ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1.1991 — 3 Естественные науки

**Математика**

УДК 515.1

Э.А.МИРЗАХАНЯН

# О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПОДМНОЖЕСТВ ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА. II

В первой части [1] этой общей статьи описаны некоторые классы $K_0$, $K_1$ и $K$ непрерывных отображений $f\colon M \to H$ подмножеств действительного гильбертова пространства $H$ (причем имеют место включения $K_0 \subset K_1 \subset K$ и приведен целый ряд свойств отображений, принадлежащих этим классам).

В данной части приведены дальнейшие свойства упомянутых классов и описаны некоторые конструкции в этих классах. Для отображений, принадлежащих некоторому подклассу $K^c$ класса $K$, определяется понятие топологической степени. Определяются так называемые $K$-бесконечномерные гомотопические группы некомпактного и компактного типов подмножеств пространства $H$ и приводится один важный результат, относящийся к этим группам.

Как уже условились в первой части [1], для удобства отображения, принадлежащие классам $K_0$, $K_1$, $K$, будут называться $K_0$-, $K_1$- и $K$-отображениями, соответственно. Далее для каждого $K$-отображения $f\colon G \to H$, где $G$ — открытое в $H$ множество, была определена единственная вещественнозначная непрерывная функция, заданная на $G$, называемая терминальной производной отображения $f$ и обозначаемая через $\lambda_f(x)$. Было отмечено также, что композиция двух $K_0$-отображений является также $K_0$-отображением.

Имеет место

*Теорема 3.* Пусть $G$ и $G'$ — открытые подмножества пространства $H$, $f\colon G \to H$ — $K$-отображение и $g\colon G' \to H$ — $K_0$-отображение, причем $f(G) \subset G'$. Тогда композиция $g \circ f\colon G \to H$ является $K$-отображением и имеет место соотношение

$$\lambda_{g\circ f}(x) = \lambda_g(f(x))\lambda_f(x)$$

для каждой точки $x \in G$.

*Доказательство.* Пусть $x_0 \in G$ и $y_0 = f(x_0)$. Рассмотрим случай, когда $\lambda_f(x_0) = 0$. Так как $g$ в точке $y_0$ удовлетворяет условию Липшица, то существуют такая окрестность $V_0 \subset G'$ точки $y_0$ в $G'$ и такое $c > 0$, что если $x, y \in V_0$, то выполнено соотношение

$$\|g(x)-g(y)\|\leqslant c\|x-y\|.$$

Далее, в силу непрерывности отображения f существует такая окрестность $U_0\subset G$ точки $x_0$ в G, что $f(U_0)\subset V_0$. Следовательно, для любых точек $x,y\in U_0$ будем иметь

$$\|g(f(x))-g(f(y))\|\leqslant c\|f(x)-f(y)\|.$$

Пусть теперь $\varepsilon$ – произвольное положительное число. Тогда существуют окрестность $U\subset G$ точки $x_0$ и конечномерное подпространство $L\subset H$ такие, что если $x,y\in U$ и вектор $x-y$ ортогонален L, то выполнено соотношение

$$\|f(x)-f(y)-\lambda_f(x_0)(x-y)\|=\|f(x)-f(y)\| \leqslant c\cdot\frac{\varepsilon}{c}\|x-y\|.$$

Следовательно, если $x,y\in U\cap U_0$ и вектор $x-y$ ортогонален подпространству L, то

$$\|g(f(x))-g(f(y))\| \leqslant c\|f(x)-f(y)\| \leqslant c\cdot\frac{\varepsilon}{c}\|x-y\|=\varepsilon\|x-y\|,$$

т.е.

$$\|(g\circ f)(x)-(g\circ f)(y)-0(x-y)\|\leqslant\varepsilon\|x-y\|, \qquad (1)$$

а это означает, что в точке $x_0$ выполнено условие принадлежности отображения $g\circ f$ классу K и при этом в силу соотношения (1) мы имеем $\lambda=0$ для любого $\varepsilon>0$. Следовательно, в силу единственности терминальной производной $\lambda_{g\circ f}(x_0)=0$, и потому при $x=x_0$ соотношение $\lambda_{g\circ f}(x_0)=\lambda_g(f(x_0))\cdot\lambda_f(x_0)$ справедливо.

