ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ և ՄԵԽԱՆԻԿԱՅԻ ՖԱԿՈՒԼՏԵՏ

ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱՅԻ ԱՄԲԻՈՆ

ԿԱՐԵՆ ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ԻՆՏԵԳՐՄԱՆ ՈՐՈՇ ՄԵԹՈԴՆԵՐ

ԵՐԵՎԱՆ-2015

Այս մեթոդական ձեռնարկը պարունակում է մի շարք վարժություններ, նվիրված անորոշ ինտեգրալին:
Բոլոր վարժությունները բերված են իրենց լուծումներով:
Ձեռնարկը նախատեսված է հեռակա ուսուցում ստացող ուսանողների համար, որոնք ուսումնասիրում են <<Մաթեմատիկական անալիզ>> կամ <<Բարձրագույն մաթեմատիկա>> առարկաները:
Այն կարող է օգտակար լինել նաև առկա սովորող ուսանողների համար:

Ֆիզիկա-մաթեմատիկական գիտությունների թեկնածու՝

Կարեն Սահակյան

Մասերով ինտեգրում

1. $\int \ln x dx$:

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int x d\ln x = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - x + C :$$

2. $\int x^n \ln x dx \ \ (n \neq -1)$:

$$\int x^n \ln x dx = \frac{1}{n+1}\int \ln x dx^{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\ln x - \int x^{n+1} d\ln x\right) =$$

$$\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^{n+1}\frac{1}{x}dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} + C :$$

3. $\int xe^{-x}dx$:

$$\int xe^{-x}dx = -\int xde^{-x} = -\left(xe^{-x} - \int e^{-x}dx\right) = -xe^{-x} - e^{-x} + C :$$

4. $\int x\cdot 3^x dx$:

$$\int x\cdot 3^x dx = \frac{1}{\ln 3}\int xd3^x = \frac{1}{\ln 3}\left(x\cdot 3^x - \int 3^x dx\right) = \frac{x\cdot 3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3} + C :$$

5. $\int x\cos x dx$:

$$\int x\cdot\cos x dx = \int xd\sin x = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C :$$

6. $\int x\sin(3x+4)dx$:

$$\int x\sin(3x+4)dx = -\frac{1}{3}\int xd\cos(3x+4) = -\frac{1}{3}\left(x\cos(3x+4) - \int \cos(3x+4)dx\right) =$$

$$= -\frac{x}{3}\cos(3x+4) + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\int \cos(3x+4)d(3x+4) =$$

$$= -\frac{x}{3}\cos(3x+4) + +\frac{1}{9}\sin(3x+4) + C :$$

7. $\int xtg^2 xdx$:

$$\int x\cdot tg^2 xdx = \int x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \int \frac{x}{\cos^2 x}dx - \int xdx = \int xdtgx - \frac{x^2}{2} =$$

$$= x\cdot tgx-\frac{x^2}{2}-x\cdot tgx-\int tgxdx-\frac{x^2}{2}=-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx = x\cdot tgx-\frac{x^2}{2}-\int\frac{d\cos x}{\cos x}=$$

$$= x\cdot tgx-\frac{x^2}{2}-\ln\left|\cos x\right|+C\,\mathbf{:}$$

8. $\int x^2\sin 2xdx:$

$$\int x^2\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\int x^2 d\cos 2x=-\frac{1}{2}\left(x^2\cos 2x-\int\cos 2sdx^2\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}\int 2x\cos 2xdx=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}\int xd\sin 2x=$$

$$=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x-\frac{1}{2}\int\sin 2xdx=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x-$$

$$-\frac{1}{4}\int\sin 2xd2x=-\frac{1}{2}x^2\cos 2x+\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C\,\mathbf{:}$$

9. $\int\arccos\left(5x-3\right)dx:$

$$\int\arccos(5x-3)dx=\frac{1}{5}\int\arccos(5x-3)d(5x-3)=$$

$$=\frac{1}{5}\left((5x-3)\arccos(5x-3)-\int(5x-3)d\arccos(5x-3)\right)=$$

$$=\frac{5x-3}{5}\arccos(5x-3)+\frac{1}{5}\int(5x-3)\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(5x-3)^2}}\cdot 5dx=$$

$$=\frac{5x-3}{5}\arccos(5x-3)-\frac{1}{5\cdot 2}\int\frac{d\left(1-(5x-3)^2\right)}{\sqrt{1-(5x-3)^2}}=$$

$$=\frac{5x-3}{5}\arccos(5x-3)-\frac{1}{5}\sqrt{1-(5x-3)^2}+C\,\mathbf{:}$$

10. $\int arctgxdx:$

$$\int arctgxdx=xarctgx-\int xdarctgx=xarctgx-\int x\frac{1}{x^2+1}dx=$$

$$=xarctgx-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=xarctgx-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C\,\mathbf{:}$$

