УДК 512.62

О ТРИМЕДИАЛЬНЫХ ОБРАТИМЫХ АЛГЕБРАХ

С.С. Давидов
(Ереванский государственный университет)
E-mail: davidov@ysu.am

В работе исследуются тримедиальные и дистрибутивные бинарные алгебры. Доказывается, что тримедиальная обратимая алгебра с одним идемпотентным элементом линейна над коммутативной лупой Муфанг.

Ключевые слова: бинарная алгебра, обратимая алгебра, медиальная алгебра, тримедиальная алгебра, дистрибутивная алгебра.

1°. Бинарная алгебра $(Q;\Sigma)$ называется медиальной, если в ней выполняется сверхтождество медиальности

$$X\big(Y(a,b),Y(c,d)\big)=Y(X(a,c),X(b,d)) \qquad (1)$$

Медиальные алгебры изучались различными авторами (Ацел, Сад, Стейн, Тойода, Брак, Медоч, Белоусов, Курош, Смит, Романовска, Кепка, Ежек, Мовсисян и др.) ([1-7]) под различными названиями: энтропийная, абелевая, бикоммутативная, бисимметричная алгебры. Медиальные алгебры связаны с понятием энтропии в теории информации ([5]), теорией тканей и номографией, а также находят приложения в кибернетике, экономике, физике и биологии.

В полиномиальной алгебре любой коммутативной группы (полугруппы) выполняется сверхтождество (1). Сверхтождеству медиальности удовлетворяет точное бинарное представление коммутативной полугруппы ([1]). Тривиальному сверхтождеству медиальности (т.е. при $X=Y$) удовлетворяют точные бинарные представления моноида, полугруппы и идемпотентной полугруппы.

Бинарная алгебра (без нульарных операций) тогда и только тогда медиальна, когда она обладает свойством суммируемосеи гомоморфизмов ([3],[5]). Сверхтождеству медиальности удовлетворяют модические алгебры связанные с аффинной и проективной геометриями. ([4])

Примеры. 1. Пусть $Q(+,\cdot)$ поле, для любых $x,y\in Q$ определим операции

$$A_t(x,y)=tx+(1-t)y,$$

где $t\in Q$ и 1-единица поля. Если $\Sigma=\{A_t|t\in Q\}$, то в соответствующей бинарной алгебре $(Q;\Sigma)$ выполняется сверхтождество медиальности.

2. Пусть $I\subseteq\mathbb{R}$ - (открытый, замкнутый, полузамкнутый, конечный или бесконечный) промежуток, а $k:I\to\mathbb{R}$ непрерывная и строго монотонная функция. Квазиарифметическим средним называется функция вида

$$M(x,y)=k^{-1}\left(\frac{k(x)+k(y)}{2}\right),\ \ x,y\in I.$$

Примерами квазиарифметических средних служат среднее арифметическое $(k(x)=x)$, среднее экспоненциальное $(k(x)=e^{cx},c\neq 0)$, среднее квадратичное $(k(x)=x^2)$, среднее геометрическое $(k(x)=\ln x)$ и т.д. Если Σ множество всех квазиарифметических средних определенных на I и относительно которых промежуток I замкнут, то алгебра (I,Σ) удовлетворяет тривиальному сверхтождеству медиальности ([8]):

$$M\big(M(x,y),M(u,v)\big)=M(M(x,u),M(y,v)).$$

Алгебра $(Q;\Sigma)$ называется коммутативной, если она удовлетворяет сверхтождеству коммутативности

$$X(x,y)=X(y,x).$$

ЛЕММА 1.1. В коммутативной медиальной алгебре $(Q;\Sigma)$ выполняются сверхтождества

$$X_1\big(X_2(x_1,x_2),X_2(x_3,x_4)\big)=X_{\varphi(1)}\Big(X_{\varphi(2)}\big(x_{\alpha(1)},x_{\alpha(2)}\big),X_{\varphi(2)}\big(x_{\alpha(3)},x_{\alpha(4)}\big)\Big),$$

для любых $\varphi\in S_2$, $\alpha\in S_4$, где S_n симметрическая группа.

Доказательство. Непосредственной проверкой.

Бинарная алгебра (Q,Σ) называется линейной над группоидом (моноидом, коммутативной лупой Муфанг, группой, абелевой группой) $(S,+)$, если $Q\subseteq S$ и каждая операция $A\in\Sigma$ может быть представлена в виде

$$A(x,y)=\big(\alpha_A(x)+\beta_A(y)\big)+t_A,$$

где α_A, β_A эндоморфизмы группоида (моноида, коммутативной лупы Муфанг, группы, абелевой группы) $(S,+)$, а t_A- некоторый элемент множества S. При этом эндоморфизмы α_A, β_A коммутируют между собой, а выделенный элемент t_A может принадлежать центру группы или ядру лупы.