Рассмотрим теперь случай, когда $\lambda_f(x_0)\neq0$. Выберем произвольное положительное число $\varepsilon$ и положим

$$\tilde\varepsilon = \frac{\varepsilon}{|\lambda_f(x_0)|+|\lambda_g(y_0)|+1}.$$

Так как отображение g в точке $y_0$ принадлежит классу $K_0$ [1], то существует окрестность $\tilde V\subset G'$ точки $y_0$, конечномерное подпространство $\tilde L\subset H$ и число $\delta>0$ такие, что если $x,y\in\tilde V$ и угол между вектором $x-y$ и подпространством $\tilde L$ не меньше $\frac{\pi}{2}-\tilde\delta$, то

$$\|g(x)-g(y)-\lambda_g(y_0)(x-y)\| \leqslant \tilde\varepsilon\|x-y\|. \qquad (2)$$

Положим $\varepsilon'=\min(1,\varepsilon,|\lambda_f(x_0)\sin\frac{\tilde\delta}{2})$. Так как теперь $\lambda_f(x_0)\neq0$, то $\varepsilon'>0$. Поскольку отображение f точки $x_0$ принадлежит классу K, то существуют такая окрестность $U\subset G$ точки $x_0$, такое конечномерное подпространство $L'\subset H$, что если $x,y\in U$ и вектор $x-y$ ортогонален подпространству $L'$ то выполнено соотношение

$$\|f(x)-f(y)-\lambda_f(x_0)(x-y)\| \leqslant \varepsilon'\|x-y\|. \qquad (3)$$

При этом мы можем считать, что $f(U)\subset\tilde V$. Наконец обозначим через L конечномерное подпространство, содержащее оба подпространства $\tilde L$ и $L'$

Пусть $x,y\in U$ – такие точки, что вектор $x-y$ ортогонален подпространству L. Тогда поскольку $L\supset L'$, то вектор $x-y$ ортогонален подпространству $L'$. Следовательно, имеет место соотношение (3).

Положив $f(x)-f(y)-\lambda_f(x_0)(x-y)=z$, будем иметь

$$\|z\|=\|f(x)-f(y)-\lambda_f(x_0)(x-y)\|\leqslant \varepsilon'\ \|x-y\|\leqslant|\lambda_f(x_0)|\sin\frac{\tilde\delta}{2}\|x-y\|.$$

Таким образом

$$\frac{\|z\|}{\|\lambda_f(x_0)(x-y)\|}\leqslant \sin\frac{\tilde\delta}{2},$$

и потому угол между векторами $f(x)-f(y)$ и $\lambda_f(x_0)(x-y)$ не превосходит $\frac{\tilde\delta}{2}$. Так как вектор $x-y$, а значит, и вектор $\lambda_f(x_0)(x-y)$ ортогонален $L$, то угол между вектором $f(x)-f(y)$ и подпространством $L$ не меньше $\frac{\pi}{2}-\frac{\tilde\delta}{2}>\frac{\pi}{2}-\tilde\delta$. Так как $L\supset\tilde L$, то угол между вектором $f(x)-f(y)$ и подпространством $\tilde L$ не меньше $\frac{\pi}{2}-\tilde\delta$. При этом $f(x),f(y)\in\tilde V$. Следовательно, к точкам $f(x),f(y)$ применимо соотношение (2), и мы будем иметь

$$\|g(f(x))-g(f(y))-\lambda_g(y_0)(f(x)-f(y))\|\leqslant\tilde\varepsilon\|f(x)-f(y)\|. \qquad (4)$$