11. $\int xarctgxdx = \frac{1}{2}\int arctgxdx^2 = \frac{1}{2}\left(x^2arctgx - \int x^2 darctgx\right) =$

$= \frac{1}{2}x^2arctgx - \frac{1}{2}\int x^2 \frac{1}{x^2+1}dx = \frac{x^2arctgx}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx =$

$= \frac{x^2arctgx}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}arctgx + C$ **:**

12. $\int xarctgxdx$:

$\int \frac{x\arccos xdx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{\arccos xd(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{\arccos xd\sqrt{1-x^2}}{\frac{1}{2}} =$

$= -\sqrt{1-x^2}\arccos x + \int \sqrt{1-x^2}d\arccos x =$

$= -\sqrt{1-x^2}\arccos x - \int \sqrt{1-x^2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2}\arccos x - x + C$ **:**

13. $\int \sin^2 x \cdot e^{2x}dx$:

$\int \sin^2 x \cdot e^{2x}dx = \frac{1}{2}\int \sin^2 xde^{2x} = \frac{1}{2}\left(e^{2x}\sin^2 x - \int e^{2x}d\sin^2 x\right) =$

$= \frac{e^{2x}\sin^2 x}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\sin 2xdx = \frac{e^{2x}\sin^2 x}{2} - \frac{1}{4}\int \sin 2xde^{2x} = \frac{e^{2x}\sin^2 x}{2} - \frac{1}{4}A$

$A = \int \sin 2xde^{2x}$

$A = \int \sin 2xde^{2x} = e^{2x}\sin 2x - \int e^{2x}d\sin 2x = e^{2x}\sin 2x - 2\int e^{2x}\cos 2xdx =$

$= e^{2x}\sin 2x - \int \cos 2xde^{2x} =$

$= e^{2x}\sin 2x - e^{2x}\cos 2x + \int e^{2x}d\cos 2x = e^{2x}(\sin 2x - cos 2x) - 2\int e^{2x}\sin 2xdx =$

$= e^{2x}(\sin 2x - cos 2x) - \int \sin 2xde^{2x} = e^{2x}(\sin 2x - cos 2x) - A \Rightarrow$

$A = \frac{1}{2}e^{2x}(\sin 2x - \cos 2x) \Rightarrow$

$\frac{e^{2x}\sin^2 x}{2} - \frac{1}{4}A = \frac{e^{2x}\sin^2 x}{2} - \frac{1}{8}e^{2x}(\sin 2x - \cos 2x) + C$ **:**

14. $\int \sqrt{a^2+x^2}dx$:

$$\int \underline{\sqrt{a^2+x^2}dx} = x\sqrt{a^2+x^2} - \int xd\sqrt{a^2+x^2} =$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{a^2+x^2}}dx = x\sqrt{a^2+x^2} - \int\frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \underline{\sqrt{x^2+a^2}dx} + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} \Rightarrow$$

$$2\int \underline{\sqrt{x^2+a^2}dx} = x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} \Rightarrow$$

$$\int \underline{\sqrt{x^2+a^2}dx} = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} =$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$$

Փոփոխականի փոխարինում

15. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$**:**

$$\sqrt{x+1} \equiv z,\quad x+1=z^2,\quad x=z^2-1,\quad dx=2zdz$$

$$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} = \int\frac{2zdz}{1+z} = \int\frac{2(z+1)-2}{z+1}dz = 2z - \int\frac{d(z+1)}{z+1} = 2z-2\ln|z+1|+C =$$

$$= 2x+1-2\ln\left(\sqrt{x+1}+1\right)+C\text{:}$$

16. $\int \frac{4x+3}{(x-2)^3}dx$**:**

$$x-2\equiv z,\quad x=z+2,\quad dx=dz$$

$$\int\frac{4x+3}{(x-2)^3}dx = \int\frac{4z+11}{z^3}dz = 4\int z^{-2}dz + 11\int z^{-3}dz =$$

$$=-\frac{4}{z}-\frac{11}{2z^2}+C=\frac{4}{2-x}-\frac{11}{2(x-2)^2}+C\text{:}$$

17. $\int\frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x-2}}$:

$$\sqrt{x-2}\equiv z,\;\; x-2=z^2,\;\; x=z^2+2,\;\; dx=2zdz$$

$$\int\frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x-2}}=\int\frac{(z^2+3)\cdot 2zdz}{(z^2+2)\cdot z}=2\int\frac{z^2+2+1}{z^2+2}dz=2z+2\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\frac{z}{\sqrt{2}}+C=$$

$$=2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}acrtg\sqrt{\frac{x-2}{2}}+C\text{:}$$