Бинарная алгебра (Q,Σ) называется сократимой (делимой, обратимой), если для любых $A\in\Sigma$ и $a\in Q$ трансляции

$$R_{a,A}\colon x\to A(x,a);\qquad L_{a,A}\colon x\to A(a,x)$$

инъективны (сюръективны, биективны).

ТЕОРЕМА 1.2. Бинарная алгебра линейная над коммутативным моноидом является гомоморфным образом медиальной сократимой алгебры.

Доказательство. Пусть бинарная алгебра (Q,Σ) линейна над коммутативным моноидом $(S,+,0_S)$, т.е. для любой операции $A\in\Sigma$ имеем:

$$A(x,y)=\big(f_A(x)+g_A(y)\big)+t_A,$$

где $f_A,g_A\in End(S(+))$ и $f_Ag_B=g_Bf_A$, $f_Af_B=f_Bf_A$, $g_Ag_B=g_Bg_A$ для всех $A,B\in\Sigma$. Определим бинарную алгебру (S,Σ_S) на множестве S следующим образом:

$$X^S(x,y)=\big(f_A(x)+g_A(y)\big)+t_A,$$

для всех $x,y\in S$, $X\in\Sigma$, где $\Sigma_S=\{X^S|X\in\Sigma\}$.

Рассмотрим свободную алгебру $F_S(+,0,\alpha_A,\beta_A)$ над множеством S в многообразии алгебр сигнатуры $\{+,0,\alpha_X,\beta_X|X\in\Sigma\}$ (состоящей из одного бинарного, одного нульарного и $2|\Sigma|$ унарных символов) определяемых множеством тождеств:

$$(x+y)+z=x+(y+z),$$
$$x+y=y+x,$$
$$x+0=x,$$
$$\alpha_A(x+y)=\alpha_A(x)+\alpha_A(y)\ ,\qquad\qquad \forall A\in\Sigma$$

$$\beta_A(x+y)=\beta_A(x)+\beta_A(y), \qquad \forall A\in\Sigma$$
$$\alpha_A(0)=0, \qquad \forall A\in\Sigma$$
$$\beta_A(0)=0, \qquad \forall A\in\Sigma$$
$$\alpha_A\beta_B(x)=\beta_B\alpha_A(x),\ \alpha_A\alpha_B(x)=\alpha_B\alpha_A(x),\ \beta_A\beta_B(x)=\beta_B\beta_A(x) \qquad \forall A,B\in\Sigma.$$

Определим для каждого $X\in\Sigma$ операцию X^* на F_S следующим образом:
$$X^*(u,v)=\alpha_X(u)+\beta_X(v)+t_X$$
для всех $u,v\in F_S$. Получаем алгебру (F_S,Σ^*), где $\Sigma^*=\{X^*|X\in\Sigma\}$. Эта алгебра будет сократимой и медиальной.

Пусть h гомоморфизм, существующий поскольку $F_S(+,0,\alpha_A,\beta_A)$ свободная алгебра, из $F_S(+,0,\alpha_A,\beta_A)$ на $(S,+,0_S,f_A,g_A)$ удовлетворяющий условию $h(x)=x$ для всех $x\in S$. Тогда h будет гомоморфизмом алгебры (F_S,Σ^*) на алгебру (S,Σ_S). Действительно:
$$h\big(X^*(u,v)\big)=h(\alpha_Xu+\beta_Xv+t_X)=h(\alpha_Xu)+h(\beta_Xv)+h(t_X)=f_Xh(u)+g_Xh(v)+t_X= X_S(h(u),h(v)).$$
Искомая алгебра (Q,Σ), которая является подалгеброй алгебры (S,Σ_S) и $Q\subseteq S$, при гомоморфизме h будет образом некоторой подалгебры алгебры (F_S,Σ^*), которая также будет сократимой и медиальной. ■

2°. Бинарная алгебра называется дистрибутивной, если она удовлетворяет сверхтождествам дистрибутивности
$$X\big(x,Y(y,z)\big)=Y(X(x,y),X(x,z)),$$
$$X(Y(x,y),z)=Y(X(x,z),X(y,z)).$$
В [9] доказано, что дистрибутивная делимая алгебра линейна над коммутативной лупой Муфанг.