В силу соотношений (2),(3),(4), получим

$$\begin{aligned}\|g(f(x))-g(f(y))-\lambda_g(y_0)\lambda_f(x_0)(x-y)\|&\leqslant\|g(f(x))-g(f(y))-\lambda_g(y_0)\cdot\\ \cdot(f(x)-f(y))\|+\|\lambda_g(y_0)(f(x)-f(y))-\lambda_g(y_0)\lambda_f(x_0)(x-y)\|&\leqslant\\ \leqslant\tilde\varepsilon\|f(x)-f(y)\|+|\lambda_g(y_0)|\|f(x)-f(y)-\lambda_f(x_0)(x-y)\|&\leqslant\tilde\varepsilon\|f(x)-f(y)\|+\\ +|\lambda_g(y_0)|\,\|x-y\|\leqslant\tilde\varepsilon(\|\lambda_f(x_0)(x-y)\|+\varepsilon'\|x-y\|)+|\lambda_g(y_0)|\varepsilon'\|x-y\|&=\\ =(\tilde\varepsilon(|\lambda_f(x_0)|+\varepsilon')+|\lambda_g(y_0)|\varepsilon')\|x-y\|\leqslant\tilde\varepsilon(|\lambda_f(x_0)|+\varepsilon'&+\\ +|\lambda_g(y_0)|\,\|x-y\|\leqslant\tilde\varepsilon(|\lambda_f(x_0)|+|\lambda_g(y_0)+1)\|x-y\|=\varepsilon\|x-y\|.&\end{aligned}$$

Итак, если $x,y\in U$ такие точки, что вектор $x-y$ ортогонален подпространству $L$, то выполнено соотношение

$$\|g(f(x))-g(f(y))-\lambda_g(y_0)\lambda_f(x_0)(x-y)\|\leqslant\varepsilon\|x-y\|,$$

т.е. и в этом случае в точке $x_0$ выполнено условие принадлежности отображения $g\circ f$ к классу $K$. В силу произвольности точки $x_0$ заключаем, что $g\circ f$ принадлежит $K$ на всем $G$ и выполнено соотношение

$$\lambda_{g\circ f}(x)=\lambda_g(f(x))\lambda_f(x)\quad(x\in G),$$

что и требовалось доказать.

Аналогичное утверждение имеет место и для $K_1$-отображения.

*Теорема 4.* Пусть $G$ и $G'$ — открытые подмножества пространства $H$, $f$: $G\to H$ — $K_1$-отображение и $g$: $G'\to H$ — $K_0$-отображение, причем $f(G)\subset G'$ Тогда композиция $g\circ f$: $G\to H$ является $K_1$-отображением и имеет место соотношение

$$\lambda_{g\circ f}(x)=\lambda_g(f(x))\lambda_f(x)$$

для каждой точки $x\in G$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3, для этого надо только воспользоваться теоремой 2 статьи [1] и все конечномерные подпространства $H$, рассматриваемые в ходе доказательства, выбрать среди подпространств, натянутых на векторы заданного произвольного ортонормированного базиса $\sigma=\{e_i\}_{i\in I}$ пространства $H$.

*Теорема 5.* Пусть $G$ и $G'$ – открытые подмножества пространства $H$, $f\colon G \to H$ и $g\colon G' \to H$ – K-отображения (соответственно $K_1$-отображения), причем $f(G)\subset G'$. Если отображение $f$ представимо в виде $f=\varphi+\psi$, где $\varphi$ – ограничение на $G$ ортогонального преобразования или гомотетии с отличным от нуля коэффициентом пространства $H$ на себя, а $\psi$ постоянное отображение, то композиция $g\circ f\colon G \to H$ является K-отображением (соответственно $K_1$-отображением).

*Доказательство.* Пусть $f$ и $g$ являются K-отображениями. Пусть, далее, $x_0\in G$ и $y_0=f(x_0)$. Зададим произвольно $\varepsilon>0$. В силу принадлежности $g$ к классу K в точке $y_0$ для числа $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{|\lambda_f(x_0)|+|\lambda_g(y_0)|+1}$ существуют окрестность $V\subset G'$ точки $y_0$ и конечномерное подпространство $L_1\subset H$ такие, что если $y_1,y_2\in V$ и вектор $(y_1-y_2)\perp L_1$, то

$$\|g(y_1)-g(y_2)-\lambda_g(y_0)(y_1-y_2)\|\leqslant\varepsilon_1\|y_1-y_2\|. \tag{5}$$

В силу принадлежности $f$ в точке $x_0$ к классу K для числа $\varepsilon_2=\min(1,\varepsilon_1)$ существуют окрестность $U\subset G$ точки $x_0$, конечномерное подпространство $L_2\subset H$ такие, что если $x,y\in U$ и вектор $(x-y)\perp L_2$, то

$$\|f(x)-f(y)-\lambda_f(x_0)(x-y)\|\leqslant\varepsilon_2\|x-y\|. \tag{6}$$

Мы можем в силу непрерывности $f$ окрестность $U$ выбрать так, чтобы было $f(U)\subset V$.

