ԷԿՈՆՈՄԻԿԱ ԵՎ ԿԱՌԱՎԱՐՈՒՄ

Ա.Գ. Գալստյան, Լ.Հ. Հարոյան, Վ.Ա. Մելիք-Փարսադանյան

ՄԱՔՈԼԻԻ ԴՅՈՒՐԱՑԻԱՅԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԱՏԿՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Դյուրացիան առավել հաճախ կիրառվող մեծություններից է հաստատուն եկամուտով գործիքների վերլուծություններում: Հայտնի են Մաքոլիի, ձևափոխված, արդյունավետ, սփրեդ և այլ դյուրացիաներ, որոնք լայն կիրառություն ունեն պայուսակի և ռիսկերի կառավարման գործառնություններում: Սույն աշխատանքում ուսումնասիրվում է Մաքոլիի դյուրացիան, դրա հատկությունները և կիրառությունները հաստատուն եկամուտով ներդրումային նախագծերում: Մասնավորապես ապացուցվում են տարբեր պարտատոմսերի համար Մաքոլիի դյուրացիայի՝ մինչև մարում ժամկետից կախված որոշ հատկություններ, ինչպես նաև ներդրումային հորիզոնի եկամտաբերության միտումների տեսանկյունից դիտարկվում է որպես ներդրումային հորիզոն Մաքոլիի դյուրացիայի նշանակությունը:

Առանցքային բառեր. *Մաքոլիի դյուրացիա, ձևափոխված դյուրացիա, մինչև մարում ժամկետ, ներդրումային հորիզոն, ներդրումային հորիզոնի եկամտաբերություն:*

Դյուրացիայի գաղափարը առաջին անգամ շրջանառության մեջ է դրել Ֆ. Մաքոլին՝ սահմանելով այն որպես դրամական հոսքերի միջին ժամկետայնություն [1]: Մաքոլիի դյուրացիան ներկայացնելու նպատակով դիտարկենք ներդրումային նախագիծ, որի $t_1, t_2, \ldots, t_N$ պահերի դրամական հոսքերը հայտնի են ժամանակի $t_0 = 0$ պահին՝ $CF_1, CF_2, \ldots, CF_N \left(CF_j > 0,\ j = \overline{1, N}\right)$, y-ը պահանջվող եկամտաբերությունն է $(y > 0)$: Դիցուք՝ d-ն ժամանակի ինչ-որ պահ է՝ $t_k < d \le t_{k+1}, k = \overline{0, N-1}$, որը բավարարում է (1)-ին.

$$(d - t_1)\frac{CF_1}{(1+y)^{t_1}} + \ldots + (d - t_k)\frac{CF_k}{(1+y)^{t_k}} = (t_{k+1} - d)\frac{CF_1}{(1+y)^{t_{k+1}}} + \ldots + (t_N - d)\frac{CF_N}{(1+y)^{t_N}} \qquad (1)$$

Ըստ սահմանման՝ d-ն ժամանակի այն պահն է, որտեղ հավասարվում են ստացված և ստացվելիք դրամական հոսքերի ներկա արժեքները՝ կշռված դրամական հոսքի՝ մինչև տվյալ պահը եղած ժամանակով [2]:

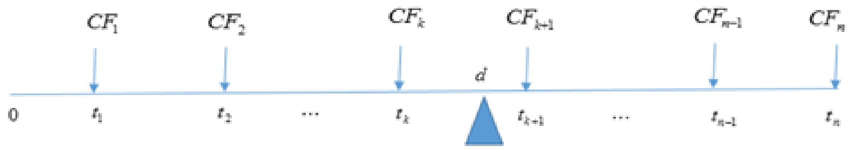
Լուծելով (1)-ը d-ի նկատմամբ՝ կստանանք.

$$d = \frac{\sum_{k=1}^{N} t_k \frac{CF_k}{(1+y)^{t_k}}}{\sum_{k=1}^{N} \frac{CF_k}{(1+y)^{t_k}}} = \sum_{k=1}^{N} t_k \cdot \omega_k\ , \qquad (2)$$