18. $\int\frac{\sqrt{x}dx}{x(x+1)}$**:**

$$\sqrt{x}\equiv z,\;\; x=z^2,\;\; dx=2zdz$$

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{x(x+1)}=\int\frac{z\cdot 2zdz}{(z^2+1)\cdot z^2}=2\int\frac{dz}{z^2+1}=2arctgz+C=2acrtg\sqrt{x}+C\text{:}$$

19. $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}+1}$**:**

$$\sqrt[3]{x+1}\equiv z,\;\; x+1=z^3,\;\; dx=3z^2dz$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}+1}=\int\frac{3z^2dz}{z+1}=3\int\frac{z^2-1+1}{z+1}dz=3\int(z-1)d(z-1)+3\int\frac{d(z+1)}{z+1}=$$

$$=\frac{3(z-1)^2}{2}+3\ln|z+1|+C=\frac{3}{2}\left(\sqrt[3]{x+1}-1\right)^2+3\ln\left|\sqrt[3]{x+1}+1\right|+C\text{:}$$

20. $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$**:**

$$\sqrt[6]{x}\equiv z,\;\; x=z^6,\;\; dx=6z^5dz,\;\; \sqrt{x}=z^3,\;\; \sqrt[3]{x}=z^2$$

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\int\frac{z^2\cdot 6z^5dz}{z^3-z^2}=6\int\frac{z^6dz}{z-1}=6\int\frac{z^6-1+1}{z-1}dz=$$

$$=6\int(z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)dz+6\int\frac{d(z-1)}{z-1}=$$

$$=z^6+\frac{6}{5}z^5+\frac{3}{2}z^4+2z^3+3z^2+6z+6\ln|z-1|+C=$$

$$=x+\frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C:$$

21. $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx=$

$$\sqrt{1+\ln x}\equiv z,\ 1+\ln x=z^2,\ x=e^{z^2-1},\ dx=2z\cdot e^{z^2-1}dz$$

$$\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x\ln x}dx=\int\frac{z\cdot 2z\cdot e^{z^2-1}dz}{e^{z^2-1}\cdot(z^2-1)}=2\int\frac{z^2dz}{z^2-1}=2\int\frac{z^2-1+1}{z^2-1}dz=$$

$$=2z+2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right|+C=2\sqrt{1+\ln x}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+\ln x}-1}{\sqrt{1+\ln x}+1}\right|+C:$$

22. $\int\frac{\ln tgx}{\sin x\cos x}dx:$

$$\int\frac{\ln tgx}{\sin x\cos x}dx=\int\frac{\ln tgx}{tgx\cdot\cos^2 x}dx=\int\frac{\ln tgxdtgx}{tgx}=\int\ln tgxd\ln tgx=\frac{\ln^2 tgx}{2}+C:$$

23. $\int\frac{x^5dx}{(x^2-4)^2}:$

$$x^2-4\equiv z,\ x=\sqrt{z+4},\ x^5=(z+4)^{\frac{5}{2}},\ dx=\frac{1}{2}(z+4)^{-\frac{1}{2}}dz$$

$$\int\frac{x^5dx}{(x^2-4)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{(z+4)^{\frac{5}{2}}dz}{(z+4)^{\frac{1}{2}}\cdot z^2}=\frac{1}{2}\int\frac{(z+4)^2dz}{z^2}=\frac{1}{2}\int\frac{z^2+8z+16}{z^2}dz=$$

$$=\frac{1}{2}z+4\ln|z|-\frac{8}{z}+C=\frac{1}{2}(x^2-4)++4\ln\left|x^2-4\right|-\frac{8}{x^2-4}+C:$$

24. $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}:$

$$x\equiv\frac{1}{z},\ dx=-\frac{1}{z^2}dz$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\int \frac{dz}{z^2 \frac{1}{z^2}\sqrt{\frac{1}{z^2}+a^2}} = -\int \frac{zdz}{\sqrt{1+a^2z^2}} = -\frac{1}{2a^2}\int \frac{d(a^2z^2+1)}{(a^2z^2+1)^{\frac{1}{2}}} =$$

$$= -\frac{1}{2a^2}\frac{(a^2z^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -\frac{1}{a^2}\sqrt{\frac{1}{x^2}a^2+1} + C = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x} + C\text{:}$$

25. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ **:**

$$x \equiv a\sin z,\ \ z = \arcsin\frac{x}{a},\ \ dx = a\cos dz$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a^2\cdot\sin^2 z\cdot a\cdot\cos zdz}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 z}} = \frac{a^3}{a}\int \frac{\sin^2 z\cdot\cos zdz}{\cos z} = a^2\int \frac{1-\cos 2z}{2}dz =$$

$$= \frac{a^2}{2}z - \frac{a^2}{4}\sin 2z + C = \frac{x}{a} - \frac{a^2}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{a}\right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{a^2}{4}\cdot 2\sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)\cdot\cos\left(\arcsin\frac{x}{a}\right) + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{a^2}{4}\cdot 2\cdot\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} - \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C\text{:}$$

26. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}dx}{x^4}$ **:**

$$x \equiv \frac{1}{z},\ \ dx = -\frac{1}{z^2}dz,\ \ x^2+1 = \frac{z^2+1}{z^2}$$

$$\int \frac{\sqrt{1+x^2}dx}{x^4} = -\int \frac{\sqrt{z^2+1}}{z\cdot\frac{1}{z^4}}\cdot\frac{1}{z^2}dz = -\int z\sqrt{z^2+1}dz = -\frac{1}{2}\int \sqrt{z^2+1}d(z^2+1) =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(z^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{3}\frac{\sqrt{(x^2+1)^3}}{x^3} + C\text{:}$$

27. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}dx}{x^2}$**:**

$$x \equiv \sin z,\ \ z = \arcsin x,\ \ dx = \cos z dz$$

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}dx}{x^2} = \int \frac{\sqrt{1-\sin^2 z}\cdot \cos z dz}{\sin^2 z} = \int \frac{\cos^2 z}{\sin^2 z}dz = \int \frac{1-\sin^2 z}{\sin^2 z}dz =$$

$$-ctgz - z + C = -ctg(\arcsin x) - \arcsin x + C =$$

$$= -\frac{\cos(\arcsin x)}{\sin(\arcsin x)} - \arcsin x + C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C$$ **:**

28. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$**:**

$$x \equiv \frac{1}{z},\ \ dx = -\frac{1}{z^2}dz,\ \ a^2 + x^2 = \frac{a^2z^2+1}{z^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = -\int \frac{1}{z^2}\frac{dz}{\left(\frac{a^2z^2+1}{z^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\int \frac{zdz}{\left(a^2z^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2a^2}\int \frac{d(a^2z^2+1)}{\left(a^2z^2+1\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= -\frac{1}{2a^2}\frac{\left(a^2z^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{a^2}\frac{1}{\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{x^2}+1}} + C = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} + C:$$

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$**:**

$$x \equiv \frac{1}{z},\ \ dx = -\frac{1}{z^2}dz,\ \ x^2 - a^2 = \frac{1-a^2z^2}{z^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}} = -\int \frac{1}{z^2}\frac{dz}{\left(\frac{1-a^2z^2}{z^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\int \frac{zdz}{\left(1-a^2z^2\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= -\frac{1}{2a^2}\int \frac{d(a^2z^2-1)}{\left(1-a^2z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2a^2}\int \frac{d(a^2z^2-1)}{\left(a^2z^2-1\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2a^2}\frac{\left(1-a^2z^2\right)^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C =$$

$$=-\frac{1}{a^2}\frac{1}{\sqrt{1-a^2z^2}}+C=-\frac{1}{a^2}\frac{1}{\sqrt{1-a^2\frac{1}{x^2}}}+C=\frac{-x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}+C\,\mathbf{:}$$

30. $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$ **:**

$$x\equiv 2\sin z,\ \ z=\arcsin\frac{x}{2},\ \ dx=2\cos z dz$$

$$\int x^2\sqrt{4-x^2}dx=\int 4\sin^2 z\cdot\sqrt{4-4\sin^2 z}\cdot 2\cdot\cos z dz=8\int\sin^2 z\cdot 2\cdot\cos^2 z dz=$$

$$4\int\sin^2 2z dz=2\int(1-\cos 4z)dz=2z-\frac{1}{2}\sin 4z+C=2\arcsin\frac{x}{2}-$$

$$-\frac{1}{2}\sin\left(4\arcsin\frac{x}{2}\right)+C=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\cdot 2\sin\left(2\arcsin\frac{x}{2}\right)\cos\left(2\arcsin\frac{x}{2}\right)=$$

$$=2\arcsin\frac{x}{2}-2\sin\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\cdot\left(1-2\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\right)=$$

$$=2\arcsin\frac{x}{2}-\frac{x\sqrt{4-x^2}}{4}(2-x^2)+C\,\mathbf{:}$$

31. $\int\frac{(1+x)}{x(1+xe^x)}dx$ **:**

$$\int\frac{(1+x)}{x(1+xe^x)}dx=\int\frac{(1+x)e^x}{e^x\cdot x(1+xe^x)}dx=\int\frac{d(1+xe^x)}{e^x\cdot x(1+xe^x)}=$$

$$xe^x\equiv z,\ \ d(1+xe^x)=dz$$

$$=\int\frac{dz}{z(1+z)}=\int\frac{dz}{z}-\int\frac{dz}{1+z}=\ln|z|-\ln|1+z|+C=\ln\left|\frac{z}{z+1}\right|+C=\ln\left|\frac{xe^x}{xe^x+1}\right|+C\,\mathbf{:}$$