Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 6, 2015, стр. 34-45.

СВЕРХТОЖДЕСТВА СЛАБО ИДЕМПОТЕНТНЫХ РЕШЕТОК

Д. С. ДАВИДОВА, Ю. М. МОВСИСЯН

Европейская региональная академия, Армения
Ереванский государственный университет
E-mails: *di.davidova@yandex.ru*, *yurimovsisyan@yahoo.com*

Аннотация. В данной работе характеризуются сверхтождества многообразия слабо идемпотентных решеток, которое является нильпотентным замыканием многообразия решеток. Доказывается существование конечного базиса для таких сверхтождеств.

MSC2010 numbers: 03B15, 08A05, 03C05, 03C85, 06A99.

Ключевые слова: сверхтождество; слабо идемпотентная полурешетка; слабо идемпотентная решетка; слабо идемпотентная квазирешетка.

1. Введение

Имеются различные расширения классического понятия решетки. В работах [1], [2] вводится понятие слабо ассоциативной решетки, а в работах [3] - [5] - алгебры с системой тождеств, которые мы называем слабо идемпотентными решетками.

Определение 1.1. *Алгебра с одной бинарной операцией $(L; \wedge)$ называется слабо идемпотентной полурешеткой, если она удовлетворяет следующим тождествам:*

(1.1) $$a \wedge b = b \wedge a, \quad \textit{(коммутативность)}$$

(1.2) $$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c), \quad \textit{(ассоциативность)}$$

(1.3) $$a \wedge (b \wedge b) = a \wedge b. \quad \textit{(слабая идемпотентность)}$$

Добавив тождество идемотентности: $a \wedge a = a$, получим полурешетку. Множество всех идемпотентных элементов каждой слабо идемпотентной полурешетки образует полурешетку.

Определение 1.2. *(см. [3] - [5]) Алгебра $(L; \wedge, \vee)$ с двумя бинарными операциями называется слабо идемпотентной решеткой, если ее редукты $(L; \wedge)$ и*

$(L;\vee)$ *являются слабо идемпотентными полурешетками, а также выполняются следующие тождества:*

$$a \wedge (b \vee a) = a \wedge a, a \vee (b \wedge a) = a \vee a, \text{ (слабое поглощение)} \tag{1.4}$$

$$a \wedge a = a \vee a. \text{ (уравненность)} \tag{1.5}$$

Множество всех идемпотентов слабо идемпотентной решетки будет решеткой. Существуют алгебры, являющиеся слабо идемпотентными решетками, но не являющиеся решетками.

Например, $(Z \setminus \{0\}; \wedge, \vee)$, где $x \wedge y = (|x|, |y|)$ и $x \vee y = [|x|, |y|]$, для которых $(|x|, |y|)$ и $[|x|, |y|]$ – соответственно наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное элементов $|x|$ и $|y|$ является слабо идемпотентной решеткой, но не будет решеткой, поскольку для отрицательных x имеем: $x \wedge x \neq x$.

Скажем, что слабо идемпотентная решетка $(L; \wedge, \vee)$ дистрибутивна, если она удовлетворяет обоим тождествам дистрибутивности:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z).$$

Каждой слабо идемпотентной решетке соответствует квазипорядок θ, который определяется следующим образом:

$$x\theta y \leftrightarrow x \wedge y = x \wedge x.$$

Заметим, что операции слабо идемпотентной решетки сохраняют ее квазипорядок.

Напомним, что сверхтождество – формула второго порядка следующего вида:

$$\forall X_1, \ldots, X_m \forall x_1, \ldots, x_n (w_1 = w_2),$$

где $X_1, \ldots, X_m$ – функциональные переменные, а $x_1, \ldots, x_n$ – предметные переменные в словах (термах) w_1, w_2. Сверхтождества обычно записываются без кванторных приставок, т.е. как равенства: $w_1 = w_2$. Скажем, что в алгебре $(Q; F)$ выполняется сверхтождество $w_1 = w_2$, если данное равенство справедливо когда каждая функциональная и каждая предметная переменные заменены соответственно на произвольную операцию соответствующей арности из F и на произвольный элемент из Q (см. [6] – [8]).