որտեղ ω_k- ն k-րդ դրամական հոսքի ներկա արժեքի կշիռն է պարտատոմսի գնի (բոլոր դրամական հոսքերի ներկա արժեքների գումարի) մեջ: (2) մեծությունը հայտնի է որպես Մաքոլիի դյուրացիա:

Այսպիսով, d -ն դրամական հոսքերի ստացման պահերի միջին կշռված մեծություն է (Գծապատկեր 1):

Գծապատկեր 1. Դրամական հոսքերը ժամանակային հորիզոնում



Մասնագիտական գրականությունը Մաքոլիի դյուրացիան առավել հաճախ դիտարկում է $t_k = k, CF_k = cF, k = \overline{1, N-1}, CF_N = cF + F$ բնութագիրն ունեցող պարտատոմսի[1] (plain vanilla) համար: Այս պարագայում, որոշակի ձևափոխություններից հետո (2)-ը ներկայացվում է հետևյալ տեսքով [**3,7,9**].

$$d(c,y,N) = \frac{1+y}{y} - \frac{N(c-y)+1+y}{c(1+y)^N-(c-y)}, \tag{3}$$

Հայտնի է նաև Մաքոլիի դյուրացիայի և ձևափոխված դյուրացիայի կապը [**3**].

$$d = \frac{\partial \ln P}{\partial \ln(1+y)} = \frac{\partial \ln P}{\partial y} : \frac{\partial \ln(1+y)}{\partial y} = -\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial y}(1+y) = md(1+y), \tag{4}$$

որտեղ md -ն ձևափոխված դյուրացիան է:

Ստորև ներկայացնենք Մաքոլիի դյուրացիայի մի քանի հատկություններ, որոնք կարելի է դիտարկել վերոնշյալ հավասարումներից.

1. Մաքոլիի դյուրացիայի չափման միավորը ժամանակն է, և $0 < d \le N$:
2. $d(c,y,N)$-ը նվազող ֆունկցիա է y -ից, երբ մնացած պարամետրերը ենթադրվում են անփոփոխ:
3. $d(c,y,N)$-ը նվազող ֆունկցիա է c -ից, երբ մնացած պարամետրերը ենթադրվում են անփոփոխ:
4. Երբ պարտատոմսի դյուրացիան հաշվարկվում է արժեկտրոնների վճարման պահերի միջև, ապա $d_* = d - \frac{t}{T}$, որտեղ T -ն արժեկտրոնային փուլի օրերի քանակն է, իսկ t -ն հաշվարկման պահից մինչև հաջորդ արժեկտրոնի վճարման պահն ընկած օրերի քանակը:
5. Եթե պարտատոմսը զեղչատոկոսային է $(c=0)$, ապա $d = N$, այսինքն՝ զեղչատոկոսային պարտատոմսի Մաքոլիի դյուրացիան մինչև մարում ժամկետն է:
6. Եթե արժեկտրոնի վճարումների քանակը անսահմանափակ է (perpetuity)՝ $N \to \infty$, $d \to \frac{1+y}{y}$, այսինքն՝ այս դեպքում պարտատոմսի դյուրացիան անկախ է արժեկտրոնի մեծությունից:

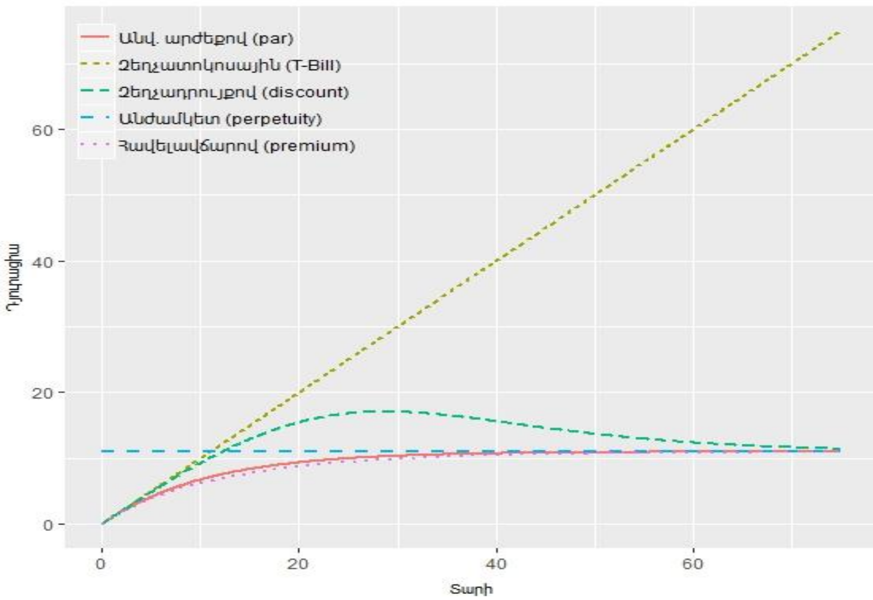
Որպես ժամանակի միավոր, հետաքրքրական է Մաքոլիի դյուրացիայի և պարտատոմսի մինչև մարում ժամկետի կապը: Մասնագիտական գրականությունում պարտատոմսի մինչև մարում

