Известия НАН Армении. Математика, том 50, н. 4, 2015, стр. 3-22.

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ С ГРАНИЧНОЙ ФУНКЦИЕЙ ИЗ L_2 ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. Ж. ДУМАНЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mail: *duman@ysu.am*

Аннотация. Рассматриваются задачи Дирихле в ограниченной области $Q \subset R_n$ для общего эллиптического уравнения второго порядка с граничной функцией из L_2. В предыдущих работах автора при естественных ограничениях на коэффициенты уравнения получены необходимые и достаточные условия существования $(n-1)$-мерно непрерывного решения исследуемой задачи. Эти условия сформулированы в терминах вспомогательного операторного уравнения в специальном гильбертовом пространстве и трудно проверяемые. В настоящей работе для несколько более узкого класса правых частей получены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи в терминах исходной задачи. При этом установлено, что если дополнительно потребовать принадлежность граничной функции пространству $W_2^{1/2}(\partial Q)$, то полученные условия переходят в условия разрешимости в $W_2^1(Q)$.

MSC2010 numbers: 35J25.

Ключевые слова: задача Дирихле; эллиптическое уравнение.

1. Введение

В работе исследуется разрешимость задачи Дирихле в ограниченной области $Q \subset R_n$, $n \geq 2$, с гладкой границей $\partial Q \in C^1$ для эллиптического уравнения второго порядка

(1.1)
$$\mathcal{L}u \equiv -div\,(A(x)\nabla u) + (\bar{b}(x), \nabla u) - div(\bar{c}(x)u) + d(x)u = f(x) - divF(x), \quad x \in Q,$$

$$u|_{\partial Q} = u_0, \tag{1.2}$$

с граничной функцией u_0 из $L_2(\partial Q)$.

Предполагается, что функции f и $F = (f_1, \ldots, f_n)$ принадлежат $L_{2,\,loc}(Q)$, симметрическая матрица $A(x) = (a_{i\,j}(x))$, элементы которой являются вещественнозначными измеримыми функциями, удовлетворяет условию

$$\gamma|\xi|^2 \leq \sum_{i,\,j=1}^{n} a_{i\,j}(x)\xi_i\xi_j = (\xi,\ A(x)\xi) \leq \gamma^{-1}|\xi|^2 \tag{1.3}$$

для всех $\xi = (\xi_1,\ \ldots, \xi_n) \in R_n$ и почти всех $x \in Q$ с положительной постоянной γ, а коэффициенты $\bar{b}(x) = (b_1(x),\ \ldots,\ b_n(x))$, $\bar{c}(x) = (c_1(x),\ \ldots,\ c_n(x))$ и $d(x)$ являются измеримыми и ограниченными функциями в каждой строго внутренней подобласти области Q.

В предыдущих работах автора получены условия разрешимости задачи (1.1), (1.2), которые сформулированы в терминах вспомогательного операторного уравнения в специальном гильбертовом пространстве и трудно проверяемые. В настоящей работе для несколько более узкого класса правых частей получены условия разрешимости исследуемой задачи в терминах исходной задачи. Результаты настоящей работы анонсированы в [1].

Под решением задачи (1.1), (1.2) будем понимать функцию u из $W^1_{2,\ loc}(Q)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) в смысле обобщенных функций, т.е. для всех финитных и бесконечно дифференцируемых функций $\eta \in C_0^\infty(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\int\limits_Q (A(x)\nabla u + \bar{c}(x)u,\ \nabla\eta)\ dx + \int\limits_Q \left(\left(\bar{b}(x),\ \nabla u\right) + d(x)u\right)\eta\, dx = \int\limits_Q (f\eta + (F,\ \nabla\eta))\ dx,$$

и удовлетворяющую условию (1.2) в следующем смысле:
для каждой точки $x^0 \in \partial Q$ найдется такая ее окрестность $V_{x^0} \subset \partial Q$, что

$$\int\limits_{V_{x^0}} \left(u(x + \delta\, \bar{\nu}\,(x^0)) - u_0(x)\right)^2\ ds \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0, \tag{1.4}$$

где $\bar{\nu}\,(x^0)$ - единичный вектор внутренней нормали к ∂Q в точке x^0.
Понятие решения из $W^1_{2,\ loc}(Q)$ было введено в случае области с дважды гладкой границей В. П. Михайловым в работах [2], [3] (см. также [4] – [6]), где принятие решением своего граничного значения понималось в следующем смысле

$$\int\limits_{\partial Q} \left(u(x + \delta\, \bar{\nu}\,(x)) - u_0(x)\right)^2\ ds \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0.$$

Случай области с Ляпуновской границей был изучен в работах [7] и [8].
Свойство $(n-1)$-мерной непрерывности решения и однозначная разрешимость задачи Дирихле с граничной функцией u_0 из $L_2(\partial Q)$ для уравнения без младших членов ($b_i = 0, c_i = 0, d = 0$) с $f \in W_2^{-1}$ ($F = 0$) были установлены в работе [9]. При этом предполагалось, что единичный вектор внутренней нормали $\bar{\nu}$ к ∂Q удовлетворяет условию Дини:

$$\left|\bar{\nu}\,(x) - \bar{\nu}\,(y)\right| \le \omega(|x-y|) \tag{1.5}$$

для всех $x, y \in \partial Q$, где ω – такая монотонная функция, что $\int\limits_0 \frac{\omega(t)}{t}\, dt < \infty$, а коэффициенты $a_{i\,j}$ непрерывны по Дини на границе:

$$|a_{i\,j}(x) - a_{i\,j}(y)| \le \omega(|x - y|) \tag{1.6}$$

для всех $x \in \partial Q$, $y \in Q$ и $i,\ j = 1,\ \dots,\ n$. Не ограничивая общности можно считать, что функция ω в условиях (1.5) и (1.6) одна и та же.
В работе [10] было показано, что приведенный выше результат остается справедливым для правых частей из более широкого класса, а именно, если

$$r^{\frac{3}{2}}(x)\,(1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{4}}\, f(x) \in L_2(Q)\,, \tag{1.7}$$

$$r^{\frac{1}{2}}(x)\,(1 + |\ln r(x)|)^{\frac{3}{4}}\, F(x) \in (L_2(Q))^n. \tag{1.8}$$

Далее мы также будем предполагать условия (1.5) - (1.8) выполненными.