Очевидно, что слабо идемпотентная решетка $L = (L; \wedge, \vee)$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда в ней выполняется следующее сверхтождество:

$$X(Y(x, y), z) = Y(X(x, z), X(y, z)).$$

Характеризации сверхтождеств многообразий решеток, модулярных решеток, дистрибутивных решеток, булевых, а так же деморгановых алгебр были даны в работах [7]– [12]. О базисе сверхтождеств в термальных (полиномиальных) алгебрах см. [13] – [15]. О приложении сверхтождеств в дискретной математике см. [16].

Скажем, что сверхтождество выполняется в многообразии V, если данное сверхтождество справедливо в каждой алгебре многообразия V. В таком случае данное сверхтождество будет называться сверхтождеством многообразия V.

Сверхтождество (или тождество) $w_1 = w_2$ называется однородным (или регулярным по А. И. Мальцеву), если в слова w_1 и w_2 входят одни и те же предметные переменные. Каждое сверхтождество многообразия слабо идемпотентных решеток однородно. В настоящей работе характеризуются сверхтждества многообразия слабо идемпотентных решеток.

2. Неидемпотентные функции Плонка

Алгебру $\mathfrak{U} = (U; \Sigma)$ назовем суммой своих попарно непересекающихся подалгебр $(U_i; \Sigma)$, где $i \in I$, если справедливы следующие условия (ср. [17]-[19]):
i) $U_i \cap U_j = \emptyset$, для всех $i, j \in I, i \neq j$;
ii) $U = \bigcup_{i \in I} U_i$;
iii) На множестве индексов I существует отношение "$\leq$"такое, что $(I; \leq)$ – верхняя полурешетка со следующими свойствами;
iv) если $i \leq j$, то существует гомоморфизм $\varphi_{i,j} : (U_i; \Sigma) \mapsto (U_j; \Sigma)$, где $\varphi_{i,i}(x) = F_t(x, \ldots, x)$ для любой операции $F_t \in \Sigma$, $x \in U_i$ и $\varphi_{i,j} \cdot \varphi_{j,k} = \varphi_{i,k}$, $i \leq j \leq k$;
v) для всех $A \in \Sigma$ и для всех $x_1, \ldots, x_n \in Q$ справедливо равенство:

$$A(x_1, \ldots, x_n) = A(\varphi_{i_1,i_0}(x_1), \ldots, \varphi_{i_n,i_0}(x_n)),$$

где арность $|A| = n, x_1 \in U_{i_1}, \ldots, x_n \in U_{i_n}, i_1, \ldots, i_n \in I, i_0 = sup\{i_1, \ldots, i_n\}$.

Заметим, что однородное тождество, справедливое во всех попарно непересекающихся подсистемах, справедливо и на их сумме, что непосредственно следует из пункта v) определения. Следовательно, каждое однородное сверхтождество, справедливое во всех попарно непересекающихся подалгебрах, справедливо также и на их сумме.

Определение 2.1. *Пусть* $\mathfrak{U} = (U; \Sigma)$ *– произвольная алгебра. Бинарная функция* $f : U \times U \to U$ *называется неидемпотентной функцией Плонка для алгебры* $\mathfrak{U}$*, если она удовлетворяет следующим тождествам (ср.* [17] - [19]*):*

1.$f(f(x,y),z) = f(x, f(y,z))$*;*

2.$f(x,x) = F_t(x,\ldots,x)$*, для любой операции* $F_t \in \Sigma$*;*

3.$f(x, f(y,z)) = f(x, f(z,y))$*;*

4.$f(F_t(x_1,\ldots,x_{n(t)}),y) = F_t(f(x_1,y),\ldots f(x_{n(t)},y))$*, для любой операции* $F_t \in \Sigma$*;*

5.$f(y, F_t(x_1,\ldots,x_{n(t)})) = f(y, F_t(f(y,x_1),\ldots f(y,x_{n(t)})))$*, для любой операции* $F_t \in \Sigma$*;*

6.$f(F_t(x_1,\ldots,x_{n(t)}),x_i) = F_t(x_1,\ldots,x_{n(t)})$ *(для всех* $1 \le i \le n(t)$*), для любой операции* $F_t \in \Sigma$*;*

7.$f(F_t(x_1,\ldots,x_{n(t)}),F_t(x_1,\ldots,x_{n(t)})) = F_t(x_1,\ldots,x_{n(t)})$*, для любой операции* $F_t \in \Sigma$.