Положим $L_3=\varphi^{-1}(L_1)$ и обозначим через $L$ – линейную оболочку подпространств $L_2$ и $L_3$. Если $x,y\in U$ и вектор $(x-y)\perp L$, то $f(x)-f(y)=\varphi(x)-\varphi(y)$ и из предположения о отображении $\varphi$ будет следовать, что $f(x),f(y)$ принадлежат $V$ и вектор $(f(x)-f(y))\perp L_1$. Поэтому

$$\|g(f(x))-g(f(y))-\lambda_g(y_0)(f(x)-f(y))\|\leqslant\varepsilon_1\|f(x)-f(y)\|. \tag{7}$$

Пусть теперь $x,y\in U$ и вектор $(x-y)\perp L$, тогда в силу соотношений (6),(7) будем иметь

$$\begin{aligned}
&g(f(x))-g(f(y))-\lambda_g(y_0)\lambda_f(x_0)(x-y)\| \leqslant \|g(f(x))-g(f(y))-\\
&-\lambda_g(y_0)(f(x)-f(y))\| + \|\lambda_g(y_0)(f(x)-f(y))-\lambda_g(y_0)\lambda_f(x_0)(x-y)\| \leqslant\\
&\leqslant \varepsilon_1\|f(x)-f(y)\|+|\lambda_g(y_0)|\,\|\\
&\|f(x)-f(y)\lambda_f(x_0)(x-y)\| \leqslant \varepsilon_1\|f(x)-f(y)\|+|\lambda_g(y_0)|\\
&\varepsilon_2\|x-y\| \leqslant \varepsilon_1(\|\lambda_f(x_0)(x-y)\|+\varepsilon_2\|x-y\|) + |\lambda_g(y_0)|\varepsilon_2\|x-y\| =\\
&= (\varepsilon_1(|\lambda_f(x_0)|+\varepsilon_2) + |\lambda_g(y_0)|\varepsilon_2)\|x-y\| \leqslant\\
&\leqslant \varepsilon_1(|\lambda_f(x_0)|+\varepsilon_2+|\lambda_g(y_0)|)\|x-y\| \leqslant\\
&\varepsilon_1(|\lambda_f(x_0)|+|\lambda_g(y_0)|+1)\|x-y\| = \varepsilon\|x-y\|.
\end{aligned}$$

Итак, если $x,y\in U$ – такие точки, что вектор $x-y$ ортогонален подпространству $L$, то выполнено соотношение

$$\|(g\circ f)(x)-(g\circ f)(y)-\lambda_g(y_0)\lambda_f(x_0)(x-y)\| \leqslant \varepsilon\|x-y\|,$$

т.е. в точке $x_0$ выполнено условие принадлежности отображения $g\circ f$ к классу K.

Рассмотрим случай, когда f и g являются $K_1$-отображениями. Доказательство этого случая почти аналогично доказательству рассмотренного выше случая K-отображения.

Пусть $x_0 \in G$, $\varepsilon > 0$ – произвольное заданное число и $\sigma = \{e_i\}_{i \in I}$ произвольный ортонормированный базис пространства H. Построим ортонормированный базис $\sigma' = \{e'_i\}_{i \in I}$ пространства H, положив $e'_i = \varphi(e_i)$ при любом i, если $\varphi$ есть ортогональное преобразование и $e'_i = e_i$ при любом i, если $\varphi$ – гомотетия. Так как отображение g в точке $y_0 = f(x_0)$ принадлежит классу $K_1$, то для числа

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|\lambda_f(x_0)| + |\lambda_g(y_0)| + 1}$$