Случай задачи Дирихле с граничной функцией из $L_p(\partial Q)$ для уравнения без младших членов исследован в работах [11] – [13]. Понятие $(n-1)$-мерной непрерывности было предложено А. К. Гущиным в работе [9] и заключается в следующем.
Пусть μ – неотрицательная, борелевская мера в R_n с носителем в $\bar{Q}$, удовлетворяющая следующему условию. Существует такая постоянная $C = C(\mu)$, что для всех $r > 0$ и $x^0 \in \bar{Q}$ мера шара $B_r(x^0)$ радиуса r с центром в точке x^0 не превосходит числа Cr^{n-1}:

$$\mu(B_r(x^0)) \le Cr^{n-1} \quad \text{для всех} \quad r > 0 \quad \text{и} \quad x^0 \in \bar{Q}\,. \tag{1.9}$$

Наименьшую из таких постоянных C будем называть нормой μ и обозначать через $\|\mu\|$. Пространство Гущина $(n-1)$-мерно непрерывных функций $C_{n-1}(\bar{Q})$ является пополнением пространства непрерывных в $\bar{Q}$ функций по норме

$$\|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})} = \sup \left(\frac{1}{\|\mu\|} \int\limits_{\bar{Q}} u^2(x)\, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}},$$

где точная верхняя грань берется по всем удовлетворяющим условию (1.9) мерам μ. Очевидно, что $C_{n-1}(\bar{Q}) \subset L_2(Q)$. Функции из $C_{n-1}(\bar{Q})$ имеют следы на множествах положительной $(n-1)$-мерной меры Хаусдорфа, а множество следов на гладкой $(n-1)$-мерной поверхности $\Gamma \subset \bar{Q}$ всех функций из $C_{n-1}(\bar{Q})$ совпадает с $L_2(\Gamma)$.

Определение $(n-1)$-мерной непрерывности можно дать и в терминах близости значений функции на близких мерах (подробнее см. [9]).

В работе [14] (см. также [15], [16]) было установлено, что решение задачи (1.1), (1.2) (если оно существует) обладает свойством $(n-1)$-мерной непрерывности, т.е. принадлежит пространству Гущина $C_{n-1}(\bar{Q})$. При этом предполагалось, что коэффициенты $\bar{b}(x)$, $\bar{c}(x)$ и $d(x)$ локально ограничены и для них справедливы следующие оценки: существует постоянная $K > 0$, такая что

$$|\bar{b}(x)| \leq \frac{K}{r(x)(1+|\ln r(x)|)^{\frac{3}{4}}}, \quad x \in Q, \tag{1.10}$$

$$\int\limits_0 t(1+|\ln t|)^{\frac{3}{2}} C^2(t)\, dt < \infty, \quad \text{где } C(t) \equiv \sup_{r(x)\geq t} |\bar{c}(x)|, \tag{1.11}$$

$$\int\limits_0 t^3(1+|\ln t|)^{\frac{3}{2}} D^2(t)\, dt < \infty, \quad \text{где } D(t) \equiv \sup_{r(x)\geq t} |d(x)|. \tag{1.12}$$

Однако разрешимость изучаемой задачи с граничной функцией из $L_2(\partial Q)$ была известна только при жестких условиях на гладкость коэффициентов.

Далее, при тех же условиях (1.10) - (1.12), в терминах скалярного произведения в специальном гильбертовом пространстве в работе [17] (см. также [18]) получены необходимые и достаточные условия существования $(n-1)$-мерно непрерывного решения задачи (1.1), (1.2) и установлено, что условия разрешимости исследуемой задачи имеют вид, аналогичный условиям разрешимости в обычной обобщенной постановке (в $W_2^1(Q)$).

2. Схема исследования и известные результаты

Для формулировки и доказательства основного результата настоящей работы нам потребуется описать схему исследования и привести некоторые результаты работы [17].

Наряду с задачей (1.1), (1.2) рассмотрим задачи Дирихле:

$$l\mathcal{L}_0 v \equiv -div\,(A\nabla v) = 0 \tag{2.1}$$

$$v|_{\partial Q} = u_0 \tag{2.2}$$

$$\mathcal{L}_0 w = -(\bar{b}, \nabla w) + div(\bar{c}w) - dw - (\bar{b}, \nabla v) + div(\bar{c}v) - dv + f - divF \tag{2.3}$$

$$w|_{\partial Q} = 0, \tag{2.4}$$

где функция v в правой части уравнения (2.3) есть решение задачи (2.1), (2.2).

Очевидна справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2.1. *Пусть функция v является решением задачи (2.1), (2.2). Тогда для того чтобы функция u являлась решением задачи (1.1), (1.2) необходимо и достаточно, чтобы функция $w = u - v$ являлась бы решением задачи (2.3), (2.4).*

Задача (2.1), (2.2) однозначно разрешима при всех $u_0 \in L_2(\partial Q)$ (см. [9]), решение принадлежит пространству $C_{n-1}(\bar{Q})$ и для нее справедлива следующая оценка

$$\|v\|^2_{C_{n-1}(\bar{Q})} + \int\limits_Q r(x)\,|\nabla v|^2 dx \le const\ \|u_0\|^2_{L_2(\partial Q)}$$

с независящей от u_0 постоянной. Следовательно, в силу утверждения 2.1, задача (1.1), (1.2) разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача (2.3), (2.4) с v, являющейся решением задачи (2.1), (2.2). Введем следующие пространства:

$$\mathfrak{U}(Q) \equiv \left\{ u \in W^1_{2,loc}(Q) \cap C_{n-1}(\bar{Q}) : \quad \int\limits_Q r(x)\,|\nabla u(x)|^2 dx < \infty \right\},$$

$$\|u\|^2_{\mathfrak{U}(Q)} = \|u\|^2_{C_{n-1}(\bar{Q})} + \int\limits_Q r(x)\,|\nabla u(x)|^2 dx, \quad \overset{\circ}{\mathfrak{U}}(Q) \equiv \left\{ u \in \mathfrak{U}(Q),\ u|_{\partial Q} = 0 \right\}.$$

Следуя [10], обозначим через $\overset{\circ}{H}_1(Q)$ пополнение $C_0^\infty(Q)$ по норме, порожденной скалярным произведением

$$(u, v)_{\overset{\circ}{H}_1(Q)} = \int\limits_Q \frac{(\nabla u, \nabla v)}{r\ (1 + |\ln r|)^{3/2}}\,dx\,,$$

а через $\overset{\circ}{H}(Q)$ – пополнение $C_0^\infty(Q)$ по норме, порожденной скалярным произведением $(u, v)_{\overset{\circ}{H}(Q)} = \int\limits_Q \left(r\,(1 + |\ln r|)^{1/2}\,(\nabla u, \nabla v) + \frac{u \cdot v}{r\ (1 + |\ln r|)^{1/2}} \right) dx\,.$

Напомним, что $r = r\,(x)$ – расстояние точки $x \in Q$ до границы ∂Q. Имеют место следующие вложения $\overset{\circ}{H}_1(Q) \subset \overset{\circ}{W}{}^1_2(Q) \subset \overset{\circ}{H}(Q) \subset \overset{\circ}{\mathfrak{U}}(Q)$, см.[17].

Так как решение задачи (1.1), (1.2) и решение задачи (2.1), (2.2) принадлежат пространству $\mathfrak{U}(Q)$, см. [9], [14], то из утверждения 2.1 вытекает, что решение w задачи (2.3), (2.4) принадлежит пространству $\overset{\circ}{\mathfrak{U}}(Q)$.

Рассмотрим оператор $Tu = -(\bar{b}, \nabla u) + div(\bar{c}u) - du$ из правой части уравнения (2.3). Имеет место следующее утверждение, см. [17].