8. $f(x, f(x,y)) = f(x,y)$*.*

Теорема 2.1. *Каждой неидемпотентной функции Плонка алгебры* $\mathfrak{U} = (U; \Sigma)$ *соответствует представление* $\mathfrak{U}$ *как суммы своих попарно непересекающихся подалгебр.*

Доказательство. Определим на множестве U отношение $\alpha \subseteq U \times U$ следующим образом:

$$a\alpha b \leftrightarrow f(a,b) = f(a,a), \quad f(b,a) = f(b,b),$$

где f – неидемпотентная функция Плонка данной алгебры $\mathfrak{U}$. Отношение α – эквивалентность на множестве U. Обозначим соответствующие классы эквивалентности через $U_i, i \in I$. Таким образом, получаем разбиение множества U на попарно непересекающиеся подмножества $U_i \subseteq U, i \in I$. Докажем, что U_i – подалгебры. Действительно, если $a_1,\ldots,a_{n(t)} \in U_i, i \in I$, тогда для любого $F_t \in \Sigma, (|F_t| = t)$ имеем:

$f(F_t(a_1,\ldots,a_{n(t)}),a_1) \stackrel{6}{=} F_t(a_1,\ldots a_{n(t)}) \stackrel{7}{=} f(F_t(a_1,\ldots a_{n(t)}),F_t(a_1,\ldots,a_{n(t)}))$;
$f(a_1,F_t(a_1,\ldots,a_{n(t)})) \stackrel{5}{=} f(a_1,F_t(f(a_1,a_1),\ldots f(a_1,a_{n(t)})))$
$\stackrel{2}{=} f(a_1,F_t(F_t(a_1,\ldots,a_1),\ldots,F_t(a_1,\ldots,a_1))) \stackrel{2,7}{=} f(a_1,F_t(a_1,\ldots,a_1))$
$= F_t(a_1,\ldots,a_1) \stackrel{2}{=} f(a_1,a_1)$, т.е. $F_t(a_1,\ldots,a_{n(t)}), a_1 \in U_i$.

Теперь на множестве индексов I определим порядок "$\leq$"следующим образом: $i_1 \leq i_2$ тогда и только тогда, когда существуют $a \in U_{i_1}$, $b \in U_{i_2}$ такие, что $f(b,a) = f(b,b)$. Данное определение превращает множество I в верхнюю полурешетку.

Определим отображение $\varphi_{i_1,i_2} : U_{i_1} \mapsto U_{i_2}$ для $i_1 \leq i_2$ следующим образом:

$$\varphi_{i_1,i_2}(a) = f(a,b),$$

где $b \in U_{i_2}, a \in U_{i_1}$. $\square$

3. О подпрямо неразложимых слабо идемпотентных квазирешетках

Определение 3.1. *Бинарная алгебра* $\mathfrak{U} = (U;\Sigma)$ *называется слабо идемпотентной квазирешеткой, если она удовлетворяет следующим сверхтождествам:*

$$X(x,x) = Y(x,x), \tag{3.1}$$

$$X(x,y) = X(y,x), \tag{3.2}$$

$$X(x,X(y,z)) = X(X(x,y),z), \tag{3.3}$$

$$X(x,X(y,y)) = X(x,y), \tag{3.4}$$

$$X(Y(X(x,y),z),Y(x,z)) = Y(X(x,y),z). \tag{3.5}$$

Заметим, что каждая слабо идемпотентная решетка и каждая слабо идемпотентная полурешетка удовлетворяет сверхтождествам (3.1) - (3.5).
Далее, докажем ряд сверхтождеств, справедливых во всех слабо идемпотентных квазирешетках. Докажем следующее сверхтождество:

$$X(x,X(Y(x,y)),Y(y,z)) = X(Y(z,y),x); \tag{3.6}$$

Во-первых заметим, что следующие сверхтождества непосредственно следуют из сверхтождеств (3.5) и (3.2):