Терм t называется уравновешенным, если каждая предметная переменная имеет самое большее одно вхождение в t. Терм t будем называть n- арным, если число его предметных переменных не превосходит n, т.е. $var(t)\subseteq\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$, где $var(t)$ множество всех предметных переменных входящих в терм t. Множество всех функциональных переменных входящих в терм t будем обозначать через $[t]$. Если $x_1,x_2,\dots,x_n$ все предметные, а $X_1,X_2,\dots,X_k$ все функциональные переменные входящие в терм t, то данный терм t будем записывать виде $t(x_1,x_2,\dots,x_n;X_1,X_2,\dots,X_k)$. Иногда предметные или функциональные переменные в записи терма будем опускать.

В дальнейшем мы будем рассматривать термы все функциональные переменные которых бинарны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть t n- арный уравновешенный терм и $1\le i\le n$, такое, что $x_i\in var(t)$. Тогда для любых термов r, s и для любой операции $X\in\Sigma$ дистрибутивная алгебра (Q,Σ) удовлетворяет сверхтождеству
$$t(x_1,\dots,x_{i-1},X(r,s),x_{i+1},\dots,x_n)= X(t(x_1,\dots,x_{i-1},r,x_{i+1},\dots,x_n),t(x_1,\dots,x_{i-1},s,x_{i+1},\dots,x_n)).$$

Доказательство. Индукцией по длине терма t. Если длина терма равна 1, то t есть переменная и доказывать нечего. Пусть $t = A(p, q)$. Рассмотрим случай, когда $x_i \in var(p)$, второй случай аналогичен этому. Поскольку терм t уравновешенный, то $x_i \notin var(q)$. Следовательно для любого терма s имеет место сверхтождество

$$t(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_n) = A(p(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_n), q).$$

Согласно предположению индукции и дистрибутивному закону получим:

$$t(x_1, \dots, x_{i-1}, X(r, s), x_{i+1}, \dots, x_n) = A(p(x_1, \dots, x_{i-1}, X(r, s), x_{i+1}, \dots, x_n), q) =$$
$$A\big(X\big(p(x_1, \dots, x_{i-1}, r, x_{i+1}, \dots, x_n), p(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_n)\big), q\big) =$$
$$X\big(A(p(x_1, \dots, x_{i-1}, r, x_{i+1}, \dots, x_n), q), A(p(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_n), q)\big) =$$
$$X(t(x_1, \dots, x_{i-1}, r, x_{i+1}, \dots, x_n), t(x_1, \dots, x_{i-1}, s, x_{i+1}, \dots, x_n)). \blacksquare$$

Пусть (Q, Σ) бинарная алгебра, непустое подмножество $D \subseteq Q$ называется замкнутым, если удовлетворяет условию

$$A(a, b) \in D \vee A(b, a) \in D \ \rightarrow \ b \in D,$$

где $a \in D, b \in Q, A \in \Sigma$.

Пусть (Q, Σ) бинарная алгебра и $a, b, c \in Q$ определим следующие множества:

$$A_l(a, b, c) = \{x \in Q \,|\, (Q, \Sigma) \vDash X\big(Y(x, a), Y(b, c)\big) = Y(X(x, b), X(a, c))\},$$
$$A_r(a, b, c) = \{x \in Q \,|\, (Q, \Sigma) \vDash X\big(Y(a, b), Y(c, x)\big) = Y(X(a, c), X(b, x))\},$$
$$A_s(a, b, c) = \{x \in Q \,|\, (Q, \Sigma) \vDash X\big(Y(a, x), Y(b, c)\big) = Y(X(a, b), X(x, c))\},$$

где запись $(Q, \Sigma) \vDash X\big(Y(x, a), Y(b, c)\big) = Y\big(X(x, b), X(a, c)\big)$ означает, что алгебра (Q, Σ) удовлетворяет сверхтождеству $X\big(Y(x, a), Y(b, c)\big) = Y\big(X(x, b), X(a, c)\big)$.

ЛЕММА 2.2. Пусть (Q, Σ) дистрибутивная бинарная алгебра. Тогда

(1) $A_l(a, b, c)$, $A_r(a, b, c)$, $A_s(a, b, c)$ главные подалгебры (в смысле [1,6]) (Q, Σ) для всех $a, b, c \in Q$;

(2) если (Q, Σ) сократимая алгебра, то $A_l(a, b, c)$, $A_r(a, b, c)$, $A_s(a, b, c)$ замкнутые главные подалгебры (Q, Σ).