Лемма 2.1. *Пусть $\partial Q \in C^1$ и пусть выполнены условия (1.10) - (1.12). Тогда оператор T является линейным и ограниченным оператором из $\mathfrak{U}(Q)$ в $\left[\overset{\circ}{H}_1(Q)\right]^*$ и из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}(Q)$.*

В [10] установлено, что для любой правой части $g' \in \left[\overset{\circ}{H}_1(Q)\right]^*$ существует и единственно решение из $W^1_{2,\,loc}(Q)$ задачи

$$-div(A\nabla u) = g',\ u|_{\partial Q} = 0; \tag{2.5}$$

это решение принадлежит пространству $\overset{\circ}{H}(Q)$ и имеет место оценка $\|u\|_{\overset{\circ}{H}(Q)} \leq C\|g'\|_{\left[\overset{\circ}{H}_1(Q)\right]^*}$ с независящей от g' постоянной. Следовательно, если через $\mathcal{L}_0^{-1}$ обозначить оператор, ставящий в соответствие правой части g' решение u задачи (2.5), то $\mathcal{L}_0^{-1}$ является линейным и ограниченным оператором, действующим из $\left[\overset{\circ}{H}_1(Q)\right]^*$ в $\overset{\circ}{H}(Q)$. Кроме того, как хорошо известно (см. например [19]), оператор $\mathcal{L}_0^{-1}$ является линейным и ограниченным оператором, действующим из $\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}(Q)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$. Таким образом, из леммы 1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 2.2. *$\mathcal{L}_0^{-1}T$ является линейным и ограниченным оператором из $\mathfrak{U}(Q)$ в $\overset{\circ}{H}(Q)$ и из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$.*

Пусть w является решением задачи (2.3), (2.4). Так как $f, divF \in \left[\overset{\circ}{H}_1(Q)\right]^*$, см. [9], то нетрудно видеть, что w является также решением операторного уравнения $w = \mathcal{L}_0^{-1}Tw + \mathcal{L}_0^{-1}Tv + \mathcal{L}_0^{-1}(f - divF)$ в пространстве $\overset{\circ}{\mathfrak{U}}(Q)$, где $v \in \mathfrak{U}(Q)$ – решение задачи (2.1), (2.2). С другой стороны, если функция w из пространства $\overset{\circ}{\mathfrak{U}}(Q)$ является решением операторного уравнения $w = \mathcal{L}_0^{-1}(Tw + Tv + f - divF)$, то w является также решением задачи (2.3), (2.4). Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 2.2. *w является решением задачи (2.3), (2.4) тогда и только тогда, когда w является решением операторного уравнения:*

$$w - \mathcal{L}_0^{-1}Tw = \mathcal{L}_0^{-1}g, \qquad w \in \overset{\circ}{\mathfrak{U}}(Q), \tag{2.6}$$

с $g = Tv + f - divF$, где $v \in \mathfrak{U}(Q)$ – решение задачи (2.1), (2.2).

Далее, наряду с уравнением (2.6) рассмотрим соответствующее операторное уравнение в пространстве $\overset{\circ}{H}(Q)$:

$$w - \mathcal{L}_0^{-1}Tw = h, \qquad w \in \overset{\circ}{H}(Q) \tag{2.7}$$

с $h \in \overset{\circ}{H}(Q)$. Из леммы 2.2 следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2.3. *Пусть w является решением операторного уравнения (2.6) в $\overset{\circ}{\mathfrak{U}}(Q)$ с $g \in \left[\overset{\circ}{H}_1(Q)\right]^*$. Тогда w является решением операторного уравнения (2.7) в $\overset{\circ}{H}(Q)$ с $h = \mathcal{L}_0^{-1}g$.*

Объединяя утверждения 2.2 и 2.3, получаем нижеследующий результат.

Утверждение 2.4. *Для того чтобы функция w являлась решением задачи (2.3), (2.4), необходимо и достаточно, чтобы функция w являлась решением операторного уравнения (2.7) в пространстве $\overset{\circ}{H}(Q)$ с правой частью $h = \mathcal{L}_0^{-1}(Tv + f - divF)$, где v – решение задачи (2.1), (2.2).*

Рассмотрим оператор $\mathcal{L}_0^{-1}T$ в гильбертовых пространствах $\overset{\circ}{H}(Q)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$. Нижеследующий результат был доказан в [17].

Теорема 2.1. *$\mathcal{L}_0^{-1}T$ является вполне непрерывным оператором, действующим из $\overset{\circ}{H}(Q)$ в $\overset{\circ}{H}(Q)$ и из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$. При этом, отвечающие характеристическому числу 1 собственные подпространства оператора $\mathcal{L}_0^{-1}T$ в пространствах $\overset{\circ}{H}(Q)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ совпадают: $Ker_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)}(I - \mathcal{L}_0^{-1}T) = Ker_{\overset{\circ}{H}(Q)}(I - \mathcal{L}_0^{-1}T)$, здесь I – тождественный оператор.*

Из теоремы 2.1 следует, что спектры оператора $\mathcal{L}_0^{-1}T$ в пространствах $\overset{\circ}{H}(Q)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ совпадают и что его собственные функции из $\overset{\circ}{H}(Q)$ принадлежат пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$. Таким образом, изучение разрешимости задачи (1.1), (1.2) сведено к изучению разрешимости операторного уравнения (2.7) в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{H}(Q)$ с вполне непрерывным оператором $\mathcal{L}_0^{-1}T$. В силу теоремы Фредгольма, пространство решений однородной задачи

$$w - \mathcal{L}_0^{-1}Tw = 0, \qquad w \in \overset{\circ}{H}(Q) \tag{2.8}$$

конечномерно, его размерность совпадает с размерностью пространства решений однородной сопряженной задачи

$$w^* - (\mathcal{L}_0^{-1}T)^*w^* = 0, \qquad w^* \in \overset{\circ}{H}(Q) \tag{2.9}$$

и для разрешимости операторного уравнения (2.7) в пространстве $\overset{\circ}{H}(Q)$ необходимо и достаточно условие ортогональности правой части h подпространству решений сопряженной однородной задачи (2.9). В частности, операторное уравнение (2.7) в пространстве $\overset{\circ}{H}(Q)$ имеет решение при любой h из $\overset{\circ}{H}(Q)$, если однородная задача (2.8) имеет только тривиальное решение $w \equiv 0$. Таким образом, из леммы 2.1 и утверждения 2.3 вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 2.5. *Пространство решений однородной задачи (2.8) конечномерно, его размерность совпадает с размерностью пространства решений однородной сопряженной задачи (2.9). Любое решение однородной задачи (2.8) принадлежит* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$. *Для того чтобы задача (2.3), (2.4) имела бы решение, необходимо и достаточно, чтобы для всех решений* w^* *однородной задачи (2.9) выполнялось условие*

$$(\mathcal{L}_0^{-1}(Tv + f - divF), w^*)_{\overset{\circ}{H}(Q)} = 0 \tag{2.10}$$

где v *– решение задачи (2.1), (2.2).*
При этом существует единственное решение $w(x)$ *задачи (2.3), (2.4), ортогональное (в* $\overset{\circ}{H}(Q)$*) всем решениям однородной задачи (2.8) и для него справедлива оценка*

$$\|w\|_{\overset{\circ}{H}(Q)} \leq C\left(\|v\|_{\mathfrak{U}(Q)} + \|f\|_{[\overset{\circ}{H}_1(Q)]^*} + \|divF\|_{[\overset{\circ}{H}_1(Q)]^*}\right)$$

с независящей от v, f *и* F *постоянной.*

И наконец, исходя из вышеизложенного, сформулируем основной результат работы [17].