$$X(Y(X(Y(z,y),x),X(y,x)),Y(x,X(y,x)) = Y(X(Y(z,y),x),X(y,x)), \tag{3.7}$$

$$X(Y(X(x,y),x),Y(y,x)) = Y(X(x,y),x). \tag{3.8}$$

Действительно, докажем сверхтождество (3.7):

$$X(Y(X(Y(z,y),x),X(y,x)),Y(x.X(y,x)))$$
$$\overset{(3.2)}{=} X(Y(X(y,x),X(x,Y(z,y))),Y(X(y,x),x))$$
$$\overset{(3.5)}{=} Y(X(y,x),X(x,Y(z,y))) \overset{(3.2)}{=} Y(X(Y(z,y),x),X(y,x)).$$

Справедливость сверхтождества (3.8) вытекает из сверхтождества (3.5) при $z = x$. Следовательно, получаем

$Y(X(Y(z,y),x),X(y,x)) \overset{(3.7)}{=} X(Y(X(Y(z,y),x),X(y,x)),Y(x,X(y,x)) \overset{(3.8)}{=}$
$X(Y(X(Y(z,y),x)X(y,x)),X(Y(X(x,y),x),Y(y,x)) \overset{(3.3)}{=}$
$X(X(Y(X(Y(z,y),x),X(y,x)),Y(X(x,y),x)),Y(y,x)) \overset{(3.7)}{=}$
$X(Y(X(Y(z,y),x),X(y,x)),Y(y,x))$.

Таким образом, мы получаем следующее сверхтождество:

$$Y(X(Y(z,y),x),X(y,x)) = X(Y(X(Y(z,y),x),X(y,x)),Y(y,x)). \tag{3.9}$$

Теперь докажем сверхтождество (3.6). Имеем
$X(x,X(Y(x,y),Y(y,z)) \overset{(3.2),\,(3.3)}{=} X(X(x,Y(y,z)),Y(x,y)) \overset{(3.5)}{=}$
$X(Y(X(x,Y(y,z)),X(x,y)),Y(x,y)) \overset{(3.9),\,(3.2)}{=}$
$Y(X(Y(z,y),x),X(y,x)) \overset{(3.5)}{=} X(Y(z,y),x)$.

Таким образом, сверхтождество (3.6) доказано. Заменив в сверхтождестве (3.6) y на $Y(x,y)$, получим:

$$X(x,X(Y(x,Y(x,y)),Y(Y(x,y),z))) = X(Y(z,Y(x,y)),x).$$

Согласно сверхтождествам (3.2) - (3.4) получаем: $Y(x,Y(x,y)) =$
$Y(Y(x,x),y) = Y(y,Y(x,x)) = Y(y,x) = Y(x,y)$. Следовательно,

$$X(x,X(Y(x,y),Y(Y(x,y),z))) = X(x,Y(z,Y(x,y))); \tag{3.10}$$

$$Y(X(Y(z,y),x),X(y,x)) = X(Y(X(Y(z,y),x),X(y,x)),Y(y,x)). \tag{3.11}$$

Сверхтождество

$$X(Y(y,z),X(x,Y(x,y))) = X(Y(z,y),x) \tag{3.12}$$

является следствием сверхтождеств (3.2), (3.3) и (3.6). Действительно,
$X(Y(y,z),X(x,Y(x,y))) \overset{(3.2),(3.3)}{=} X(X(x,Y(y,z)),Y(x,y)) \overset{(3.3),(3.6)}{=} X(x,Y(y,z))$.
Подставим в (3.12) $y=z$, получим:

$$X(y,X(x,Y(x,y))) = X(y,x). \tag{3.13}$$

Докажем следующее сверхтождество:

$$Y(Y(x,X(y,Y(y,z))),z) = Y(x,Y(y,z)), \tag{3.14}$$

Для этого необходимо доказать следующие два сверхтождества:

$$X(Y(x,y),z) = X(X(Y(x,y),z),Y(Y(x,y),z), \tag{3.15}$$

$$X(y,Y(y,z)) = Y(y,X(y,z)). \tag{3.16}$$

Сперва докажем сверхтождество (3.15):
$X(Y(x,y),z) \overset{(3.12)}{=} X(Y(x,y),X(z,Y(z,Y(x,y)))) \overset{(3.3),(3.2)}{=}$

$X(X(Y(x,y),z),Y(z,Y(x,y)))$.