Доказательство. (1). Если $x, y \in A_l(a, b, c)$, то

$$X\big(Y(x, a), Y(b, c)\big) = Y(X(x, b), X(a, c)),$$
$$X\big(Y(y, a), Y(b, c)\big) = Y\big(X(y, b), X(a, c)\big).$$

Поэтому для любой операции $Z \in \Sigma$ согласно предложению 1 получим:

$$X\big(Y(Z(x, y), a), Y(b, c)\big) = Z\left(X\big(Y(x, a), Y(b, c)\big), X\big(Y(y, a), Y(b, c)\big)\right) =$$
$$= Z\left(Y\big(X(x, b), X(a, c)\big), Y\big(X(y, b), X(a, c)\big)\right) = Y(X(Z(x, y), b), X(a, c)),$$

т.е. $Z(x, y) \in A_l$.

(2). Пусть (Q, Σ) сократимая алгебра, $x \in A_l$, $y \in Q$, $Z(x, y) \in A_l$ для некоторого $Z \in \Sigma$. Тогда

$$Z\left(X\big(Y(x, b), Y(a, c)\big), X\big(Y(y, b), Y(a, c)\big)\right) = X\big(Y(Z(x, y), b), Y(a, c)\big) =$$
$$= Y\big(X(Z(x, y), a), X(b, c)\big) = Z\left(Y\big(X(x, a), X(b, c)\big), Y\big(X(y, a), X(b, c)\big)\right) =$$
$$= Z\left(X\big(Y(x, b), Y(a, c)\big), Y\big(X(y, a), X(b, c)\big)\right),$$

сократив полученное равенство на $X(Y(x, b), Y(a, c))$, получим

$$X(Y(y,b),Y(a,c)) = Y(X(y,a),X(b,c))$$

т.е. $y \in A_l$. ■

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Пусть t, s уравновешенные термы и $var(t) = var(s) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Пусть (Q,Σ) дистрибутивная алгебра, $1 \le i \le n$ и $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in Q$. Положим

$$H = \{x \in Q \mid (Q,\Sigma) \vDash t(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) = s(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n)\}.$$

Тогда, если $H \neq \emptyset$, то (H,Σ) подалгебра алгебры (Q,Σ). Более того, если (Q,Σ) сократимая алгебра, то (H,Σ) замкнутая подалгебра.

Доказательство. Пусть $x, y \in H$ и $X \in \Sigma$ покажем, что $X(x,y) \in H$. Для $a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n \in Q$ имеем

$$t(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) = s(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n),$$
$$t(a_1, \dots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \dots, a_n) = s(a_1, \dots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

поэтому используя предложение 2.1 получим

$$t(a_1, \dots, a_{i-1}, X(x,y), a_{i+1}, \dots, a_n) =$$
$$= X\big(t(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n), t(a_1, \dots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \dots, a_n)\big) =$$
$$= X\big(s(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n), s(a_1, \dots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \dots, a_n)\big) =$$
$$= s(a_1, \dots, a_{i-1}, X(x,y), a_{i+1}, \dots, a_n)).$$

Теперь, допустим (Q,Σ) сократимая алгебра и $X(x,y) \in H$, где $x \in H$, $y \in Q$, $X \in \Sigma$. Тогда

$$t(a_1, \dots, a_{i-1}, X(x,y), a_{i+1}, \dots, a_n) = s(a_1, \dots, a_{i-1}, X(x,y), a_{i+1}, \dots, a_n)$$

и

$$t(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) = s(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

Согласно предложению 2.1, получим

$$X\big(t(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n), t(a_1, \dots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \dots, a_n)\big) =$$
$$= X(s(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n), s(a_1, \dots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \dots, a_n)).$$

Поэтому, из сократимости имеем

$$t(a_1, \dots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \dots, a_n) = s(a_1, \dots, a_{i-1}, y, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

т.е. $y \in H$. ■

Если (Q,Σ) алгебра и S подмножество Q, то через $(\langle S\rangle,\Sigma)$ $((\langle S\rangle_c,\Sigma)$ $)$ обозначим главную (замкнутую) подалгебру (Q,Σ) порожденную множеством S.