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия (1.3), (1.5) - (1.8), (1.10) - (1.12) и* $u_0 \in L_2(\partial Q)$. *Тогда для того чтобы задача (1.1), (1.2) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы для всех решений* w^* *однородной задачи (2.9) выполнялось условие (2.10), где* v *– решение задачи (2.1), (2.2) с той же функцией* u_0.
Решение задачи (1.1), (1.2) принадлежит пространству $C_{n-1}(\bar{Q})$. *При этом существует единственное решение задачи (1.1), (1.2) вида* $u = v + w$, *где* w *– решение задачи (2.3), (2.4) ортогональное в* $\overset{\circ}{H}(Q)$ *всем решениям однородной задачи (2.8). Для этого решения справедлива оценка*

$$\|u\|^2_{C_{n-1}(\bar{Q})} + \int\limits_Q r(x)\,|\nabla u(x)|^2 dx \leq const\,\Big(\,\|u_0\|^2_{L_2(\partial Q)} +$$

$$+\int\limits_Q r^3(x)\,(1 + |\ln r(x)|)^{3/2}\, f^2(x) dx + \int\limits_Q r(x)\,(1 + |\ln r(x)|)^{3/2}\, |F(x)|^2 dx\Big), \tag{2.11}$$

с независящей от u_0, f *и* F *постоянной.*

Если однородная задача $\mathcal{L}u = 0$, $u|_{\partial Q} = 0$, в $W_2^1(Q)$-постановке имеет только тривиальное решение, то решение неоднородной задачи (1.1), (1.2) в $W_{2,\,loc}^1(Q)$-постановке существует при всех u_0, f, F. Решение единственно и удовлетворяет неравенству (2.11).

3. Формулировки и доказательства основных утверждений

Покажем далее, что при естественных дополнительных ограничениях на коэффициенты при младших членах уравнения, для правых частей из $W_2^{-1}(Q)$ условие (2.10) можно записать в более простом виде – в терминах исходной задачи и, при этом, если граничная функция допускает принадлежащее $W_2^1(Q)$ продолжение в область Q, то решение из $C_{n-1}(\bar{Q})$ является решением из $W_2^1(Q)$. Итак, пусть коэффициенты $\bar{b}(x)$, $\bar{c}(x)$, $d(x)$ локально ограничены и удовлетворяют условиям:

$$\int\limits_0 B^2\,(t)\;dt < \infty, \quad \text{где } \; B\,(t) \equiv \sup_{r(x)\geq t} |\bar{b}\,(x)\,|, \tag{3.1}$$

$$\int\limits_0 C^2\,(t)\;dt < \infty, \quad \text{где } \; C\,(t) \equiv \sup_{r(x)\geq t} |\bar{c}\,(x)\,|, \tag{3.2}$$

$$\int\limits_0 t^2 D^2\,(t)\;dt < \infty, \quad \text{где } \; D\,(t) \equiv \sup_{r(x)\geq t} |d\,(x)\,|, \tag{3.3}$$

а функции f и F в правой части уравнения (1.1) удовлетворяют условию

$$f \in L_2(Q),\; F \in (L_2(Q))^n\,, \tag{3.4}$$

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть $\partial Q \in C^1$ и пусть выполнены условия (3.1) – (3.4). Тогда оператор T является линейным и ограниченным оператором из $\mathcal{U}(Q)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}(Q)$.*

Доказательство. Пусть $x^0 \in \partial Q$ произвольная точка границы ∂Q области Q. Фиксируем локальную систему координат (x', x_n) с началом в точке x^0, а ось x_n направим по внутренней нормали $\nu(x^0)$ к ∂Q в точке x^0. Поскольку граница области гладкая ($\partial Q \in C^1$), то существует $r_{x^0} > 0$ и функция $\varphi_{x^0} \in C^1(R_{n-1})$, удовлетворяющая условиям:

$$\varphi_{x^0}(0) = 0, \nabla\varphi_{x^0}(0) = 0 \text{ и } |\nabla\varphi_{x^0}(x')| \leq \frac{1}{2} \text{ для всех } \; x' \in R_{n-1},$$

такие, что пересечение области Q с шаром $U_{x^0}^{(r_{x^0})} = \Big\{x : |x - x^0| < r_{x^0}\Big\}$ радиуса r_{x^0} с центром в точке x^0 имеет вид

$$Q \cap U_{x^0}^{(r_{x^0})} = U_{x^0}^{(r_{x^0})} \cap \Big\{(x', x_n) : x_n > \varphi_{x^0}(x')\Big\}.$$

Тогда получаем

$$\partial Q \cap U_{x^0}^{(r_{x^0})} = U_{x^0}^{(r_{x^0})} \cap \Big\{(x', x_n) : x_n = \varphi_{x^0}(x')\Big\}.$$

Положим $\ell_{x^0} = \dfrac{r_{x^0}}{\sqrt{2}}$ и из покрытия $\Big\{U_{x^0}^{(\ell_{x^0})}, x^0 \in \partial Q\Big\}$ границы ∂Q выберем конечное подпокрытие $U_{x^m}^{(\ell_{x^m})}, m = 1, \ldots, p$. Обозначим $U_m = U_{x^m}^{(r_{x^m})},\ r_m = r_{x^m},\ \ell_m = \ell_{x^m},\ \varphi_m = \varphi_{x^m},$ где $m = 1, \ldots, p$. Пусть $h = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\min(r_1, \ldots, r_p)$. Тогда каждый из криволинейных "цилиндров"

$$\Pi_m^{\ell_m, h} = \Big\{(x', x_n) : |x'| < \ell_m, \varphi_m(x') < x_n < \varphi_m(x') + h\Big\}, \ m = 1, \ldots, p,$$

лежит в соответствующем шаре U_m, также как и в $U_m \cap Q$.

Пусть $\ell_0 < h$ такое положительное число, что дополнение в Q области

$$Q_{\ell_0} = \Big\{x \in Q : r(x) = \text{ dist } (x, \partial Q) > \ell_0\Big\}$$

содержится в объединении "цилиндров" $\Pi_m^{\ell_m, h}$, $m = 1, \ldots, p$:

$$Q^{\ell_0} = \Big\{x \in Q : r(x) = \text{ dist } (x, \partial Q) \le \ell_0\Big\} \subset \bigcup_{m=1}^{p} \Pi^{\ell_m, h}.$$

Легко видеть, что для всех $x = (x', x_n) \in \Pi_m^{\ell_m, h}, m = 1, \ldots, p$, имеем

$$r(x) \le x_n - \varphi_m(x') \le \frac{\sqrt{5}}{2} r(x).$$

Зафиксируем некоторый номер m, $1 \le m \le p$, и возьмем локальную систему координат с началом в точке x^m. В дальнейшем зависимость функции φ_m от номера m отмечать не будем: $\varphi = \varphi_m$.