---

[1] Հաստատուն և հավասար պարբերականությամբ արժեկտրոնով, չի հանդիսանում տրոհում, թողարկողի և գնորդի իրավունքներով օպցիոնների բացակայությամբ, ապահովված չէ որևէ այլ ակտիվով:

ժամկետայնության և Մաքոլիի դյուրացիայի կապը (երբ $\frac{t}{T}=0$) հաճախ ներկայացվում է գծապատկերի տեսքով (Գծապատկեր 2), որտեղ կարելի է նկատել Մաքոլիի դյուրացիայի հետևյալ հատկությունները [**3,7**].

Գծապատկեր 2. Մաքոլիի դյուրացիայի և մինչև մարում ժամկետի միջև կապը



7. *Եթե պարտատոմսի գինը հավասար է անվանական արժեքին $(c=y)$ կամ մեծ է անվանական արժեքից $(c>y)$՝ հավելավճարով, ապա Մաքոլիի դյուրացիան աճում է մինչև մարում ժամկետի աճի հետ. այսինքն՝ $d(N)$-ը աճող ֆունկցիա է:*
8. *Եթե պարտատոմսի գինը փոքր է անվանական արժեքից $(c<y)$՝ զեղչադրույքով, ապա Մաքոլիի դյուրացիան, մինչև մարում ժամկետի աճի հետ, նախ աճում է, ապա նվազում. այսինքն՝ գոյություն ունի N_0 ժամկետայնություն այնպես, որ $d(N)<d(N_0), N<N_0$ և $d(N)<d(N_0),\quad N>N_0$:*

Ստորև ներկայացնենք 7-րդ և 8-րդ հատկությունների ապացույցները:

➢ Նախ, երբ $c=y$. (3)-ից կարող ենք ստանալ, որ $d=\frac{1+y}{y}\left(1-\frac{1}{(1+y)^N}\right)$, որը ակնհայտ աճում է N-ի աճի հետ:

$c\neq y$ դեպքերի համար դիտարկենք հետևյալ հավասարումը, որը կարելի է ստանալ (3)-ը ածանցելով ըստ N-ի.

$$\frac{\partial d}{\partial N}=\frac{\left[(y-c)\left(c(1+y)^N+y-c\right)\right]+\left[c(1+y)\ln(1+y)(1+y)^N\right]+\left[Nc(c-y)\ln(1+y)(1+y)^N\right]}{\left(c(1+y)^N+y-c\right)^2} \qquad (5)$$

(5)- ի համարիչի առաջին բաղադրիչը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով.

$$(y-c)\left(c(1+y)^N+y-c\right)=c(y-c)\left((1+y)^N-1+1\right)+(y-c)^2=c(y-c)\left((1+y)^N-1\right)+(y-c)y$$

և նշանակենք

$$\mathrm{A}\equiv\left[(y-c)y+c(1+y)\ln(1+y)(1+y)^N\right],\mathrm{B}\equiv\left[Nc(c-y)\ln(1+y)(1+y)^N-c(c-y)\left((1+y)^N-1\right)\right]:$$

Արդյունքում (5) -ը կբերվի հետևյալ տեսքին.

$$\frac{\partial d}{\partial N}=\frac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{\left(c(1+y)^N+y-c\right)^2} \tag{6}$$

Գնահատենք A և B բաղադրիչները՝ օգտագործելով հետևյալ երեք հայտնի անհավասարությունները [4].

