

НАЦИОНАЛЬНАЯ АКАДЕМИЯ НАУК АРМЕНИИ  
ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

**АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ  
СПЛОШНОЙ СРЕДЫ**

Материалы V международной конференции  
02-07 октября 2017, Цахкадзор, Армения

ЕРЕВАН – 2017

УДК 531/534:06  
ББК 22.25  
А 437

**Институт механики НАН РА  
Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН  
Национальный комитет по теоретической и прикладной механике Армении  
Российский национальный комитет по теоретической и прикладной механике  
Национальный университет архитектуры и строительства Армении**

Сопредседатели: д.ф.-м.н. В.Н. Акопян (Армения)  
д.ф.-м.н. А.В. Манжиров (Россия)  
д.ф.-м.н. А.А. Гукасян (Армения)

Зам. председателя: д.ф.-м.н. А.В.Саакян (Армения), д.ф.-м.н. М.А.Сумбатьян (Россия)

Ученые секретари: к.ф.-м.н. Л.Л.Даштоян (Армения), к.ф.-м.н. Е.В.Мурашкин (Россия)

Ответственный редактор: д.ф.-м.н. В.Н. Акопян

Технический редактор: к.ф.-м.н. Г.З.Геворкян

Редактор: Ж.А.Авдалян

А 437

Актуальные проблемы механики сплошной среды. Материалы V международной конференции 02-07 октября 2017, Цахкадзор, Армения.- Ер.: НУАСА, 2017.- ... с.

В сборник включены доклады, представленные на V-ую международную конференцию «Актуальные проблемы механики сплошной среды», включающую специальную сессию, посвященную 60-летию юбилею иностранного члена НАН РА, профессора А.В.Манжирова.

УДК 531/534:06  
ББК 22.25

ISBN 978-9939-63-285-8

© ИМ НАН РА, 2017  
© ИПМех РАН, 2017  
© NUACA, 2017

# О ЛОКАЛИЗОВАННЫХ ПЛАНАРНЫХ КОЛЕБАНИЯХ В ОКРЕСТНОСТИ СВОБОДНОГО КРАЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ПОПЕРЕЧНО-ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ПЛАСТИНКИ

**Папян А.А., Саркисян С.В.**

**Аннотация.** Работа посвящена исследованию локализованных планарных колебаний пьезокерамической поперечно-поляризованной пластинки по допущениям гипотезы Кирхгофа с учётом компонент, характеризующих электрическое поле. Рассматривается существование локализованных планарных колебаний в окрестности свободного края, исследовано влияние пьезоэффекта на частоту локализованных планарных колебаний.

Задачи колебаний пьезокерамических пластин по допущениям гипотезы Кирхгофа и на основе уточнённой теории с учётом компонент, характеризующих электрическое поле, исследованы в работах [1-6].

В настоящей работе рассматриваются локализованные планарные колебания пьезокерамической поперечно-поляризованной пластинки на основе допущений Кирхгофа, где учитываются также компоненты, характеризующие электрическое поле. Показано, что наличие пьезоэффекта не оказывает влияние на частоту локализованных планарных колебаний в окрестности свободного края пластинки.

Рассмотрим пьезокерамическую пластинку постоянной толщины  $2h$  и поляризованной вдоль нормали срединной плоскости пластинки, которая в декартовой системе координат занимает область  $\{0 \leq x \leq a, 0 \leq y < \infty, |z| \leq h\}$ .

Примем для компонент вектора перемещения, какой-либо точки пластинки, допущения Кирхгофа, где учитываются члены, характеризующие электрическое поле:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - zw_{,x} + d_{15} \int_0^z E_1(x, y, \zeta, t) d\zeta \\ u_2(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - zw_{,y} + d_{15} \int_0^z E_2(x, y, \zeta, t) d\zeta, \quad u_3(x, y, z, t) = w(x, y, t) \end{aligned} \quad (1)$$

где  $u, v, w$  – перемещения срединной плоскости пластинки,  $E_1 = -\varphi_{,x}$ ,  $E_2 = -\varphi_{,y}$  – компоненты вектора напряжённости электрического поля,  $\varphi(x, y, z, t)$  – электрический потенциал,  $d_{15}$  – пьезоэлектрическая постоянная.

Уравнения планарных колебаний, когда лицевые поверхности пластинки ( $z = \pm h$ ) свободны от механических напряжений и электрический потенциал равен нулю, имеют следующий вид [7]:

$$\begin{aligned} \Delta u + \theta_1 (u_{,x} + v_{,y})_{,x} - d_{15} h (1 - \nu)^{-1} \Delta (J + m)_{,x} &= c_2^{-2} u_{,tt} - \rho d_{15} (1 + \nu) (hE)^{-1} (J + m)_{,xt} \\ \Delta v + \theta_1 (u_{,x} + v_{,y})_{,y} - d_{15} h (1 - \nu)^{-1} \Delta (J + m)_{,y} &= c_2^{-2} v_{,tt} - \rho d_{15} (1 + \nu) (hE)^{-1} (J + m)_{,yt} \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $c_2^2 = G / \rho$  – скорость сдвиговых волн,  $\theta_1 = (1 + \nu) / (1 - \nu)$ ,  $\Delta$  – двумерный оператор

$$\text{Лапласа, } J = h \left( \int_0^h \varphi(x, y, z, t) dz + \int_0^{-h} \varphi(x, y, z, t) dz \right), \quad m = - \int_{-h}^h z \varphi(x, y, z, t) dz.$$

$$\text{Представляя перемещения } u \text{ и } v \text{ в виде } u = P_{,x} + Q_{,y}; \quad v = P_{,y} - Q_{,x}, \quad (3)$$

где  $P = \psi - \chi_{15} (J + m)$ ,  $\chi_{15} = d_{15} / 2h$ ,  $c_1^2 = E / \rho (1 - \nu^2)$ ,  $\psi(x, y, t)$ ,  $Q(x, y, t)$  – динамические потенциалы [2, 3], из системы уравнений для планарных колебаний (2) придём к следующим автономным уравнениям:

$$\Delta P = c_1^{-2} P_{,tt}, \quad \Delta Q = c_2^{-2} Q_{,tt}. \quad (4)$$

К уравнениям (4) следует добавить уравнение электродинамики для поляризованной пьезокерамической пластинки, которое в случае, когда рассматриваются преимущественно планарные колебания, имеет вид:

$$\Delta\varphi + \gamma_0\varphi_{,zz} = 0, \quad \gamma_0 = (\epsilon_{33}(1-\nu) + 2d_{13}^2E) / (\epsilon_{11}(1-\nu) + d_{13}d_{15}E) \quad (5)$$

где  $\epsilon_{11}$ ,  $\epsilon_{33}$  – компоненты диэлектрической проницаемости.

Пусть заданы следующие граничные условия. Кромка пластинки  $y=0$  свободна от напряжений и электрический потенциал равен нулю [6]:

$$\sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{21} = 0, \quad \sigma_{23} = 0, \quad \varphi = 0 \quad \text{при } y = 0. \quad (6)$$

При  $y \rightarrow \infty$  выполняются условия затухания. На краях пластинки  $x=0, a$  заданы условия Навье, а электрический потенциал на этих краях равен нулю:

$$\sigma_{11} = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0 \quad (7)$$

Удовлетворяя решение уравнений (4) и (5) осредненным граничным условиям (7), условиям затухания и условиям на свободном краю  $y=0$  (6), получено уравнение относительно безразмерной частоты планарных колебаний  $\eta$  [6]. Показано, что при данных граничных условиях наличие в гипотезе Кирхгофа электрического поля не оказывает влияние на локализованные планарные колебания пьезокерамической пластинки. Частота локализованных планарных колебаний зависит от коэффициента Пуассона. В частности, при  $\nu = 0.25$ ,  $\eta = 0.8299$ . В случае, когда на свободном краю  $y=0$  пьезокерамической пластинки нормальная компонента вектора электрической индукции  $D_2$  равна нулю, для безразмерной частоты планарных колебаний пьезокерамической пластинки  $\eta$  будем иметь:

$$(2 - \eta)^2 - 4\sqrt{(1 - \theta\eta)(1 - \eta)} = 0, \quad \theta = 0.5(1 - \nu) \quad (8)$$

Таким образом, когда на свободном краю пластинки электрический потенциал или нормальная компонента вектора электрической индукции  $D_2$  равны нулю, наличие в гипотезе Кирхгофа электрического поля не оказывает влияние на локализованные планарные колебания пьезокерамической пластинки, а уравнение (8) является уравнением Рэлея относительно безразмерной частоты планарных колебаний [7].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Партон В.З. Кудрявцев Б.А. Магнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, Физматлит, 1988. 472с.
2. Belubekyan M.V. Mkrtychyan L.R. Vibration of transversely thin piezoelectric plates/ SPIE vol. 2441, pages 233-242.
3. Mkrtychyan L.R. On some problems of bending vibration of thin piezoceramic plates. Functional gradient materials and surface layers prepared by fine particles technology. 2001. pp. 281-288.
4. Амбарцумян С.А. Белубекян М.В. Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин. Ереван: Госуниверситет, 1991.143с.
5. Piliposyan G.T., Ghazaryan K.B. Localized bending vibrations of piezoelectric plates. Waves in Random and Complex Media. Vol. 21. №3. 2011. Pp. 418-433.
6. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги. // В сб.: «Проблемы механики тонких деформируемых тел». 2002. С.67-88.
7. Belubekyan M.V. «On the condition of planar localized vibrations appearance in the vicinity of the free edge of a thin rectangular plate» //Уч. записки ЕГУ, сер. Физика и Математика, 51:1 (2017), 42–45.

#### Сведения об авторах:

**Папян Арарат Артурович** - кандидат физ. мат. наук, научный сотрудник института механики НАН Армения, (374 93) 05 00 93, **E-mail:** [papyanararat11@gmail.com](mailto:papyanararat11@gmail.com).

**Саркисян Самвел Владимирович** – доктор физ. мат. наук, профессор, зав. кафедры механики, факультета математики и механики ЕГУ, (374 55) 73 13 13, **E-mail:** [vas@ysu.am](mailto:vas@ysu.am).