Определим отображение $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}_{-1}$ пространства R_n на себя соотношениями

$$\mathcal{L}(x) = (x', x_n - \varphi(x')),\ x = (x', x_n) \text{ и } \mathcal{L}_{-1}(y) = (y', y_n + \varphi(y')),\ y = (y', y_n).$$

Обозначим

$$\mathcal{L}(\Pi_m^{\ell_m, h}) = \tilde{\Pi}_m^{\ell_m, h},\ w(y', y_n + \varphi(y')) = \tilde{w}(y),\ \eta(y', y_n + \varphi(y')) = \tilde{\eta}(y).$$

Возьмем произвольные $u \in \mathcal{U}(Q)$ и $\eta \in C_0^\infty(Q)$. Рассмотрим

$$\langle Tu, \eta\rangle \equiv -\int\limits_Q (\bar{b}(x), \nabla u(x))\eta(x)dx - \int\limits_Q (\bar{c}(x)u(x), \nabla\eta(x))dx - \int\limits_Q d(x)u(x)\eta(x)dx.$$

Из (3.1) имеем $B(t) \leq \dfrac{const}{t^{1/2}}$ и

$$\left|\int\limits_Q (\bar{b}(x), \nabla u(x))\eta(x)\,dx\right| \leq \int\limits_Q |\bar{b}(x)||\nabla u(x)||\eta(x)|\,dx \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_Q r(x)\,|\nabla u(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_Q \frac{B^2(r(x))}{r(x)}\,\eta^2(x)\,dx\right)^{1/2} \leq const\,\|u\|_{\mathfrak{U}(Q)} \left(\int\limits_Q \frac{\eta^2(x)}{r^2(x)}\,dx\right)^{1/2}$$

Далее, применяя неравенство Харди, получаем

$$\int\limits_Q \frac{\eta^2(x)}{r^2(x)}\,dx \leq \int\limits_{Q_{l_0}} \frac{\eta^2(x)}{r^2(x)}\,dx + \sum_{m=1}^{p} \int\limits_{\Pi_m^{\ell_m,h}} \frac{\eta^2(x)}{r^2(x)}\,dx \leq \frac{1}{\ell_0^3}\int\limits_Q \eta^2(x)\,dx + \sum_{m=1}^{p}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \int\limits_{\tilde{\Pi}_m^{\ell_m,h}} \frac{\tilde{\eta}^2(y)}{y_n^2}\,dy =$$

$$= \frac{1}{\ell_0^3}\int\limits_Q \eta^2(x)\,dx + \sum_{m=1}^{p}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \int\limits_0^h dy_n \int\limits_{|y'|<\ell_m} \frac{\left(\int\limits_o^{y_n} \tilde{\eta}_\tau(y^{'},\tau)d\tau\right)^2}{y_n^2}\,dy^{'} \leq const \int\limits_Q |\nabla\eta(x)|^2\,dx +$$

$$+ \sum_{m=1}^{p}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 \int\limits_{|y'|<\ell_m} dy^{'} \int\limits_0^h \left(\frac{\int\limits_o^{y_n} \tilde{\eta}_\tau(y^{'},\tau)d\tau}{y_n}\right)^2 dy_n \leq$$

$$\leq const\left(\int\limits_Q |\nabla\eta(x)|^2\,dx + \sum_{m=1}^{p}\int\limits_{|y'|<\ell_m} dy^{'} \int\limits_0^h \tilde{\eta}_{y_n}^2(y^{'},y_n)dy_n\right) \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_Q |\nabla\eta|^2\,dx + \sum_{m=1}^{p}\int\limits_{\tilde{\Pi}_m^{\ell_m,h}} |\nabla\tilde{\eta}(y)|^2 dy\right) \leq const \int\limits_Q |\nabla\eta(x)|^2 dx. \tag{3.5}$$

Следовательно,

(3.6)

$$\left|\int\limits_Q (\bar{b}(x), \nabla u(x))\eta(x)\,dx\right| \leq const\,\|u\|_{\mathfrak{U}(Q)} \left(\int\limits_Q |\nabla\eta(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \leq const\,\|u\|_{\mathfrak{U}(Q)}\|\eta\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)},$$

где постоянная не зависит от u и η. В силу (3.2) получаем

$$\left|\int\limits_Q (\bar{c}(x)u(x), \nabla\eta(x))dx\right| \leq \int\limits_Q C(r(x))|u(x)||\nabla\eta(x)|dx \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_Q C^2(r(x))u^2(x)\,dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_Q |\nabla\eta(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \leq const\left(\int\limits_Q C^2(r(x))u^2(x)dx\right)^{1/2} \|\eta\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)} \leq$$

$$\leq const\left(C^2(\ell_0)\int\limits_{Q_{\ell_0}} u^2(x)\,dx+\sum_{m=1}^{p}\int\limits_{\Pi_m^{\ell_m,h}} C^2(r(x))u^2(x)dx\right)^{1/2}\|\eta\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(Q)}\leq$$

$$\leq const\left(\|u\|^2_{L_2(Q)}+\sum_{m=1}^{p}\int\limits_{\tilde{\Pi}_m^{\ell_m,h}} C^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}y_n\right)\tilde{u}^2(y^{'},y_n)dy^{'}dy_n\right)^{1/2}\|\eta\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(Q)}\leq$$

$$\leq const\left(\|u\|^2_{L_2(Q)}+\sum_{m=1}^{p}\int\limits_0^h C^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}y_n\right)dy_n\max_{0\leq y_n\leq h}\int\limits_{|y'|\,<\,\ell_m}\tilde{u}^2(y',y_n)dy'\right)^{1/2}\|\eta\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(Q)}\leq$$

$$\leq const\left(\|u\|^2_{L_2(Q)}+\sum_{m=1}^{p}\max_{0\leq y_n\leq h}\int\limits_{|y'|\,<\,\ell_m}\tilde{u}^2(y',y_n)dy'\right)^{1/2}\|\eta\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(Q)}\leq$$

$$\leq const\left(\|u\|^2_{L_2(Q)}+\|u\|^2_{C_{n-1}(\bar{Q})}\right)^{1/2}\|\eta\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(Q)},$$

Далее, в силу вложения $C_{n-1}(\bar{Q})\subset L_2(Q)$, имеем

(3.7)

$$\left|\int\limits_Q(\bar{c}(x)u(x),\nabla\eta(x))dx\right|\leq const\,\|u\|_{C_{n-1}(\bar{Q})}\|\eta\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(Q)}\leq const\,\|u\|_{\mathcal{U}(Q)}\|\eta\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(Q)},$$

где постоянная не зависит от u и η.