ТЕОРЕМА 2.4. Пусть (Q,Σ) дистрибутивная алгебра, S непустое подмножество Q и для всех $a_1, \dots, a_n \in S$ и $A_1, \dots, A_k \in \Sigma$ выполняется равенство

$$t(a_1, \dots, a_n, A_1, \dots, A_k) = s\big(a_1, \dots, a_n, A_1, \dots, A_k\big),$$

где t, s уравновешенные термы удовлетворяющие условиям $var(t) = var(s) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и $[t] \subseteq \{X_1, \dots, X_k\}$, $[s] \subseteq \{X_1, \dots, X_k\}$. Тогда:

1. Алгебра $(\langle S\rangle,\Sigma)$ удовлетворяет сверхтождеству $s = t$;
2. Если (Q,Σ) сократимая алгебра, то $(\langle S\rangle_c,\Sigma)$ удовлетворяет сверхтождеству $s = t$.

Доказательство. Согласно предположению теоремы и предложению 2.3 имеем:

$t(x,a_2,\dots,a_n,A_1,\dots,A_k)=s(x,a_2,\dots,a_{n,}A_1,\dots,A_k)$ для всех $a_2,\dots,a_n\in S$, $A_1,\dots,A_k\in\Sigma$ и $x\in\langle S\rangle$. Аналогично $t(x,y,a_3,\dots,a_n,A_1,\dots,A_k)=s(x,y,a_3,\dots,a_{n,}A_1,\dots,A_k)$ для всех $a_3,\dots,a_n\in S$, $A_1,\dots,A_k\in\Sigma$ и $x,y\in\langle S\rangle$ и так далее. Если (Q,Σ) сократимая алгебра, поступаем аналогично взяв вместо $\langle S\rangle$ - $\langle S\rangle_c$. ■

Непустое подмножество $S\subseteq Q$ опорного множества бинарной алгебры (Q,Σ) называется медиальным, если для всех $a,b,c,d\in S$ выполняется сверхтождество медиальности (1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Пусть S непустое и медиальное подмножество опрного множества дистрибутивной алгебры (Q,Σ). Тогда подалгебра $(\langle S\rangle,\Sigma)$ будет медиальной.

Доказательство. Следует из теоремы 2.4, поскольку сверхтождество медиальности содержит уравновешенные термы с одинаковыми предметными и функциональными переменными. ■

Алгебра называется идемпотентной, если она удовлетворяет сверхтождеству идемпотентности

$$X(x,x)=x.$$

ЛЕММА 2.6. Дистрибутивная алгебра с одной сократимой операцией идемпотентна.

Доказательство. Пусть A – сократимая операция, тогда она будет идемпотентной поскольку из тождества $A(x,A(x,x))=A(A(x,x),A(x,x))$ согласно сократимости получим $x=A(x,x)$ для всех x. Далее, для любой операции X имеем:

$$A(x,X(x,x))=X(A(x,x),A(x,x))=A\left(X(x,A(x,x)),X(x,A(x,x))\right)=$$
$$A(X(x,x),X(x,x)).$$

Отсюда, согласно сократимости, получим $x=X(x,x)$. ■

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Сократимая дистрибутивная алгебра (Q,Σ) удовлетворяет сверхтождеству

$$X(Y(x,y),Y(z,x))=Y(X(x,z),X(y,x)). \qquad (2)$$

Доказательство. Согласно лемме 2.6 алгебра (Q,Σ) будет идемпотентной и следовательно удовлетворяет сверхтождеству

$$X(Y(x,z),x)=Y(x,X(x,z)).$$

Далее

$$X(Y(x,y),Y(z,x))=Y(X(Y(x,y),z),X(Y(x,y),x))=$$
$$X\left(Y(X(Y(x,y),z),Y(x,y)),Y(X(Y(x,y),z),x)\right)=$$
$$X\left(X\left(Y(x,y),Y(z,Y(x,y))\right),Y(X(Y(x,y),z),x)\right)=$$
$$X\left(X\left(Y(x,y),Y(z,Y(x,y))\right),X(Y(Y(x,y),x),Y(z,x))\right)=$$
$$X\left(X\left(Y(x,y),Y(Y(z,x),Y(z,y))\right),Y\left(X(Y(x,y),Y(z,x)),X(x,Y(z,x))\right)\right)=$$
$$X\left(Y\left(X(Y(x,y),Y(z,x)),X(Y(x,y),Y(z,y))\right),Y\left(X(Y(x,y),Y(z,x)),Y(X(x,z),x)\right)\right)=$$

$$X(Y\left(X\big(Y(x,y),Y(z,x)\big),Y(X(x,z),y)\right),Y\big(X(Y(x,y),Y(z,x)\big),Y(X(x,z),x))) =$$
$$Y\left(X\big(Y(x,y),Y(z,x)\big),X\big(Y(X(x,z),y),Y(X(x,z),x)\big)\right) =$$
$$Y\left(X\big(Y(x,y),Y(z,x)\big),Y\big(X(x,z),X(y,x)\big)\right).$$