- $(1+y)^N\geq 1$, երբ $y>0, N\geq 0$:
- $(1+y)\ln(1+y)>y$, երբ $y>0$:
- $\ddot{a}_N\leq N$, երբ $y>0, N\geq 0$, որտեղ $\ddot{a}_N=(1+y)\dfrac{1-(1+y)^{-N}}{y}$:

$\mathrm{A}=(y-c)y+c(1+y)\ln(1+y)(1+y)^N>(y-c)y+cy(1+y)^N\geq y^2-cy+cy>0$: Այսինքն, անկախ y,c ցուցանիշների հարաբերակցությունից (6) հավասարման համարիչի առաջին գումարելին միշտ դրական է: Մինչդեռ նույնը պնդել (6) հավասարման համարիչի երկրորդ գումարելու մասին չի կարելի: y,c ցուցանիշների տարբեր հարաբերակցությունների դեպքում նշված գումարելին կարող է լինել և' բացասական, և' ոչ բացասական: Սակայն, այն դեպքում

➢ երբ $c>y$,

$$\mathrm{B}=c(c-y)(1+y)^N\left(N\ln(1+y)-\left(1-(1+y)^{-N}\right)\right)>c(c-y)(1+y)^N\left(N\frac{y}{1+y}-\ddot{a}_N\frac{y}{1+y}\right)\geq 0 \tag{7}$$

Ուստի, երբ $c>y$, ապա $\dfrac{\partial d}{\partial N}=\dfrac{\mathrm{A}+\mathrm{B}}{\left(c(1+y)^N+y-c\right)^2}>0$, հետևաբար հավելավճարով պարտատոմսի համար Մաքոլիի դյուրացիան աճում է մինչև մարում ժամկետայնության աճի հետ. $d(N)$-ը աճող ֆունկցիա է:

➢ Այն դեպքում, երբ $c<y$, կարելի է ենթադրել, որ հնարավոր են B -ի և հետևաբար (6)-ի և' բացասական, և' ոչ բացասական արժեքներ, որը կարող ենք ստուգել՝ լուծելով $\dfrac{\partial d}{\partial N}=0$ հավասարումը: Պարզ ձևափոխություններից հետո ստացվում է հետևյալ անդրադարձ հավասարումը [5].

$$N_0=\frac{y-c}{c\ln(1+y)}\left(\frac{1}{1+y}\right)^{N_0}+\frac{1}{\ln(1+y)}+\frac{1+y}{y-c} \tag{8}$$

Ցույց տանք, որ (8)-ը ունի միակ լուծում: Այն կարելի է բերել $f(x)=\alpha\cdot\beta^x+\gamma-x, 0<\beta<1, \alpha>0, \gamma>0, x\geq 0$ ֆունկցիայի 0-ի գոյությունը ապացուցելուն, որտեղ $\alpha = \dfrac{y-c}{c\ln(1+y)}, \beta = \dfrac{1}{1+y}, \gamma = \dfrac{1}{\ln(1+y)} + \dfrac{1+y}{y-c}$ ։ $f(+\infty) = -\infty,\ f(0) = \alpha + \gamma > 0$ և քանի որ $f(x)$-ը անընդհատ է, ապա $\exists x_0 \in (0,+\infty)$ $s.t.\ f(x_0) = 0$՝ ըստ միջին արժեքի թեորեմի։ Իսկ միակությունը բխում է նրանից, որ $x = \alpha\beta^x + \gamma$ հավասարման ձախ մասում աճող, իսկ աջում նվազող ֆունկցիաներ են, հետևաբար, եթե դրանք հատվում են, ապա հատման կետը միակն է։ Այսինքն (3)-ը ունի կրիտիկական կետ ($c < y$)։ Մյուս կողմից, քանի որ $\left.\dfrac{\partial^2 d}{\partial N^2}\right|_{N=N_0} = \dfrac{(c-y)\ln(1+y)}{c(1+y)^{N_0} + y - c} < 0$, ուստի այդ կետը մաքսիմումի կետ է։ Հետևաբար ապացուցված է նաև 8-րդ հատկությունը։

Վերոնշյալ արդյունքներից կարելի է կատարել նաև հետևյալ եզրահանգումները.