В силу (3.3) и (3.5), аналогично предыдущим оценкам, получаем

$$\left|\int\limits_Q d(x)u(x)\eta(x)\,dx\right|\leq\int\limits_Q D(r(x))|u(x)||\eta(x)|\,dx\leq$$

$$\leq\left(\int\limits_Q r^2(x)D^2(r(x))u^2(x)\,dx\right)^{1/2}\left(\int\limits_Q\frac{\eta^2(x)}{r^2(x)}\,dx\right)^{1/2}\leq$$

$$\leq const\left(\int\limits_Q r^2(x)D^2(r(x))u^2(x)\,dx\right)^{1/2}\|\eta\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(Q)}\leq$$

$$\leq const\left(D^2(\ell_0)\int\limits_{Q_{\ell_0}} r^2(x)u^2(x)\,dx+\sum_{m=1}^{p}\int\limits_{\Pi_m^{\ell_m,h}} r^2(x)D^2(r(x))u^2(x)\,dx\right)^{1/2}\|\eta\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(Q)}\leq$$

$$\leq const\left(D^2(\ell_0)\max_{x\in\bar{Q}_{\ell_0}} r^2(x)\int\limits_{Q_{\ell_0}} u^2(x)\,dx+\right.$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{p}\int\limits_{\tilde{\Pi}_m^{\ell_m,h}} y_n^2 D^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}y_n\right)\tilde{u}^2(y^{'},y_n)\,dy^{'}\,dy_n\right)^{1/2}\|\eta\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)}\leq$$

$$\leq const\left(\|u\|^2_{L_2(Q)}+\sum_{m=1}^{p}\int\limits_0^h y_n^2\;D^2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}y_n\right)dy_n\max_{0\leq y_n\leq h}\int\limits_{|y'|<\ell_m}\tilde{u}^2(y',y_n)\,dy'\right)^{1/2}\|\eta\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)}\leq$$

$$\leq const\left(\|u\|^2_{L_2(Q)}+\sum_{m=1}^{p}\max_{0\leq y_n\leq h}\int\limits_{|y'|<\ell_m}\tilde{u}^2(y',y_n)dy'\right)^{1/2}\|\eta\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)}\leq$$

$$\leq const\left(\|u\|^2_{L_2(Q)}+\|u\|^2_{C_{n-1}(\bar{Q})}\right)^{1/2}\|\eta\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)}\leq const\|u\|_{\mathcal{U}(Q)}\,\|\eta\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)}, \tag{3.8}$$

где постоянная не зависит от u и η.

Таким образом, из (3.6) – (3.8) получаем, что для произвольных $u\in\mathcal{U}(Q)$ и $\eta\in C_0^\infty(Q)$ имеет место оценка $|\langle Tu,\eta\rangle|\leq const\|u\|_{\mathcal{U}(Q)}\,\|\eta\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)}$ с независящей от u и η постоянной. Так как функции η из $C_0^\infty(Q)$ всюду плотны в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$, то из полученной оценки немедленно вытекает ограниченность оператора $T:\mathcal{U}(Q)\to\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}(Q)$. Лемма 3.1 доказана. □

Замечание 3.1. *Очевидно, что в формулировке леммы 3.1 условие (3.1) можно заменить условием*

$$|\bar{b}(x)|\leq\frac{const}{r^{1/2}(x)},\quad x\in Q.$$

Так как при выполнении условий (3.1) - (3.3) оператор T является вполне непрерывным оператором из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}(Q)$, см. [20], то из леммы 3.1 получаем справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.1. *$\mathcal{L}_0^{-1}T$ является линейным и ограниченным оператором, действующим из пространства $\mathcal{U}(Q)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ и является вполне непрерывным оператором, действующим из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$.*

Из (3.4) очевидно, что $f - divF \in \overset{\circ}{W}{}_2^{-1}(Q)$. Так как $v \in \mathcal{U}(Q)$ то, в силу леммы 3.1, $Tv \in \overset{\circ}{W}{}_2^{-1}(Q)$. Таким образом, $g = Tv + f - divF \in \overset{\circ}{W}{}_2^{-1}(Q)$.
Далее, наряду с уравнением (2.6) рассмотрим соответствующее уравнение в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{1}(Q)$:

$$w - \mathcal{L}_0^{-1}Tw = h, \qquad w \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1}(Q). \tag{3.9}$$

Из леммы 3.1 следует справедливость следующего утверждения.

Утверждение 3.1. *Пусть w является решением операторного уравнения (2.6) в $\overset{\circ}{\mathcal{U}}(Q)$ с $g \in \overset{\circ}{W}{}_2^{-1}(Q)$. Тогда w является решением операторного уравнения (3.9) в $\overset{\circ}{W}{}_2^{1}(Q)$ с $h = \mathcal{L}_0^{-1}g$.*

Объединяя утверждения 2.2 и 3.1, получаем следующий результат.

Утверждение 3.2. *Пусть $\partial Q \in C^1$ и выполнены условия (1.3), (1.5), (1.6), (3.1) - (3.3). Для того, чтобы функция w являлась решением задачи (2.3), (2.4), необходимо и достаточно, чтобы функция w являлась бы решением операторного уравнения (3.9) в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{1}(Q)$ с правой частью $h = \mathcal{L}_0^{-1}(Tv + f - divF)$, где v – решение задачи (2.1), (2.2).*

Таким образом, изучение разрешимости задачи Дирихле (1.1), (1.2) в $C_{n-1}(\bar{Q})$-постановке сведено к изучению разрешимости операторного уравнения (3.9) в гильбертовом пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{1}(Q)$ с вполне непрерывным оператором $\mathcal{L}_0^{-1}T$. В силу теоремы Фредгольма, пространство решений соответствующего (3.9) однородного уравнения

$$w - \mathcal{L}_0^{-1}Tw = 0, \qquad w \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1}(Q), \tag{3.10}$$

конечномерно, его размерность совпадает с размерностью пространства решений однородного сопряженного уравнения

$$w^* - (\mathcal{L}_0^{-1}T)^*w^* = 0, \qquad w^* \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1}(Q), \tag{3.11}$$

где $(\mathcal{L}_0^{-1}T)^*$ - сопряженный (в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{1}(Q)$) к $\mathcal{L}_0^{-1}T$ оператор, и для разрешимости операторного уравнения (3.9) в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{1}(Q)$ необходимо и достаточно условие ортогональности правой части h подпространству решений однородного сопряженного уравнения (3.11).
В частности, операторное уравнение (3.9) в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^{1}(Q)$ имеет решение при любой h из $\overset{\circ}{W}{}_2^{1}(Q)$, если однородное уравнение (3.10) в $\overset{\circ}{W}{}_2^{1}(Q)$ имеет

только тривиальное решение $w \equiv 0$. Таким образом, условия разрешимости в $C_{n-1}(\bar{Q})$ исследуемой задачи можно записать в терминах скалярного произведения в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$, что позволяет сформулировать эти условия в терминах исходной задачи.

Определим в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ скалярное произведение

$$(u,v)'_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)} = \int_Q (A(x)\nabla u(x), \nabla v)\, dx \equiv \langle \mathcal{L}_0 u, v\rangle, \tag{3.12}$$

эквивалентное скалярному произведению

$$(u,v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)} = \int_Q (uv + (\nabla u(x), \nabla v))\, dx.$$

При таком скалярном произведении в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ сопряженный к $\mathcal{L}_0^{-1}T$ оператор $(\mathcal{L}_0^{-1}T)^*$ имеет следующий вид

$$(\mathcal{L}_0^{-1}T)^* = \mathcal{L}_0^{-1}T^*_{L_2}, \tag{3.13}$$

где через $T^*_{L_2}$ обозначен оператор ("сопряженный к оператору T в L_2"):

$$T^*_{L_2}u = -(\bar{c}, \nabla u) + div(\bar{b}u) - du,\ u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q).$$

Действительно, в силу (3.12) имеем

$$(\mathcal{L}_0^{-1}Tu, v)'_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)} = \langle \mathcal{L}_0(\mathcal{L}_0^{-1}Tu),\, v\rangle = \langle Tu, v\rangle =$$

$$= -\int_Q (\bar{b}(x), \nabla u(x))v(x)dx - \int_Q (\bar{c}(x)u(x), \nabla v(x))dx - \int_Q d(x)u(x)v(x)dx =$$

$$= -\int_Q (\bar{c}(x), \nabla v(x))u(x)dx - \int_Q (\bar{b}(x)v(x), \nabla u(x))dx - \int_Q d(x)v(x)u(x)dx =$$

$$= \langle T^*_{L_2}v,\, u\rangle = (\mathcal{L}_0^{-1}T^*_{L_2}v,\, u)'_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)}.$$

Заметим, что оператор $T^*_{L_2}$ обладает теми же свойствами, что и оператор T.