Заметим, что из сверхтождестева (3.15), воспользовавшись сверхтождествами (3.4) и (3.1), при $x=y$, получаем:

$$X(y,z)=X(X(y,z),Y(y,z)). \tag{3.17}$$

Действительно,

$X(X(y,z),Y(y,z)) \overset{(3.4)}{=} X(X(X(y,y),z),Y(Y(y,y),z) \overset{(3.1)}{=}$
$X(X(Y(y,y),z),Y(Y(y,y),z) \overset{(3.15)}{=} X(Y(y,y),z) \overset{(3.1)}{=} X(X(y,y),z) \overset{(3.4)}{=} X(y,z)$.

Далее докажем сверхтождество (3.16):

$X(y,Y(y,z)) \overset{(3.5),(3.4)}{=} Y(X(y,Y(y,z)),y) \overset{(3.2)}{=} Y(y,X(y,Y(y,z))) \overset{(3.5)}{=}$
$Y(y,Y(X(y,Y(y,z)),X(y,z)) \overset{(3.13),(3.2)}{=}$
$Y(y,Y(X(y,Y(y,z)),X(X(y,Y(y,z)),z))) \overset{(3.10),(3.3)}{=}$
$Y(y,X(X(y,Y(y,z)),z)) \overset{(3.3)}{=} Y(y,X(X(y,z),Y(y,z))) \overset{(3.17)}{=} Y(y,X(y,z))$.

Теперь получим сверхтождество (3.14). Имеем

$Y(Y(x,X(y,Y(y,z))),z) \overset{(3.16)}{=} Y(Y(x,Y(y,X(y,z))),z) \overset{(3.3)}{=}$
$Y(x,Y(Y(y,z),X(y,z))) \overset{(3.17)}{=} Y(x,Y(y,z))$.

Согласно (3.14) имеем:

$$Y(Y(x,X(z,Y(y,z))),y)=Y(x,Y(y,z)). \tag{3.18}$$

Для дальнейшего нам необходимо также доказать следующее сверхтождество:

$$X(x,Y(x,X(y,Y(y,z))))=X(x,Y(x,X(z,Y(y,z)))). \tag{3.19}$$

Имеем:

$X(x,Y(x,X(y,Y(y,z))) \overset{(3.5)}{=} X(x,X(Y(x,X(y,Y(y,z)))),Y(x,Y(y,z))) \overset{(3.14)}{=}$
$X(x,X(Y(x,Y(y,Y(y,z))),Y(Y(x,X(z,Y(y,z)),y)))) \overset{(3.10)}{=}$
$X(x,Y(Y(x,X(z,Y(y,z))),y)) \overset{(3.14)}{=} Y(x,Y(y,z))$.
$X(x,Y(x,X(z,Y(y,z))) \overset{(3.5)}{=} X(x,X(Y(x,X(z,Y(y,z)))),Y(x,Y(y,z))) \overset{(3.18)}{=}$
$X(x,X(Y(x,Y(z,Y(y,z))),Y(Y(x,X(z,Y(y,z)),y)))) \overset{(3.10)}{=}$
$X(x,Y(Y(x,X(z,Y(y,z))),y)) \overset{(3.14)}{=} Y(x,Y(y,z))$.

Следовательно,

$$X(x,Y(x,X(y,Y(y,z)))=Y(x,Y(y,z)), \tag{3.20}$$

$$X(x,Y(x,X(z,Y(y,z)))=Y(x,Y(y,z)). \tag{3.21}$$

Из сверхтождеств (3.20) и (3.21) следует сверхтождество (3.19).

Лемма 3.1. *Каждая слабо идемпотентная квазирешетка $(Q; A, B)$ с двумя бинарными операциями является слабо идемпотентной решеткой или суммой своих попарно непересекающихся подалгебр, которые являются слабо идемпотентными решетками.*

Доказательство. Зададим отображение $f : Q \times Q \to Q$ следующим образом:

$$f(x, y) = A(x, B(x, y)) = B(x, A(x, y)).$$

Докажем, что f – неидемпотентная функция Плонка. Корректность отображения f непосредственно следует из сверхтождества (3.16). Проверим условия определения 2.1.