существуют окрестность $V \subset G'$ точки $y_0$, конечномерное подпространство $L_1 \subset H$, натянутое на векторы базиса $\sigma'$ такие, что если $y_1$, $y_2 \in V$ и $(y_1 - y_2) \perp L_1$, то

$$\|g(y_1) - g(y_2) - \lambda_g(y_0)(y_1 - y_2)\| \leqslant \varepsilon_1 \|y_1 - y_2\|. \tag{8}$$

В силу принадлежности f к классу $K_1$ существуют окрестность $U \subset G$ точки $x_0$, конечномерное подпространство $L_2$, натянутое на век- такие, что если $x, y \in U$ и $(x-y) \perp L_2$, то

$$\|f(x) - f(y) - \lambda_f(x_0)(x-y)\| \leqslant \varepsilon_2 \|x-y\|. \tag{9}$$

...жим $L_2 = \varphi^{-1}(L_1)$ и обозначим через L конечномерное подпространство, натянутое на векторы базиса $\sigma$ и содержащее оба подпространства $L_2$ и $L_3$. В силу непрерывности отображения f мы можем считать, что $f(U) \subset V$.

Пусть теперь $x, y \in U$ и $(x-y) \perp L$, тогда, принимая во внимание соотношения (8),(9) и проводя вычисления, аналогичные приведенным в конце доказательства рассмотренного выше случая, получим

$$\|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(y) - \lambda_g(y_0)\lambda_f(x_0)(x-y)\| \leqslant \varepsilon \|x-y\|,$$

т.е. в точке $x_0$ выполнено условие принадлежности отображения $g \circ f$ к классу $K_1$.

Предложение 2. Пусть L – конечномерное подпространство пространства H и $M \subset L$ – открытое относительно L множество. Тогда всякое непрерывное отображение (соответственно локально удовлетворяющее условию Липшица отображение) g: $M \to H$ является K-отображением (соответственно $K_0$-отображением).

*Доказательство*. Рассмотрим отображение ортогонального проектирования p: $H \to L$ и положим $G = p^{-1}(L)$. Покажем, что отображение $f = g \circ p$: $G \to H$ является K-отображением. Пусть $x_0 \in G$ и $\varepsilon > 0$ задано произвольно. Рассмотрим некоторую окрестность $U \subset G$ точки $x_0$. Пусть точки $(x,y) \in U$ и вектор $(x-y) \perp L$. Тогда при $\lambda = 0$ будем иметь.

$$\|f(x) - f(y) - \lambda(x-y)\| = \|g(p(x)) - g(p(y))\| = \|0\| \leqslant \varepsilon \|x-y\|.$$

Итак, в произвольно выбранной точке $x_0 \in G$ отображение f принадлежит классу K и, следовательно, $f\colon G \to H$ есть K-отображение. Поскольку $f$ есть продолжение K-отображения, то согласно определению $g$ будет K-отображением.

Предположим теперь, что отображение $g$ локально удовлетворяет условию Липшица. Покажем, что $f\colon G \to H$ локально удовлетворяет условию Липшица. Пусть $x_0 \in G$ и $y_0 = p(x_0)$. По условию существуют окрестность $V \subset M$ точки $y_0$, положительное число $c$ такие, что если $y_1$, $y_2 \in V$, то $\|g(y_1)-g(y_2)\| \leqslant c\|y_1-y_2\|$. Положим $W = p^{-1}(V)$. Если теперь $x$, $y \in W$, то $p(x), p(y) \in V$, и мы будем иметь $\|f(x)-f(y)\| = \|g(p(x))-g(p(y))\| \leqslant c\|p(x)-p(y)\| \leqslant c\|x-y\|$.

Итак, отображение $f$ в точке $x_0$ локально удовлетворяет условию Липшица. Так как $f$ является K-отображением и локально удовлетворяет условию Липшица, то $f$ является $K_0$-отображением [1]. Отсюда следует, что $g$ является $K_0$-отображением.

Предложение 3. Пусть $H_1$ – подпространство конечной коразмерности пространства H, $p\colon H \to H_1$ – отображение ортогонального проектирования. Пусть далее $M \subset H_1$ – открытое относительно $H_1$ множество и $g\colon M \to H$ – K-отображение. Тогда композиция $f = g \circ p\colon p^{-1}(M) \to H$ является K-отображением, причем $\lambda_f(x) = \lambda_g(p(x))$.