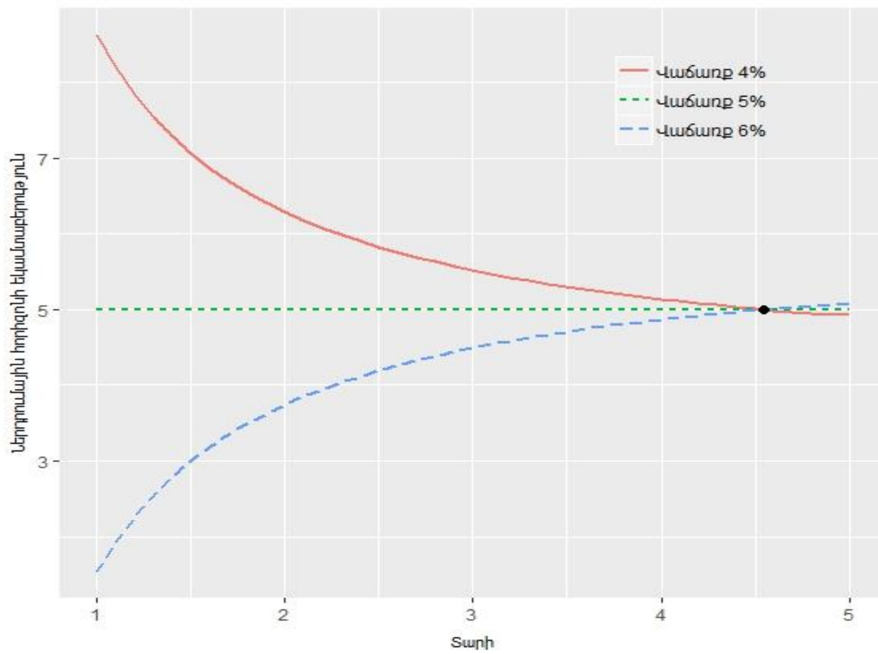
9. *Զեղչադրույքով պարտատոմսի համար դյուրացիան մինչև մարում ժամկետայնությունից կախված աճում է մինչև* $N_0 \cong \dfrac{1}{y} + \dfrac{1+y}{y-c} + \dfrac{y-c}{yc(1+y)^{N_0}}$ *պահը, ապա նվազում է,*
10. *Օրինակի միջոցով հեշտությամբ կարելի է ցույց տալ, որ* N_0*-ի և* $(y-c)$*-ի միջև ուղիղ կապ չկա։*
11. *Զեղչադրույքով պարտատոմսի համար, երբ* $y \to c- \Rightarrow N_0 \to +\infty$*։*

Քանի որ, ինչպես վերը նշվեց, Մաքոլիի դյուրացիան ժամանակի միավոր է, հետաքրքրական է նաև դրա կապը ներդրումային հորիզոնի հետ։ Հայտնի է, որ փոփոխվող տոկոսադրույքների պայմաններում պարտատոմսի Մաքոլիի դյուրացիայից կարճ կամ երկար ներդրումային հորիզոնի դեպքերում կստացվեն տարբեր տարեկանացված ՆՀԵ-ներ (ներդրումային հորիզոնի եկամտաբերություն) [**6**]։ Ներդրումային հորիզոնի երկարության և տարեկանացված ՆՀԵ-ի կապը դիտարկենք հետևյալ օրինակով։ Դիցուք ձեռք է բերվում 5% մինչև մարում եկամտաբերությամբ, 5% տարեկան արժեկտրոնով, 5 տարի մինչև մարում ժամկետով պարտատոմս, որի Մաքոլիի դյուրացիան մոտ 4.55 է։

Դիտարկենք առքից հետո՝ մինչև հաջորդ արժեկտրոնի վճարումը, տոկոսադրույքների հետևյալ սցենարները. տոկոսադրույքը մնում է անփոփոխ, տոկոսադրույքը բարձրանում կամ իջնում է՝ դառնալով համապատասխանաբար 6% և 4%, այնուհետև մնում անփոփոխ։ Դիտարկենք տարեկանացված ՆՀԵ-ի փոփոխությունը ժամանակից կախված երեք վերոնշյալ դեպքերում, երբ ներդրումային հորիզոնը գերազանցում է մեկ տարին (Գծապատկեր 3)։