1. $f(f(x, y), z) = f(A(x, B(x, y)), z) = A(A(x, B(x, y)), B(A(x, B(x, y)), z)) \overset{(3.5)}{=}$
$A(A(x, B(x, y)), A(B(A(x, B(x, y)), z)), B(B(x, y), z)) \overset{(3.18),(3.2)}{=}$
$A(A(x, B(x, y)), A(B(A(x, B(x, y)), z), B(B(z, A(x, B(x, y))), z))) \overset{(3.10)}{=}$
$A(A(x, B(x, y)), B(B(z, A(x, B(x, y))), y)) \overset{(3.18)}{=}$
$A(A(x, B(x, y)), B(B(x, y), z)) \overset{(3.3)}{=} A(x, A(B(x, y), B(B(x, y), z))) \overset{(3.10)}{=}$
$A(x, B(B(x, y), z))$.
$f(x, f(y, z)) = f(x, A(y, B(y, z))) = A(x, B(x, A(y, Y(y, z)))) \overset{(3.20)}{=}$
$A(x, B(x, B(y, z))))$.

2. $f(x, x) = A(x, B(x, x)) \overset{(3.1)}{=} A(x, A(x, x)) \overset{(3.4)}{=} A(x, x){=}B(x, x)$.

3. $f(x, f(y, z)) = f(x, A(y, B(y, z))) = A(x, B(x, A(y, B(y, z))))$;
$f(x, f(z, y)) = f(x, A(z, B(z, y))) = A(x, B(x, A(z, B(z, y))))$.
Согласно сверхтождеству (3.18) получаем: $f(x, f(y, z)) = f(x, f(z, y))$.

В доказательстве условий 4-8 определения 2.1, без ограничения общности, можно предположить, что $F_t = A$. Согласно теореме 2.1, алгебра $(Q; A, B)$ является суммой своих попарно непересекающихся подалгебр U_i, $i \in I$. Остается доказать, что подалгебры U_i – слабо идемпотентные решетки. Для подалгебр U_i следует проверить лишь тождества слабого поглощения (1.4):$x \wedge (x \vee y) = x \wedge x, x \vee (x \wedge y) = x \vee x$. Действительно, $x, y \in U_i$ тогда и только тогда, когда $f(x, y) = f(x, x), f(y, x) = f(y, y)$. Вычислив правую и левую части равенства $f(x, y) = f(x, x)$ (при $A = \wedge, B = \vee$), получаем:

$f(x, y) = x \wedge (x \vee y)$ и $f(x, x) = x \wedge (x \vee x) = x \wedge (x \wedge x) = x \wedge x$,
следовательно $x \wedge (x \vee y) = x \wedge x$. Аналогично получаем второе тождество. □

Теорема 3.1. *Для подпрямо неразложимой слабо идемпотентной квазирешетки* $\mathfrak{U} = (U; \Sigma)$ *имеем:* $|\Sigma| \leq 2$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{U} = (U; \Sigma)$ – слабо идемпотентная квазирешетка. Покажем, что если $|\Sigma| \geq 3$, то $\mathfrak{U}$ – подпрямо разложима. Поскольку $|\Sigma| \geq 3$, то существуют попарно различные бинарные операции $A_1, A_2, A_3 \in \Sigma$. Определим функции $f_{i,j}$ следующим образом:

$$f_{ij}(x, y) = A_i(x, A_j(x, y)).$$

Зададим отношения $\widetilde{\theta}_{i,j}$ на множестве U следующим образом:

$$x\widetilde{\theta}_{i,j}y \leftrightarrow f_{i,j}(x, y) = x, f_{i,j}(y, x) = y.$$

Отношение $\theta_{i,j} = \widetilde{\theta}_{i,j} \cup \{x = x\}$ – эквивалентность на множестве U. Более того, $\theta_{i,j}$ – конгруэнции на алгебре $\mathfrak{U}$.
Покажем, что $\theta_{1,2} \cap \theta_{1,3} \cap \theta_{2,3} = \omega$. Если $x(\theta_{1,2} \cap \theta_{1,3} \cap \theta_{2,3})y$, тогда $x\theta_{1,2}y$, $x\theta_{1,3}y$, $x\theta_{2,3}y$, таким образом, $f_{1,2}(x, y) = x$, $f_{1,2}(y, x) = y, f_{1,3}(x, y) = x$, $f_{1,3}(y, x) = y, f_{2,3}(x, y) = x$, $f_{2,3}(y, x) = y$, или $x = y$. В первом случае из сверхтождества (3.7), заменой z на $Z(x, y)$, получим:

$A_1(A_2(x, y), A_3(x, y)) = A_1(A_1(A_2(x, A_3(x, y)), A_2(x, y)), A_3(x, y)) =$
$A_1(A_1(x, A_2(x, y)), A_3(x, y)) = A_1(x, A_3(x, y)) = x;$
$A_1(A_2(y, x), A_3(y, x)) = A_1(A_1(A_2(y, A_3(y, x)), A_2(y, x)), A_3(y, x)) =$
$A_1(A_1(y, A_2(y, x)), A_3(y, x)) = A_1(y, A_3(y, x)) = y.$

Следовательно, в обоих случаях получаем: $x = y$. Остается доказать, что все три конгруэнции $\theta_{1,2}, \theta_{1,3}$ и $\theta_{2,3}$ нетривиальны. Покажем, например, нетривиальность конгруэнции $\theta_{1,2}$. Поскольку $A_1 \neq A_2$, то существуют элементы $x, y \in U$ такие, что $A_1(x, y) \neq A_2(x, y)$, тогда $A_1(x, y)\theta_{1,2}A_2(x, y)$. Действительно, согласно сверхтождеству (3.17), при $y = X(x, y), z = Y(x, y)$, имеем:

$$X(X(x, y), Y(x, y)) = X(X(X(x, y), Y(x, y)), Y(X(x, y), Y(x, y));$$

Отсюда, согласно сверхтождеству (3.13), получим сверхтождество:

$$X(x, y) = X(X(x, y), Y(X(x, y), Y(x, y))),$$

а отсюда, при $X = A_1, Y = A_2$, имеем:

$f_{1,2}(A_1(x, y), A_2(x, y)) = A_1(A_1(x, y), A_2(A_1(x, y), A_2(x, y))) = A_1(x, y).$

Для доказательства равенства

$$f_{1,2}(A_2(x, y), A_1(x, y)) = A_2(x, y)$$

воспользуемся сверхтождеством (3.16):

$f_{1,2}(A_2(x,y),A_1(x,y)) = A_1(A_2(x,y),A_2(A_2(x,y),A_1(x,y))) \overset{(3.16)}{=}$
$A_2(A_2(x,y),A_1(A_2(x,y),A_1(x,y))) = A_2(x,y)$.

Итак, исходная алгебра оказывается подпрямо разложимой, что является противоречием. Таким образом, мощность множества операций подпрямо неразложимой слабо идемпотентной квазирешетки – не более двух. □

4. Основной результат

Теорема 4.1. *Любое сверхтождество многообразия слабо идемпотентных решеток является следствием сверхтождеств (3.1) - (3.5).*

Доказательство. Согласно теореме 3.1, мощность $|\Sigma|$ подпрямо неразложимой слабо идемпотентной квазирешетки $(U;\Sigma)$ меньше или равна двум. Следовательно, по теореме Биркгофа о подпрямых произведениях, каждая слабо идемпотентная квазирешетка изоморфна подпрямому произведению слабо идемпотентных квазирешеток с одной или двумя бинарными операциями. Слабо идемпотентная квазирешетка с одной бинарной операцией – слабо идемпотентная полурешетка. Поэтому, любое однородное сверхтождество выполняется в слабо идемпотентной квазирешетке с одной бинарной операцией. С другой стороны, следуя лемме 3.1, заключаем, что слабо идемпотентная квазирешетка с двумя бинарными операциями – слабо идемпотентная решетка либо сумма своих попарно непересекающихся подалгебр, которые являются слабо идемпотентными решетками. Следовательно, каждое однородное сверхтождество, выполняющееся на многообразии слабо идемпотентных решеток, будет выполняться и в каждой слабо идемпотентной квазирешетке с двумя бинарными операциями. □