*Доказательство.* Положим $G = p^{-1}(M)$ и докажем принадлежность $f$ к классу K в произвольной точке $x_0 \in G$. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число и $y_0 = p(x_0)$. Так как $g \in K$, то существуют конечномерное подпространство $L_1 \subset H$, окрестность $V \subset M$ точки $y_0$ в M такие, что если $y_1, y_2 \in V$ и $(y_1, y_2) \perp L_1$, то

$$\|g(y_1)-g(y_2)-\lambda_g(y_0)(y_1-y_2)\| \leqslant \varepsilon \|y_1-y_2\|.$$

Пусть $L_2$ – ортогональное дополнение в H подпространства $H_1$, а L линейная оболочка подпространства $L_1$ и $L_2$.

Рассмотрим такую окрестность $U \subset G$ точки $x_0$, что $p(U) \subset V$. Если теперь точки $x, y \in U$ и вектор $(x-y) \perp L$, то, так как $(x-y) \perp L_2$, вектор $(x-y) \in H_1$. Отсюда следует, что $p(x)-p(y) = x-y$. Далее, из $(x-y) \perp L_1$ и $(p(x), p(y)) \in V$ имеем

$$\|f(x)-f(y)-\lambda_g(y_0)(x-y)\| = \|g(p(x))-g(p(y))-\lambda_g(y_0)(p(x)-p(y))\| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon \|p(x)-p(y)\| = \varepsilon \|x-y\|.$$

Итак, в точке $x_0$ $f \in K$, причем $\lambda_f(x_0) = \lambda_g(p(x_0))$.

В [2], следуя идеям Лере и Шаудера, для отображений некоторого подкласса $K_0^c$ класса $K_0$ определено понятие топологической степени. Оказалось, что все эти построения полностью проходят для отображений, принадлежащих некоторому подклассу $K^c$ класса K. Мы сформулируем главный результат этих построений.

*Теорема 6.* Пусть G – открытое подмножество пространства H и $f\colon G \to H$ – K-отображение. Пусть, далее, точка $b \in f(G)$ – такая, что прообраз $X=f^{-1}(b)$ компактен и терминальная производная $\lambda_f(x)$ отображения $f$ на всем $X$ отлична от нуля. Тогда определено некоторое целое число, которое называется топологической степенью отображения $f$ в точке $b$ и обозначается через $\deg(f,G,b)$, причем степени K-гомотопных отображений совпадают между собой.

В работе [3] приведен бесконечномерный аналог классической теоремы Борсука о нечетности топологической степени нечетного отображения, относящийся к $K_0$-отображениям. Результаты, полученные в данной статье, позволяют доказательство этого аналога в точности перенести на случай K-отображения. Сформулируем эту теорему.

*Теорема 7.* Пусть $G$ – открытое подмножество $H$, симметричное относительно нулевой точки $0\in H$, причем $0\in G$. Пусть, далее, $f: G \to H$ – нечетное ($f(-x)=-f(x)$ для $x\in G$) K-отображение, обладающее тем свойством, что прообраз $X=f^{-1}(0)$ компактен и терминальная производная $\lambda_f(x)$ отображения $f$ отлична от нуля на всем $X$. Тогда топологическая степень $\deg(f,G,0)$ нечетна.

В работе [4] посредством класса $K_0$ построены бесконечномерные гомотопические группы компактного и некомпактного типов подмножеств пространства $H$. Назовем теперь эти группы $K_0$-бесконечномерными гомотопическими группами. В основе построения этих групп лежит понятие подпространства конечной коразмерности. В случае сепарабельного пространства $H$ в [4] описан еще один подход к определению $K_0$-бесконечномерных гомотопических групп, который эквивалентен упомянутому первому подходу и опирается на понятие ортонормированного базиса $\sigma=\{e_n\}$ пространства $H$. В работе [5] вычислены $K_0$-бесконечномерные гомотопические группы компактного типа единичной сферы $S$ пространства $H$.