Տոկոսադրույքների փոփոխության դեպքում եկամտաբերության վրա ազդում են երկու գործոններ՝ գնի փոփոխությունը և վերաներդրումից եկամուտը։ Տոկոսադրույքի նվազման դեպքում գնի փոփոխությունից հավելյալ եկամուտը գերազանցում է ցածր տոկոսադրույքով վերաներդրման ազդեցությանը մինչև որոշակի պահ, և ժամանակահատվածի տարեկանացված ՆՀԵ-ն մեծ է սկզբնական մինչև մարում եկամտաբերությունից, որից հետո վերաներդրման ազդեցությունը գերակշռում է, և ժամանակահատվածի տարեկանացված ՆՀԵ-ն փոքր է սկզբնական մինչև մարում եկամտաբերությունից։ Հակառակը տեղի ունի տոկոսադրույքի աճի դեպքում։ Տոկոսադրույքների անփոփոխ մնալու դեպքում, երբ առքի և վաճառքի պահերին գները հաշվարկվում են միևնույն մինչև մարում եկամտաբերությամբ և պարտատոմսի արժեկտրոնները վերաներդրվում են սկզբնական մինչև մարման եկամտաբերության դրույքով, տարեկանացված ՆՀԵ-ն չի տարբերվում մինչև մարում եկամտաբերությունից [**7**]։ Գծապատկերից պարզ է նաև, որ գոյություն ունի ժամանակի այնպիսի պահ, երբ թե՛ տոկոսադրույքների աճի, թե՛ նվազման դեպքում ներդրման տարեկանացված ՆՀԵ-ն հավասարվում է պարտատոմսի սկզբնական մինչև մարում եկամտաբերությանը:

Գծապատկեր 3. Տարեկանացված ներդրումային հորիզոնի եկամտաբերությունը տարբեր սցենարների դեպքում[2]



Ցույց տանք, որ տոկոսադրույքի աճի, նվազման և անփոփոխ մնալու դեպքերում ՆՀԵ-ը համապատասխանաբար աճող, նվազող և հաստատուն ֆունկցիա է ըստ ներդրումային հորիզոնի, և ընդհանուր դեպքում այն պահը, երբ ՆՀԵ-ները հավասարվում են, մոտ է պարտատոմսի Մաքոլիի դյուրացիային:

Դիցուք ունենք պարտատոմս y_0 տարեկան մինչև մարում եկամտաբերությամբ, որը մինչև առաջին արժեկտրոնի վճարումը փոխվում է՝ դառնալով $y_1, y_1 \neq y_0$: Դիտարկենք ժամանակի որոշակի t պահ, , ենթադրենք, որ այն գտնվում է ինչ-որ $(k, k+1]$ միջակայքում, $k = \overline{0, N-1}$: Այս կետում պարտատոմսն իրացնելու դեպքում ՆՀԵ-ն ստացվում է հետևյալ երկու բաղադրիչներից [**8**].

- Մինչև t պահը ստացված արժեկտրոնների և դրանց վերաներդրումից եկամտից. $CR = C(1+y_1)^{t-1} + C(1+y_1)^{t-2} + \ldots + C(1+y_1)^{t-k}$ և
- Գնի փոփոխությունից՝ $P_t(y_1)$- պարտատոմսի փոփոխված գինը t պահին y_1 եկամտաբերության դեպքում. $P_t(y_1) = \dfrac{C}{(1+y_1)^{k+1-t}} + \dfrac{C}{(1+y_1)^{k+2-t}} + \ldots + \dfrac{C}{(1+y_1)^{n-t}}$

Այսպիսով, ՆՀԵ-ն հավասար է.