Таким образом
$$X\big(Y(x,y),Y(z,x)\big) = Y\left(X\big(Y(x,y),Y(z,x)\big),Y\big(X(x,z),X(y,x)\big)\right),$$
и поскольку каждая операция идемпотентна, то
$$X\big(Y(x,y),Y(z,x)\big) = Y\left(X\big(Y(x,y),Y(z,x)\big),X\big(Y(x,y),Y(z,x)\big)\right),$$
поэтому
$$Y\left(X\big(Y(x,y),Y(z,x)\big),Y\big(X(x,z),X(y,x)\big)\right) = Y\left(X\big(Y(x,y),Y(z,x)\big),X\big(Y(x,y),Y(z,x)\big)\right),$$
после сокращения получим требуемое сверхтождество. ■

ЛЕММА 2.8. Если в сократимой дистрибутивной алгебре (Q,Σ) выполняется котождество
$$X\big(Y(a,b),Y(c,d)\big) = Y(X(a,c),X(b,d)),$$
то в ней выполняются также котождества
$$X\big(Y(b,a),Y(c,d)\big) = Y(X(b,c),X(a,d)),$$
$$X\big(Y(a,d),Y(b,c)\big) = Y(X(a,b),X(d,c)).$$

Доказательство. Согласно лемме 2.6 алгебра (Q,Σ) идемпотентна, поэтому для любой операции $Z \in \Sigma$ имеем
$$X\left(Y\big(a,Z(b,a)\big),Y(c,d)\right) = X\left(Z\big(Y(a,b),Y(a,a)\big),Y(c,d)\right) =$$
$$Z\left(X\big(Y(a,b),Y(c,d)\big),X\big(Y(a,a),Y(c,d)\big)\right) = Z\left(Y\big(X(a,c),X(b,d)\big),Y\big(X(a,c),X(a,d)\big)\right) =$$
$$Y\left(X(a,c),Z\big(X(b,d),X(a,d)\big)\right) = Y\big(X(a,c),X(Z(b,a),d)\big),$$
следовательно
$$a \in A_l(Z(b,a),c,d). \tag{3}$$

Далее,
$$X\left(Y\big(Z(b,a),Z(b,a)\big),Y(c,d)\right) = Y\big(X(Z(b,a),c),X(Z(b,a),d)\big),$$
т.е.
$$Z(b,a) \in A_l(Z(b,a),c,d). \tag{4}$$
Из (3), (4) и замкнутости $A_l(Z(b,a),c,d)$, получим $b \in A_l(Z(b,a),c,d)$, или
$$X\left(Y\big(b,Z(b,a)\big),Y(c,d)\right) = Y\big(X(b,c),X(Z(b,a),d)\big),$$
Это означает, что
$$Z(b,a) \in A_s(b,c,d), \tag{5}$$
Кроме того
$$b \in A_s(b,c,d), \tag{6}$$

следовательно, согласно замнкутости $A_s(b,c,d)$ получаем $a \in A_s(b,c,d)$, т.е.

$$X\big(Y(b,a),Y(c,d)\big) = Y(X(b,c),X(a,d)).$$

Аналогично доказывается второе котождество. ■

СЛЕДСТВИЕ 2.9. В дистрибутивной сократимой алгебре выполняется сверхтождество

$$X\big(Y(x,y),Y(y,z)\big)=Y(X(x,y),X(y,z)).$$

Доказательство. Согласно предложению 2.7 в дистрибутивной сократимой алгебре выполняется сверхтождество (2), поэтому из леммы 2.8 следует требуемое сверхтождество. ■

Бинарная алгебра называется тримедиальной если главная подалгебра порожденная любыми ее тремя элементами медиальна.

3°. ТЕОРЕМА 3.1. Каждая дистрибутивная сократимая алгебра (Q,Σ) тримедиальна.