Следствие 4.1. *Каждое сверхтождество многообразия решеток является следствием сверхтождеств (3.2), (3.3), (3.5) и сведхтождества идемпотентности $X(x,x)=x$ (*[7], [8], [10]*).*

Покажем, что сверхтождество (3.5) является следствием сверхтождеств (3.1) - (3.4) и следующего сверхтождества дистрибутивности:

$$X(Y(x,y),z) = Y(X(x,z),X(y,z)). \tag{4.1}$$

Действительно,
$X(Y(X(x,y),z),Y(y,z)) \overset{(4.1)}{=} X(X(Y(x,z),Y(y,z)),Y(y,z)) \overset{(3.3)}{=}$
$X(Y(x,z),X(Y(y,z),Y(y,z)) \overset{(1.3)}{=} X(Y(x,z),Y(y,z)) \overset{(4.1)}{=} Y(X(x,y),z)$.

Следствие 4.2. *Каждое сверхтождество многообразия дистрибутивных слабо идемпотентных решеток является следствием сверхтождеств (3.1) - (3.4) и сверхтождества дистрибутивности (4.1).*

Abstract. The paper is devoted to the characterization of hyperidentities of a variety of weakly idempotent lattices that are nilpotent closures of the variety of lattices. The existence of a finite basis for such hyperidentities is established.

Список литературы

[1] E. Fried and G. Grätzer, "A Nonassocative Extension of the Class of Distributive Lattices", Pasific Jornal of Mathematics, **49**, 59 – 78 (1973).
[2] E. Fried, "Weakly Associative Lattices with Congruence Extension Property", Algebra Universalis, **4**, 151 – 162 (1974).
[3] I. I. Melnik, "Nilpotent shift of manifolds", Math. Notes, **14**, 387 – 397 (1973).
[4] E. Graczynska, "On normal and regular identities", Algebra Universalis, **27**, 387 – 397 (1990).
[5] J. Plonka, "On varieties of algebras defined by identities of some spesial forms", Houston Journal of Mathematics, **14**, 253 – 263 (1988).
[6] Ю. М. Мовсисян, Введение в теорию алгебр со сверхтождествами, Ереванский госуниверситет (1986).
[7] Ю. М. Мовсисян, "Сверхтождества в алгебрах и многообразиях", Успехи Мат. Наук, **53** (1(319)), 61 – 114 (1998).
[8] Yu. M. Movsisyan, "Hyperidentities and hypervarieties", Scientiae Mathematicae Japonicae, **54**, 595 – 640 (2001).
[9] Ю. М. Мовсисян, "Сверхтождества булевых алгебр", Известия РАН, сер. Мат. **56**, 654 – 672 (1992).
[10] Ю. М. Мовсисян, "Алгебры со сверхтождествами многообразия булевых алгебр", Известия РАН, сер. Мат. **60**, 127 – 168 (1996).
[11] Ю. М. Мовсисян, "Сверхтождества в многообразии решеток", Мат. Заметки **59**, 6, 944 – 946 (1996).
[12] Yu. M. Movsisyan and V. A. Aslanyan, "Hyperidentities of De Morgan algebras", Logic Journal of IGPL, **20**, 1153 – 1174 (2012).
[13] K. Denecke and J. Koppitz, M-solid Varieties of Algebras, Advances in Mathematic, Spriger-Science+Business Media, New York, **10** (2006).
[14] K. Denecke and S. L. Wismath, Hyperidentities and Clones, Gordon and Breach Science Publishers (2000).
[15] R. Padmanabhan and P. Penner, "A hyperbase for binary lattice hyperidentities", Journal of Automated Reasoning, **24**, 365 – 370 (2000).
[16] V. Melkonian, "Circuit integrating through lattice hyperterms", Discrete Mathematics, Algorithms and Applications, **3**, 101 – 119 (2011).
[17] J. Plonka, "On a method of construction of abstract algebras", Fund. Math., **61**, 183 – 189 (1967).
[18] J. Plonka and A. Romanowska, "Semilattice sums", Universal Algebra and Quasigroup Theory, Helderman Verlag, Berlin, 123 – 158 (1992).
[19] A. Romanowska and J. Smith, Modes, World Scientific (2002).

Поступила 5 февраля 2014