---

[2] Միտումը նույնն է նաև մինչև մեկ տարի հատվածում:

$$ՆՀԵ = \frac{CR + P_t(y_1)}{P_0(y_0)} - 1, \tag{9}$$

որտեղ $P_0(y_0)$-ը պարտատոմսի գինն է 0 պահին, երբ պարտատոմսի եկամտաբերությունը հավասար է y_0: Կատարելով որոշ ձևափոխություններ՝ կստանանք.

$$ՆՀԵ = \frac{C(1+y_1)^{t-1} + C(1+y_1)^{t-2} + \ldots + C(1+y_1)^{t-k} + \frac{C}{(1+y_1)^{k+1-t}} + \frac{C}{(1+y_1)^{k+2-t}} + \ldots + \frac{C}{(1+y_1)^{n-t}}}{P_0(y_0)} =$$

$$= (1+y_1)^t \frac{\frac{C}{1+y_1} + \frac{C}{(1+y_1)^2} + \ldots + \frac{C}{(1+y_1)^k} + \frac{C}{(1+y_1)^{k+1}} + \frac{C}{(1+y_1)^{k+2}} + \ldots + \frac{C}{(1+y_1)^n}}{P_0(y_0)} = (1+y_1)^t \frac{P_0(y_1)}{P_0(y_0)}$$

Նշանակենք R -ով տարեկանացված ՆՀԵ- ն, որը հավասար կլինի.

$$R = \left(\frac{CR + P_t(y_1)}{P_0(y_0)}\right)^{\frac{1}{t}} - 1 = (1+y_1) \times \left(\frac{P_0(y_1)}{P_0(y_0)}\right)^{\frac{1}{t}} - 1 \tag{10}$$

Տարեկանացված ՆՀԵ-ի կախվածությունը ներդրումային հորիզոնից պարզելու համար դիտարկենք R -ի ածանցյալը t -ից.

$$\frac{\partial R}{\partial t} = (1+y_1) \times \left(\frac{P_0(y_1)}{P_0(y_0)}\right)^{\frac{1}{t}} \times \left(-\frac{1}{t^2}\right) \times \ln\left(1 + \frac{P_0(y_1) - P_0(y_0)}{P_0(y_0)}\right) \tag{11}$$

(11)-ի նշանը կախված է $P(y_1)$ և $P(y_0)$ հարաբերակցությունից: Դիտարկենք տոկոսադրույքի նվազման դեպքը, այսինքն՝ $y_1 < y_0$: Նախ, տոկոսադրույքների նվազման պահին, երբ դեռևս բացակայում է արժեկտրոնային եկամտաբերության ազդեցությունը, ՆՀԵ-ի վրա ազդում է միայն գնի փոփոխությունը ձևափոխված դյուրացիայի և տոկոսադրույքի փոփոխության արտադրյալի չափով [7], ուստի տոկոսադրույքի նվազման պահին ՆՀԵ գերազանցում է սկզբնական մինչև մարում եկամտաբերությանը: $y_1 < y_0$ դեպքում $\frac{\partial R}{\partial t} < 0$, ուստի տարեկանացված ՆՀԵ-ն նվազում է ողջ ներդրումային հորիզոնի ընթացքում: Հակառակը տեղի ունի տոկոսադրույքի աճի դեպքում:

Այժմ դիտարկենք այն կետը, որտեղ հավասարվում են քննարկվող երեք դեպքերում տարեկանացված ՆՀԵ-ները, ենթադրենք, որ այն գտնվում է ինչ-որ $(k, k+1]$ միջակայքում, $k = \overline{0, N-1}$ Նշանակենք այդ կետը t_0 -ով: Հավասարեցնելով տոկոսադրույքի փոփոխման և անփոփոխ մնալու դեպքերում տարեկանացված ՆՀԵ-ները (որը վերջին դեպքում պարտատոմսի սկզբնական մինչև մարում եկամտաբերությունն է), կստանանք.

$$(1+y_1) \times \left(\frac{P(y_1)}{P(y_0)}\right)^{\frac{1}{t_0}} - 1 = y_0 \tag{12}$$

Կատարելով որոշակի ձևափոխություններ և օգտվելով այն հանգամանքից, որ փոքր x-երի դեպքում $\ln(1+x)\cong x$՝ կստանանք.

$$\frac{1}{t_0}\ln\left(1+\frac{P(y_1)-P(y_0)}{P(y_0)}\right)=-\ln\left(1+\frac{y_1-y_0}{1+y_0}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{t_0}\left(\frac{P(y_1)-P(y_0)}{P(y_0)}\right)\cong-\left(\frac{y_1-y_0}{1+y_{.0}}\right)$$

$$t_0\cong-\frac{P(y_1)-P(y_0)}{P(y_0)}\times\frac{1+y_0}{y_1-y_0}=-\frac{P(y_1)-P(y_{.0})}{y_1-y_0}\times\frac{1}{P(y_0)}(1+y_0)\cong-\frac{1}{P(y_0)}\frac{\partial P}{\partial y}\bigg|_{y=y_0}(1+y_0)=$$
$$=md\times(1+y_0)$$

Վերջին քայլում օգտվեցինք ձևափոխված դյուրացիայի սահմանումից՝ ենթադրելով, որ $y_1-y_0\cong 0$: Օգտվելով (4)-ից ի վերջո կստանանք, որ

$$t_0\cong d \tag{13}$$

Ամփոփելով ստացված արդյունքը, ներկայացնենք Մաքոլիի դյուրացիայի ևս երկու հատկություն.

12. *Եթե տոկոսադրույքներն փոխվում են, և ներդրումային հորիզոնը հավասար է Մաքոլիի դյուրացիային, ապա տարեկանացված ՆՀԵ-ն հավասար է առքի մինչև մարում եկամտաբերությանը:*
13. *Եթե տոկոսադրույքները բարձրանում են, և ներդրումային հորիզոնը ավելի փոքր (մեծ) է քան Մաքոլիի դյուրացիան, ապա տարեկանացված ՆՀԵ-ն փոքր (մեծ) է առքի մինչև մարում եկամտաբերությունից, և հակառակը: Հակառակը տեղի ունի տոկոսադրույքների նվազման դեպքում:*

Գրականություն

1. **F.R.Macaulay.** Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the U.S. since 1856. New York: National Bureau of Economic Research 1983
2. **R.L.Weil.** Macaulay's Duration: An Appreciation, The Journal of Business, Volume 46 Number 4, October 1973
3. **D.Lovelock, M.Mendel, L. Wright.** An Introduction to Mathematics of Money, Springer 2007
4. **László Kozma.** Useful Inequalities Cheat Sheet
5. **G.A.Hawawini.** On the Relationship between Macaulay's Bond Duration and the Term to Maturity, Economic Letters, January 1984
6. **B.Pettit, J.E.Pinto, W.L.Pirie.** Fixed Income Analysis, 3rd edition, CFA Institute 2015
7. **D.Smith.** Bond Math, Wiley 2011
8. **K.N.Tiwari.** Investment Horizon, Duration, and Market Rate Variations: Functionality of the New ROR, Journal of Financial and Strategic Decisions, Volume 12 Number 2, Fall 1999
9. **D.J.Bolder.** Fixed- Income Portfolio Analytics, Springer 2015

А.Г.Галстян, Л.О.Ароян, В.А.Мелик-Парсаданян

О нескольких свойствах дюрации Маколея

Дюрация важнейшая концепция на рынке инструментов с фиксированным доходом. Известны несколько дюраций, такие как дюрация Маколея, модифицированное дюрация, эффективное дюрация, спред дюрация, которые имеют широкое применение в управлении портфелем ценных бумаг и в функциях управления рисками. В данной работе рассматривается дюрация Маколея, его свойства и применение в в анализе ценных бумаг с фиксированным доходом.

Ключевые слова. *Дюрация Маколея, модифицированная дюрация, срок погашения, горизонт инвести, доход инвестиционного горизонта.*

A.G.Galstian, L.H.Haroyan, V.A.Melik-Parsadanyan

Macaulay's Duration: Some Properties

Duration is an important concept in fixed income security analysis. There are several duration measures that are widely applied in portfolio and risk management: Macaulay's, modified, effective, spread, spot etc. In this paper Macaulay's duration and some properties and applications in fixed income are well presented.

Keywords. *Macaulay's duration, modified duration, time to maturity, investment horizon, holding period return.*

Գալստյան Անի - ԵՊՀ Մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի մագիստրոս

Հարոյան Լևոն - ԵՊՀ Մաթեմատիկայի և մեխանիկայի ֆակուլտետի մագիստրոս

Մելիք - Փարսադանյան Վահագն, **CFA** - ՀՀ կենտրոնական բանկ