Доказательство. Надо показать, что для всех $a,b,c,\in Q$ множество $\{a,b,c\}$ медиально, т.е. для всех $a_1,a_2,a_3,a_4\in\{a,b,c\}$ выполняеыся сверхтождество

$$X\big(Y(a_1,a_2),Y(a_3,a_4)\big)=Y\big(X(a_1,a_3),X(a_2,a_4)\big).$$

Если $a_1=a_2$, $a_1=a_3$, $a_2=a_4$, $a_3=a_4$, то утверждение следует из сверхтождеств идемпотентности и дистрибутивности. Если $a_1=a_4$, то требуемое сверхтождество следует из предложения 2.7, а в случае $a_2=a_3$ из следствия 2.9. ■

Отметим, что аналогичный результат существует и для делимой алгебры, а именно имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.2. Каждая дистрибутивная делимая алгебра тримедиальна.

Доказательство. [9].

Отметим, что для идемпотентной сократимой (делимой) алгебры тримедиальность и дистрибутивность равносильны.

ТЕОРЕМА 3.3. Тримедиальная обратимая алгебра (Q,Σ) с одним идемпотентным элементом линейна над коммутативной лупой Муфанг, т.е. существует коммутативная лупа Муфанг $Q(\circ)$ и системы ее автоморфизмы $\{f_X\}$ и $\{g_X\}$ такие, что для любых $x,y\in Q$ и любого $X\in\Sigma$ имеет место равенство

$$X(x,y)=f_X(x)\circ g_X(y),$$

причем $f_Xf_Y=f_Yf_X$, $g_Xg_Y=g_Yg_X$, $f_Xg_Y=g_Yf_X$ для всех $X,Y\in\Sigma$.

Доказательство. Пусть a идемпотентный элемент алгебры (Q,Σ). Введем систему операций на Q для каждого $X\in\Sigma$ следующим образом:

$$x\circ_X y=X\left(R_{X,a}^{-1}(x),L_{X,a}^{-1}(y)\right). \tag{7}$$

Очевидно, что каждая операция $(\circ_X)$ будет лупой с общей единицей a. Найдем связь между операциями $(\circ_X)$ и $(\circ_Y)$. Пусть $\alpha_X=R_{X,a}L_{X,a}^{-1}$, тогда

$$R_{Y,a}^{-1}R_{X,a}^{-1}\big(\alpha_X(x)\big)=R_{Y,a}^{-1}R_{X,a}^{-1}R_{X,a}L_{X,a}^{-1}(x)=R_{Y,a}^{-1}L_{X,a}^{-1}(x).$$

Поэтому

$$(\alpha_X(x)\circ_X x)\circ_Y(y\circ_X z)=Y\left(R_{Y,a}^{-1}(\alpha_X(x)\circ_X x),L_{Y,a}^{-1}(y\circ_X z)\right)=$$

$$Y\left(R_{Y,a}^{-1}\left(X\left(R_{X,a}^{-1}(\alpha_X(x)),L_{X,a}^{-1}(x)\right)\right),L_{Y,a}^{-1}\ \left(X\left(R_{X,a}^{-1}(y),L_{X,a}^{-1}(z)\right)\right)\right)=$$
$$Y\left(X\left(R_{Y,a}^{-1}L_{X,a}^{-1}\ (x),R_{Y,a}^{-1}L_{X,a}^{-1}\ (x)\right),X\left(L_{Y,a}^{-1}\ R_{X,a}^{-1}(y),L_{Y,a}^{-1}\ L_{X,a}^{-1}(z)\right)\right)=$$
$$X\left(Y\left(R_{Y,a}^{-1}R_{X,a}^{-1}R_{X,a}L_{X,a}^{-1}\ (x),L_{Y,a}^{-1}\ R_{X,a}^{-1}(y)\right),Y\left(R_{Y,a}^{-1}L_{X,a}^{-1}(x),L_{Y,a}^{-1}\ L_{X,a}^{-1}(z)\right)\right)=$$
$$X\left(Y\left(R_{X,a}^{-1}R_{Y,a}^{-1}(\alpha_X(x)),R_{X,a}^{-1}L_{Y,a}^{-1}\ (y)\right),Y\left(L_{X,a}^{-1}R_{Y,a}^{-1}(x),L_{X,a}^{-1}L_{Y,a}^{-1}\ (z)\right)\right)=$$
$$X\left(R_{X,a}^{-1}(\alpha_X(x)\circ_Y y),L_{X,a}^{-1}(x\circ_Y z)\right)=(\alpha_X(x)\circ_Y y)\circ_X (x\circ_Y z).$$
Следовательно, согласно [9] лупы $(\circ_X)$ и $(\circ_Y)$ будут совпадать $(\circ_X)=(\circ_Y)=(\circ)$ и как доказано в [10] лупа $(\circ)$ будет коммутативной лупой Муфанг. Далее,
$$R_{X,a}(x\circ y)=R_{X,a}\left(X\left(R_{X,a}^{-1}(x),L_{X,a}^{-1}(y)\right)\right)=X\left(a,X\left(R_{X,a}^{-1}(x),L_{X,a}^{-1}(y)\right)\right)=$$

