singularities at a multiwedge corner of a composite plate.—Int. J. Eng. sci. 1974, v. 12, №2, p. 107—120.
13. Лехницкий Л. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.-Л.: Изд-во техн.-теор. лит., 1977.
14. Ду-Цин-Хуа. Плоская задача теории упругости неоднородной изотропной среды.—

- В сб. Проблемы механики сплошной среды (К семидесятилетию академика Мусхелишвили Н. И.). М.: Изд-во АН СССР, 1961.
15. Саркисян В. С. Некоторые задачи математической теории упругости анизотропного тела. Изд-во Ереван. ун-та, 1976.
16. Чобанян К. С. О функции напряжений для плоской задачи теории упругости составного тела.—ДАН Арм. ССР, 1961, т. 32, № 2, с. 69—77.

Ռ. Կ. ԱԼԵՔՍԱՆՅԱՆ, Վ. Ա. ԵԴՅԱՆ

ԻԿՈՏՐՈՊ ԵՎ ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ՆՅՈՒԹԵՐԻՑ ՍԻՄԵՏՐԻԿՈՐԵՆ ՀԱՎԱՔՎԱԾ ՍԵՊԻ ԳԱԿԱԹԻ ՇՐՋԱԿԱՅՔԻ ԼԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ օ փ օ մ

Դիտարկված է առաձգականության տեսության հարթ խնդիրը իզոտրոպ և անիզոտրոպ սեպերից բաղկացած բաղադրյալ սեպի համար:

Տեղական լարումների օգնությամբ ուսումնասիրված է լարումների վարքը սեպի գագաթի շրջակայքում, երբ մի եզրում բավարարված են առաձգական սիմետրիայի, իսկ մյուսում՝ ազատ եզրի պայմանները:

Անիզոտրոպ նյութին համապատասխանող բնութագրիչ հավասարման համընկնող արժատների դեպքում ստացված է սեպի գագաթում եզակիության կարգը որոշող պարամետրի նկատմամբ տրանսցենդենտ հավասարում:

Դիտարկված են սահմանային դեպքեր: