ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 1, 1992 Естественные науки

Математика

УДК 517.927.21

Г.М. АЙРАПЕТЯН

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА РИМАНА ДЛЯ НЕПРАВИЛЬНО-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОБЛАСТЯХ, ОГРАНИЧЕННЫХ ЭЛЛИПСОМ

Исследуются граничные задачи типа Римана для неправильно-эллиптического уравнения второго порядка в областях, ограниченных эллипсом. Доказывается, что для разрешимости неоднородной задачи необходимо и достаточно выполнение одного линейно независимого условия. Вычисляется также число линейно независимых решений однородной задачи.

1. Пусть Γ—эллипс в комплексной плоскости $z = x + iy$, центр которого находится в точке $z = 0$, G—область, ограниченная этим эллипсом. Через $C^{1+\alpha}(\overline{G})$ обозначим класс функций, производные которых по x и y принадлежат классу Гельдера с показателем α в $\overline{G}$. Рассмотрим уравнение

$$A_0\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} + A_1\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}\partial z} + A_2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad z \in G, \tag{1}$$

где A_0, A_1, A_2—произвольные комплексные числа

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\Big), \quad \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\Big).$$

Будем предполагать,что уравнение (1) неправильно-эллиптическое, причем корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения

$$A_0\lambda^2 + A_1\lambda + A_2 = 0$$

различные и находятся в единичном круге; $D = \{z; |z| < 1\}$.

В настоящей работе исследуется следующая задача Римана. Найти решение уравнения (1) из класса $C^{1+\alpha}(\overline{G})$, которое удовлетворяет условиям

$$\mathrm{Re}\frac{\partial u(t)}{\partial s} = f_1(t), \quad \mathrm{Re}\frac{\partial u(t)}{\partial n} = f_2(t), \quad t \in \Gamma, \tag{2}$$

где $f_1(t)$, $f_2(t)$—действительные функции из класса $C^{\alpha}(\Gamma)$, $\partial/\partial n$—производное по направлению внешней нормали на Γ, $\partial/\partial s$—производное по дуге эллипса Γ.

Доказывается, что задача (1)–(2) разрешима для любых функций $f_1(t) \in C_0^\alpha(\Gamma)$, $f_2(t) \in C^\alpha(\Gamma)$ ($C_0^\alpha(\Gamma)$—класс функций из $C^\alpha(\Gamma)$, среднее значение которых на Γ равно нулю). Вычисляется число линейно независимых решений однородной задачи.

Везде линейная зависимость понимается над полем действительных чисел.

2. Через Δ_1 и Δ_2 обозначим образы области G при отображениях $z + \lambda_1\bar{z}$ и $z + \lambda_2\bar{z}$ соответственно. Как известно (см. [1], с.109), общее решение уравнеия (1) можно представить в виде

$$u(z) = \varphi_1(z + \lambda_1\bar{z}) + \varphi_2(z + \lambda_2\bar{z}) + d, \quad \varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0, \quad z \in G, \tag{3}$$

где $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$—голоморфные в областях Δ_1 и Δ_2 функции соответственно и определяются через $u(z)$ единственным образом. При этом если $u(z) \in C^{1+\alpha}\overline{G}$, то $\varphi_j(z) \in C^{1+\alpha}(\overline{\Delta}_j)$ ($j = 1,2$). Уравнение эллипса Γ можно представить в виде $t = a(\tau + \mu\bar{\tau})$, где a и μ—некоторые комплексные числа, причем $|\mu| < 1$, τ—комплексный параметр $\tau \in T$; $T = \{\tau : |\tau| = 1\}$. Ясно, что функция $z = a(w + \mu\bar{w})$ взаимно однозначно отображает единичный круг $D = \{w : |w| < 1\}$ на область G. Сделав замену переменной $z = a(w + \mu\bar{w})$ в (3), получаем

$$v(w) = u(w + \mu\bar{w}) = \psi_1(w + \lambda_1'\bar{w}) + \psi_2(w + \lambda_2'\bar{w}) + d, \quad \psi_1(0) = \psi_2(0) = 0, \tag{4}$$

где $w \in D$,

$$\lambda_1' = \frac{a\mu + \lambda_1\bar{a}}{a + \bar{\mu}\lambda_1\bar{a}}, \quad \lambda_2' = \frac{a\mu + \lambda_2\bar{a}}{a + \bar{\mu}\lambda_2\bar{a}}, \tag{5}$$

$$\psi_1(z) = \varphi_1((a + \lambda_1\bar{a}\bar{\mu})z), \quad z \in G_1 \tag{6}$$

$$\psi_2(z) = \varphi_2((a + \lambda_2\bar{a}\bar{\mu})z), \quad z \in G_2 \tag{7}$$

где G_1 и G_2—образы областей Δ_1 и Δ_2 при отображениях $(a + \lambda_1\bar{a}\bar{\mu})z$ и $(a + \lambda_2\bar{a}\bar{\mu})z$ соответственно. Условия (2) можно представить в виде

$$\mathrm{Re}\frac{\partial v(\tau)}{\partial s} = \tilde{f}_1(\tau), \quad \mathrm{Re}\frac{\partial v(\tau)}{\partial r} = \tilde{f}_2(\tau), \quad \tau \in T, \tag{8}$$

где $\tilde{f}_1(\tau)$, $\tilde{f}_2(\tau)$—действительные функции из класса $C^\alpha(T)$, $\partial/\partial s$—производное по дуге окружности T, $\partial/\partial r$—производное по радиусу круга D. Подставляя (4) в (8), получаем

$$\begin{gathered}\mathrm{Re}((\tau + \lambda_1'\bar{\tau})\psi_1'(\tau + \lambda_1'\bar{\tau}) + (\tau + \lambda_2'\bar{\tau})\psi_2'(\tau + \lambda_2'\bar{\tau})) = \tilde{f}_1(\tau), \quad \tau \in T,\\ \mathrm{Re}(\mathrm{i}(\tau - \lambda_1'\bar{\tau})\psi_1'(\tau + \lambda_1'\bar{\tau}) + \mathrm{i}(\tau - \lambda_2'\bar{\tau})\psi_2'(\tau + \lambda_2'\bar{\tau})) = \tilde{f}_2(\tau), \quad \tau \in T.\end{gathered} \tag{9}$$

Так как $|\lambda_j'| < 1$ ($j = 1,2$), то функции $\psi_j'(\tau + \lambda_j'\bar{\tau})$ ($j = 1,2$) можно представить в виде (см. [2])

$$\psi_j'(\tau + \lambda_j'\bar{\tau}) = \mu_j(\tau) + \mu_j(\lambda_j'\bar{\tau}), \quad \tau \in T, \tag{10}$$

где $\mu_j(w)$ ($j = 1,2$)—аналитические в D функции из класса $C^\alpha(\overline{D})$ и определяются через $\psi_j'(z)$ единственным образом. Функция $\psi_j'(\zeta)$ ($j = 1,2$) через $\mu_j(w)$ определяется формулой

$$\psi_j'(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int_T \frac{(\mu_j(\tau) + \mu_j(\lambda_j'\bar{\tau}))(1 - \lambda_j'\bar{\tau}^2)}{\tau + \lambda_j\bar{\tau} - z}d\tau, \quad z \in G_1, \ j = 1,2. \tag{11}$$

3. В этом пункте будем исследовать однородную задачу (1)–(2). Учитывая (10), условия (9) можно представить в виде

$$\mathrm{Re}\Bigg(\Big(t+\frac{\lambda_1'}{t}\Big)\mu_1(t)+\Big(\frac{1}{t}+\bar{\lambda}_1' t\Big)\overline{\mu_1(\lambda_1'\bar{t})}+\Big(t+\frac{\lambda_2'}{t}\Big)\mu_2(t)+$$

$$+\Big(\frac{1}{t}+\bar{\lambda}_2' t\Big)\overline{\mu_2(\lambda_2'\bar{t})}=0,\quad t\in T,$$

$$\mathrm{Re}\Bigg(\mathrm{i}\Big(t-\frac{\lambda_1'}{t}\Big)\mu_1(t)-\mathrm{i}\Big(\frac{1}{t}-\bar{\lambda}_1' t\Big)\overline{\mu_1(\lambda_1'\bar{t})}+\mathrm{i}\Big(t-\frac{\lambda_2'}{t}\Big)\mu_2(t)-$$

$$-\mathrm{i}\Big(\frac{1}{t}-\bar{\lambda}_2' t\Big)\overline{\mu_2(\lambda_2'\bar{t})}=0,\quad t\in T,$$

Из этих равенств получаем

$$\Big(z+\frac{\lambda_1'}{z}\Big)\mu_1(z)+\Big(z+\frac{\lambda_2'}{z}\Big)\mu_2(z)+\Big(\frac{1}{z}+\bar{\lambda}_1' z\Big)\overline{\mu_1(\lambda_1'\bar{z})}+$$

$$+\Big(\frac{1}{z}+\bar{\lambda}_2' z\Big)\overline{\mu_2(\lambda_2\bar{z})}=\mathrm{i}C_1+Az-\frac{\overline{A}}{z},\quad z\in D, \tag{12}$$

$$\Big(z-\frac{\lambda_1'}{z}\Big)\mu_1(z)+\Big(z-\frac{\lambda_2'}{z}\Big)\mu_2(z)-\Big(\frac{1}{z}-\bar{\lambda}_1' z\Big)\overline{\mu_1(\lambda_1'\bar{z})}-$$

$$-\Big(\frac{1}{z}-\bar{\lambda}_2' z\Big)\overline{\mu_2(\lambda_2'\bar{z})}=\mathrm{i}C_2+Bz+\frac{\overline{B}}{z},\quad z\in D, \tag{13}$$

где A, B—произвольные комплексные числа, C_1, C_2—произвольные действительные числа. Складывая равенства (12) и (13), будем иметь

$$z\mu_1(z)+z\mu_2(z)+\bar{\lambda}_1' z\overline{\mu_1(\lambda_1'\bar{z})}+\bar{\lambda}_2' z\overline{\mu_2(\lambda_2'\bar{z})}=\frac{C_2+\mathrm{i}C_1}{2}+\frac{A+B}{2}z+\frac{\overline{B-A}}{z}.$$

Из этого следует, что $C_1=C_2=0$, $A=B$. Следовательно,

$$\mu_1(z)+\mu_2(z)+\bar{\lambda}_1'\overline{\mu_1(\lambda_1'\bar{z})}+\bar{\lambda}_2'\overline{\mu_2(\lambda_2'\bar{z})}=A. \tag{14}$$

Вычитая из (12) (13), получаем

$$\lambda_1\mu_1(z)+\lambda_2\mu_2(z)+\overline{\mu_1(\lambda_1'\bar{z})}+\overline{\mu_2(\lambda_2'\bar{z})}=-\overline{A}. \tag{15}$$

Из равенств (14) и (15) следует, что $A=0$. Пусть $\mu_1(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_kz^k+\cdots$, $\mu_2(z)=b_0+b_1z+\cdots+b_kz^k+\cdots$. Подставляя функции $\mu_1(z)$ и $\mu_2(z)$ в (14) и (15), получаем

$$\begin{cases} a_0+b_0+\bar{\lambda}_1'\bar{a}_0+\bar{\lambda}_2'\bar{b}_0=0\\ \lambda_1'a_0+\lambda_2'b_0+\bar{a}_0+\bar{b}_0=0\end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases} a_k+b_k+\bar{\lambda}'^{k+1}_1\bar{a}_k+\bar{\lambda}'^{k+1}_2\bar{b}_k=0\\ \lambda_1'a_k+\lambda_2'b_k+\bar{\lambda}'^{k}_1\bar{a}_k+\bar{\lambda}'_2k\bar{b}_k=0,\quad (k=1,2,\ldots).\end{cases} \tag{17}$$