$$X\left(X(a,a),X\left(R_{X,a}^{-1}(x),L_{X,a}^{-1}(y)\right)\right)=X\left(X\left(a,R_{X,a}^{-1}(x)\right),X\left(a,L_{X,a}^{-1}(y)\right)\right)=X\left(x,R_{X,a}L_{X,a}^{-1}(y)\right),$$
таким образом
$$R_{X,a}(x\circ y)=X\left(x,R_{X,a}L_{X,a}^{-1}(y)\right).$$
Поэтому
$$R_{X,a}(x\circ y)=X\left(x,R_{X,a}L_{X,a}^{-1}(y)\right)=X\left(R_{X,a}^{-1}R_{X,a}(x),L_{X,a}^{-1}L_{X,a}R_{X,a}L_{X,a}^{-1}(y)\right)=$$
$$X\left(R_{X,a}^{-1}R_{X,a}(x),L_{X,a}^{-1}R_{X,a}(y)\right)=R_{X,a}(x)\circ R_{X,a}(y).$$
Таким образом $R_{X,a}$ автоморфизм лупы $(\circ)$. Аналогично проверяется, что $L_{X,a}$ также будет автоморфизмом лупы $(\circ)$. Если обозначить $f_X=R_{X,a}$ и $g_X=L_{X,a}$, то согласно (7), получим
$$X(x,y)=f_X(x)\circ g_X(y).$$
Остается доказать, что автоморфизмы f_X и g_X коммутируют между собой для всех $X,Y\in\Sigma$.
$$R_{X,a}L_{Y,a}(x)=X(L_{Y,a},a)=X(Y(a,x),Y(a,a))=Y(X(a,a),X(x,a))=L_{Y,a}R_{X,a}(x).$$
Аналогично проверяются остальные равенства. ■

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мовсисян Ю.М. *Сверхтождества в алгебрах и многообразиях* // УМН, 1988, т.53, стр.61-114.
2. Jezek J., Kepka T. *Medial groupoids*. - Praha, 1983.
3. Курош А.Г. *Общая алгебра.* - М. Наука, 1974.
4. Romanowska A.B., Smith J.D.H. *Modes*. - Singapore: World Scientific,2002.
5. Smith J.D.H. *Entropy, character, theory and centrality of finite quasigroups*, // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.,1990,v.108, p.435-443.

6. Мовсисян Ю.М. *Введение в теорию алгебр со сверхтождествами.* - Ереван. Изд. ЕГУ, 1986.
7. Movsisyan Yu.M. *Hyperidentities and hypervarieties* // Scientiae Mathematicae Japonicae 54, 3(2001), 595-640.
8. Ацел Я.,Домбр Ж., *Функциональные уравнения с несколькими переменными.* - М.: Физматлит,2003.
9. Мовсисян Ю.М.,Давидов С.С., *Об алгебрах со сверхтождествами дистрибутивности.* // Межвузовский сб. научных трудов, Математика, Ереван, N3,1986, стр.5-26.
10. Jezek J., Kepka T.,Nemec P., *Distributive groupoids.* - Praha, 1981.

Материал поступил в редакцию

ԵՐԵՔՄԵԴԻԱԼ ՀԱԿԱԴԱՐՁԵԼԻ ՀԱՆՐԱՀԱՇԻՎՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ս. Ս. Դավիդով

Աշխատանքում ուսումնասիրվում են երեքմեդիալ և բաշխական հանրահաշիվներ: Ապացուցվում է, որ երեքմեդիալ հակադարձելի հանրահաշիվը գծային է տեղափոխելի Մուֆանգի լուպայի նկատմամբ:

Առանցքային բառեր. երկտեղ հանրահաշիվ, հակադարձելի հանրահածիվ, մեդիալ հանրահաշիվ, երեքմեդիալ հանրահաշիվ, բաշխական հանրահաշիվ:

ON TRIMEDIAL INVERTIBLE ALGEBRAS

S.S.Davidov

In this paper we study trimedial algebras and distributive algebras. We prove that trimedial Invertible algebra with idempotent element is linear algebra on a commutative Moufang loop.

Keywords: binary algebra, invertible algebra, medial algebra, trimedial algebra, disdtributive algebra.