С учетом (3.13), сопряженное к (3.10) однородное уравнение (3.11) запишется в следующем виде

$$w^* - \mathcal{L}_0^{-1}T^*_{L_2}w^* = 0, \qquad w^* \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(Q), \tag{3.14}$$

а это означает, что w^* является решением из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ соответствующей (2.3), (2.4) однородной сопряженной задачи Дирихле

$$-div\,(A(x)\nabla w^*) + (\bar{c}(x), \nabla w^*) - div(\bar{b}(x)w^*) + d(x)w^* = 0, \quad x \in Q, \tag{3.15}$$

$$w^*|_{\partial Q} = 0, \tag{3.16}$$

Из вышеизложенного и утверждения 3.2 вытекает следующий результат.

Утверждение 3.3. *Пусть $\partial Q \in C^1$ и выполнены условия (1.3), (1.5), (1.6), (3.1) - (3.3). Тогда пространство решений (из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$) однородной сопряженной задачи (3.15), (3.16) конечномерно, его размерность совпадает с размерностью пространства решений однородной задачи*

$$-div\,(A(x)\nabla w) + (\bar{b}(x), \nabla w) - div(\bar{c}(x)w) + d(x)w = 0, \quad x \in Q, \tag{3.17}$$

$$w|_{\partial Q} = 0. \tag{3.18}$$

Для того чтобы задача (2.3), (2.4) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы для всех решений w^* однородной сопряженной задачи (3.15), (3.16), выполнялось условие

$$\left(\mathcal{L}_0^{-1}(Tv + f - divF), w^*\right)'_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)} = 0, \tag{3.19}$$

где v – решение задачи (2.1), (2.2).

При этом существует единственное решение $w(x)$ задачи (2.3), (2.4), ортогональное (в скалярном произведении $(\cdot\,,\,\cdot)'_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)}$) всем решениям однородной задачи (3.17), (3.18), и для него справедлива оценка

$$\|w\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)} \le C\left(\|v\|_{\mathfrak{U}(Q)} + \|f\|_{L_2(Q)} + \||F|\|_{L_2(Q)}\right),$$

с независящей от v, f и F постоянной.

Учитывая (3.12), условие (3.19) запишем в следующем виде

$$\left(\mathcal{L}_0^{-1}(Tv + f - divF), w^*\right)'_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)} = \langle (Tv + f - divF), w^* \rangle =$$

$$= -\int\limits_Q (\bar{b}(x), \nabla v(x)) w^*(x)\,dx - \int\limits_Q (\bar{c}(x)v(x), \nabla w^*(x))\,dx - \int\limits_Q d(x)v(x)w^*(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_Q f(x)w^*(x)\,dx + \int\limits_Q (F(x), \nabla w^*(x))\,dx = 0, \text{ т. е.}$$

$$\int\limits_Q (\bar{b}(x), \nabla v(x)) w^*(x)\,dx + \int\limits_Q (\bar{c}(x)v(x), \nabla w^*(x))\,dx + \int\limits_Q d(x)v(x)w^*(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_Q f(x)w^*(x)\,dx + \int\limits_Q (F(x), \nabla w^*(x))\,dx.$$

Таким образом, объединяя вышеизложенные утверждения, для рассматриваемого случая теорему о разрешимости в $C_{n-1}(\bar{Q})$ задачи (1.1), (1.2) можно сформулировать следующим образом.

Теорема 3.2. *Пусть $\partial Q \in C^1$, выполнены условия (1.3), (1.5), (1.6), (3.1) - (3.3) и пусть $u_0 \in L_2(\partial Q)$. Тогда для того, чтобы при $f \in L_2(Q)$, $F \in (L_2(Q))^n$ задача (1.1), (1.2) в $C_{n-1}(\bar{Q})$-постановке имела решение, необходимо и достаточно, чтобы функции f, F удовлетворяли условию*

$$\int\limits_Q f(x)w_k^*(x)\,dx + \int\limits_Q (F(x), \nabla w_k^*(x))\,dx = \tag{3.20}$$

$$\int\limits_Q (\bar{b}(x), \nabla v(x))w_k^*(x)\,dx + \int\limits_Q (\bar{c}(x)v(x), \nabla w_k^*(x))\,dx + \int\limits_Q d(x)v(x)w_k^*(x)\,dx,\ k = 1, \cdots, p,$$

где v – решение задачи (2.1), (2.2), а $w_k^*(x)$, $k = 1, 2, ..., p$, - функции из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$, образующие базис в пространстве решений однородной сопряженной задачи (3.15), (3.16). При этом, существует единственное решение задачи (1.1), (1.2) вида

$$u = v + w, \tag{3.21}$$

где w – решение задачи (2.3), (2.4), ортогональное в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ (в скалярном произведении $(\cdot\,,\cdot)'_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)}$) всем решениям однородной задачи (3.17), (3.18). Для этого решения справедлива оценка

$$\|u\|^2_{C_{n-1}(\bar{Q})} + \int\limits_Q r(x)\,|\nabla u(x)|^2\,dx \le const\left(\|u_0\|^2_{L_2(\partial Q)} + \int\limits_Q f^2(x)\,dx + \int\limits_Q |F(x)|^2\,dx\right), \tag{3.22}$$

с независящей от u_0, f и F постоянной. Любое другое решение задачи (1.1), (1.2) получается добавлением к функции u некоторого решения однородной задачи (3.17), (3.18).