Положив в основу всех построений класс K, мы точно так же строим новые бесконечномерные гомотопические группы, которые будем называть K-бесконечномерными гомотопическими группами.

Приведенная в работе [5] $K_0$–теорема о сферах конечной коразмерности пространства $H$ остается справедливой и в классе K. Мы сформулируем эту K-теорему.

*Теорема 8.* При любом целом $q$ K-бесконечномерная гомотопическая группа индекса $q$ компактного типа $K\Pi_q^c(S^{(r)},x_0)$ единичной сферы $S^{(r)}$ конечной коразмерности $r\geqslant 1$ пространства $H$ изоморфна стабильной гомотопической группе индекса $r-q$ конечномерных сфер $S^n$, т.е. группе $\pi_{n+r-q}(S^n)$, где $n$ – достаточно большое натуральное число.

Замечание 3. Существует естественный гомоморфизм $\theta$: $K\Pi_q^c(S^{(r)},x_0) \to K\Pi_q(S^{(r)},x_0)$ группы компактного типа в группу некомпактного типа. Как и в $K_0$ случае [6], можно доказать, что $\theta$ есть мономорфизм. Отсюда согласно теореме 8 следует, что не все группы $K\Pi_q(S^{(r)},x_0)$ тривиальны.

*Кафедра высшей алгебры
и геометрии*

*Поступила 8.01.1990*

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Мирзаханян** Э.А. О некоторых классах непрерывных отображений подмножеств гильбертова пространства.I. - Уч.зап.ЕГУ,1990,№3.
2. **Болтянский** В.Г., **Мирзаханян** Э.А. Построение степени отображения в гильбертовом пространстве. - Изв.АН Арм.ССР (сер. Матем.), 1974, т.IX, №5.
3. **Мирзаханян** Э.А. О бесконечномерных аналогах теорем Борсука о нечетности топологической степени нечетного отображения и о неподвижной точке. - ДАН Арм.ССР (сер.Матем.), 1989,т.89,№4.
4. **Мирзаханян** Э.А. Построение бесконечномерных гомотопических групп. - Изв.АН Арм.ССР (сер.Матем.), 1973, т.VIII, №3.
5. **Мирзаханян** Э.А. Вычисление бесконечномерных групп компактного типа единичной сферы гильбертова пространства. - Изв.АН Арм. ССР (сер.Матем.), 1975, т.X, №2.
6. **Мирзаханян** Э.А. О некоторых свойствах бесконечномерных гомотопических групп подмножеств гильбертова пространства. - ДАН Арм.ССР, 1984, т.79, №1.
7 **Мирзаханян** Э.А. Об одном бесконечномерном обобщении теоремы Брауэра об инвариантности области. - Международная топологическая конференция. Баку, 1987



Է.Ա.ՄԻՐԶԱԽԱՆՅԱՆ


## ՀԻԼԲԵՐՏՅԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ԵՆԹԱԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱՆԸՆԴՀԱՏ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ԴԱՍԵՐԻ ՄԱՍԻՆ: II

### Ամփոփում


Հոդվածում բերվում են H իրական հիլբերտյան տարածության անվերջ չափանի հանրահաշվական տոպոլոգիայի կառուցման նպատակների համար [1]-ում նկարագրված H տարածության ենթաբազմությունների անընդհատ արտապատկերումների $K_0, K_1$ և K թույլատրելի դասերի հետագա հետազոտման որոշ արդյունքներ: Տրված են K դասի $K^c$ ենթադասին պատկանող արտապատկերումների տոպոլոգիական աստիճանի, ինչպես նաև H տարածության ենթաբազմությունների K անվերջ չափանի հոմոտոպիական խմբի սահմանումները:



E.A.MIRZAKHANIAN


## ON SOME CLASSES OF CONTINIOUS MAPPINGS OF SUBSETS OF HILBERT SPACE. II

### SUMMARY


The paper contains some important properties of classes of continuous mappings of subsets of real Hilbert space H, introduced in [1] for construction of an infinite-dimensional algebraic topology in H.

The concept of topological degree for mappings from the class K and the concept of K-infinite-dimensional homotopic groups for subsets of Hilbert space H are defined.