Доказательство. Учитывая вышеизложенное, для доказательства теоремы достаточно установить справедливость оценки (3.22). Пусть u – решение (единственное) задачи (1.1), (1.2) вида $u = v + w$, где v – решение задачи (2.1), (2.2), а w – решение задачи (2.3), (2.4) ортогональное в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$ всем решениям однородной задачи (3.17), (3.18), т. е. однородного уравнения (3.10). Тогда

$$\|u\|_{\mathcal{U}(Q)} \le \|v\|_{\mathcal{U}(Q)} + \|w\|_{\mathcal{U}(Q)} \le const\left(\|u_0\|_{L_2(\partial Q)} + \|w\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)}\right) \le$$

$$\leq const \left(\|u_0\|_{L_2(\partial Q)} + \|\mathcal{L}_0^{-1}(Tv + f - divF)\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)} \right) \leq$$

$$\leq const \left(\|u_0\|_{L_2(\partial Q)} + \|f\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}(Q)} + \|divF\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{-1}(Q)} \right) \leq$$

$$\leq const \left(\|u_0\|_{L_2(\partial Q)} + \left(\int\limits_Q f^2(x)\, dx \right)^{1/2} + \left(\int\limits_Q |F(x)|^2\, dx \right)^{1/2} \right),$$

где постоянная не зависит от u_0, f, F. □

Рассмотрим случай когда граничная функция u_0 допускает принадлежащее $W_2^1(Q)$ продолжение в область Q. Тогда решение v задачи (2.1), (2.2) принадлежит пространству $W_2^1(Q)$. Так как любое решение задачи (1.1), (1.2) представляется в виде суммы решения задачи (2.1), (2.2) (принадлежащее $W_2^1(Q)$) и решения задачи (2.3), (2.4) (принадлежащее $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)$), то решение задачи (1.1), (1.2) также принадлежит пространству $W_2^1(Q)$ и для единственного решения u вида (3.21) справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^1(Q)} \leq \|v\|_{W_2^1(Q)} + \|w\|_{W_2^1(Q)} \leq const \left(\|u_0\|_{L_2(\partial Q)} + \|w\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q)} \right) \leq$$

$$\leq const \left(\|u_0\|_{L_2(\partial Q)} + \left(\int\limits_Q f^2(x)\, dx \right)^{1/2} + \left(\int\limits_Q |F(x)|^2\, dx \right)^{1/2} \right), \tag{3.23}$$

где постоянная не зависит от u_0, f, F. Таким образом, если u_0 допускает принадлежащее $W_2^1(Q)$ продолжение в область Q, то условие (3.20) является необходимым и достаточным условием для разрешимости задачи (1.1), (1.2) в пространстве $W_2^1(Q)$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3.3. *Пусть $\partial Q \in C^1$, выполнены условия (1.3), (1.5), (1.6), (3.1) - (3.3) и пусть u_0 допускает принадлежащее $W_2^1(Q)$ продолжение в область Q. Тогда для того чтобы при $f \in L_2(Q)$, $F \in (L_2(Q))^n$ задача (1.1), (1.2) имела решение в $W_2^1(Q)$, необходимо и достаточно, чтобы функции f, F удовлетворяли условию (3.20). При этом, для решения задачи (1.1), (1.2) вида (3.21) справедлива оценка (3.23).*

Замечание 3.2. *Задача Дирихле (1.1), (1.2) в $W_2^1(Q)$-постановке подробно изучена и хорошо известны соответствующие условия разрешимости, см. например [21], [4]. При этом, как обычно для задачи в $W_2^1(Q)$-постановке для коэффициентов при младших членах уравнения (1.1) предполагается выполнение* *дополнительного условия (см. например [21])*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} b_i^2, \ \sum_{i=1}^{n} c_i^2, \ d \right\|_{L_{q/2}} < \infty, \quad q > n. \tag{3.24}$$

Заметим только, что из условий (3.1) - (3.3) не следует условие (3.24).

Abstract. We consider Dirichlet problems in a bounded domain $Q \subset R_n$ for a general second-order elliptic equation with the boundary function in L_2. In the author's previous papers necessary and sufficient conditions for the existence of an $(n-1)$-dimensionally continuous solution were obtained under some natural assumptions on the equation coefficients. Those assumptions are formulated in terms of an auxiliary operator equation in a special Hilbert space and are difficult to verify. In the present paper we obtain necessary and sufficient conditions for the existence of a solution in terms of the original problem for a more narrow class of the right-hand sides. It is shown that if, in addition, the boundary function is assumed to be in the space $W_2^{1/2}(\partial Q)$, then obtained conditions transform into solvability conditions in the space $W_2^1(Q)$.

Список литературы

[1] В. Ж. Думанян, “О разрешимости задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, ДНАН Армении, **114**, no. 4, 295 – 308 (2014).

[2] В. П. Михайлов, “О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, Дифференц. уравнения, **12**:10, 1877 – 1891 (1976).

[3] В. П. Михайлов, “О граничных свойствах решений эллиптических уравнений”, Матем. заметки, **27**:1, 137 – 145 (1980).

[4] В. П. Михайлов, Дифференциальные Уравнения в Частных Производных, М., Наука (1983).

[5] А. К. Гущин, В. П. Михайлов, “О граничных значениях решений эллиптических уравнений”, Обобщенные функции и их применения в математической физике (Труды Международной конференции), М., ВЦ АН СССР, 189 – 205 (1981).

[6] О. И. Богоявленский, В. С. Владимиров, И. В. Волович, А. К. Гущин, Ю. Н. Дрожжинов, В. В. Жаринов, В. П. Михайлов, “Краевые задачи математической физики”, Тр. МИАН, **175**, М., Наука, 63 – 102 (1986).

[7] И. М. Петрушко, “О граничных значениях решений эллиптических уравнений в областях с ляпуновской границей”, Матем. сб., **119(161)**, 48 – 77 (1982).

[8] И. М. Петрушко, “О граничных значениях в $L_p, p > 1$, решений эллиптических уравнений в областях с ляпуновской границей”, Матем. сб., **120(162)**, 569 – 588 (1983).

[9] А. К. Гущин, “О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, Матем. сб., **137(179)**:1(9), 19 – 64 (1988).

[10] А. К. Гущин, В. П. Михайлов, “О существовании граничных значений решений эллиптического уравнения”, Матем. сб., **182**:6, 787 – 810 (1991).

[11] А. К. Гущин, “L_p-оценки решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка”, ТМФ, **174**:2, 243 – 255 (2013).

[12] А. К. Гущин, “О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с граничной функцией из L_p”, Матем. сб., **203**:1, 3 – 30 (2012).

[13] А. К. Гущин, "Оценки некасательной максимальной функции решений эллиптического уравнения второго порядка", Докл РАН., **446**:5, 487 – 489 (2012).
[14] В. Ж. Думанян, "О граничных значениях решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка", Изв. НАН Армении, Математика, **45**:1, 31 – 52 (2010).
[15] В. Ж. Думанян, "О поведении вблизи границы решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка", ДАН РАН, **386**:6, 735 – 737 (2002).
[16] V. Zh. Dumanian, "On the behaviour near the boundary of solutions of the Dirichlet problem for elliptic equations", Note Di Matematica, **21**:2, 99 – 118 (2002/2003).
[17] В. Ж. Думанян, "О разрешимости задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка", Математический сборник **202**(7), 75 – 94 (2011).
[18] В. Ж. Думанян, "О разрешимости задачи Дирихле для общего эллиптического уравнения второго порядка", Доклады РАН, **436**, no. 2. 159 – 162 (2011).
[19] В. П. Михайлов, А. К. Гущин, Дополнительные Главы Курса "Уравнения Математической Физики", Лекционные курсы НОЦ, Вып.7, Математический институт им. В.А.Стеклова РАН (МИАН), М., МИАН (2007).
[20] V. Zh. Dumanyan, "On compactness of a class of first order linear differential operators", Proceedings of the Yerevan State University, no. 2, 17 – 21 (2011).
[21] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, Линейные и Квазилинейные Уравнения Эллиптического Типа, М., "Наука", 540 с. (1964).

Поступила 29 июня 2014