Из (16), считая a_0 произвольным, b_0 можно определить формулой

$$b_0 = \frac{(\bar\lambda_2' - \bar\lambda_1')\bar a_0 + (\lambda_1'\bar\lambda_2' - 1)a_0}{1 - |\lambda_2'|^2}. \tag{18}$$

При $k = 1$ из (17) имеем $a_1 + b_1 + \bar\lambda_1'^2\bar a_1 + \bar\lambda_2'^2\bar b_1 = 0$, $\mathrm{Re}(\lambda_1' a_1 + \lambda_2^1 b_1) = 0$. Положив $\lambda_1' a_1 + \lambda_2^1 b_1 = \mathrm{i}C$, где C—произвольная действительная постоянная, будем иметь

$$a_1 = \frac{\mathrm{i}C(1 - |\lambda_2'|^2)(1 - \lambda_1'\bar\lambda_2')}{(1 - |\lambda_1'\lambda_2'|^2)(\lambda_1' - \lambda_2')}, \quad b_1 = \frac{\mathrm{i}C(1 - |\lambda_1'|^2)(1 - \lambda_1'\bar\lambda_2')}{(1 - |\lambda_1'\lambda_2'|^2)(\lambda_2' - \lambda_1')}. \tag{19}$$

Положим

$$M_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \bar\lambda_1'^{k+1} & \bar\lambda_2'^{k+1} \\ \lambda_1' & \lambda_2' & \bar\lambda_1'^{k} & \bar\lambda_2'^{k} \\ \lambda_1'^{k} & \lambda_2'^{k} & \bar\lambda_1' & \bar\lambda_2' \\ \lambda_1'^{k+1} & \lambda_2'^{k+1} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для определения коэффициентов a_k, b_k, $k > 1$, нам необходима следующая лемма.

Лемма. Если $k > 1$, то $\det M_k \neq 0$.

Доказательство. Из определения матрицы M_k имеем

$\det M_k = \bar\lambda_1'\lambda_2' + \bar\lambda_1'^k\lambda_2'^k|\lambda_2'|^2 + |\lambda_2'|^{2k} - \bar\lambda_1'\lambda_2'|\lambda_2'|^{2k} - |\lambda_2'|^2 - \bar\lambda_2'^k\lambda_2'^k - |\lambda_1'|^2 -$
$-|\lambda_1'\lambda_2'|^2\bar\lambda_1'^k\lambda_2'^k - \lambda_1'\bar\lambda_2'|\lambda_2'|^{2k} + |\lambda_1'|^2|\lambda_2'|^2|\lambda_2'|^{2k} + |\lambda_1'|^2\bar\lambda_1'^k\lambda_2'^k + \lambda_1'\bar\lambda_2' + |\lambda_1'|^{2k} +$
$+\bar\lambda_1'\lambda_2'|\lambda_1'|^{2k}|\lambda_2'|^{2k} + |\lambda_2'|^2\lambda_1'^k\bar\lambda_2'^k - |\lambda_2'|^2|\lambda_1'|^{2k}|\lambda_2'|^{2k} - \lambda_1'^k\bar\lambda_2'^k - \bar\lambda_1'\lambda_2'|\lambda_1'|^{2k} -$
$-\lambda_1'\bar\lambda_2'|\lambda_1'|^{2k} - |\lambda_1'|^2|\lambda_1'|^{2k}|\lambda_2'|^{2k} - |\lambda_1'|^2|\lambda_2'|^2\lambda_1'^k\bar\lambda_2'^k + \lambda_1'\bar\lambda_2'|\lambda_1'|^{2k}|\lambda_2'|^{2k} + |\lambda_1'|^2\cdot$
$\cdot|\lambda_2'|^2|\lambda_1'|^{2k} + |\lambda_1'|^2\lambda_1'^k\bar\lambda_2'^k.$

Это выражение можно представить в виде

$$|\lambda_1'^k - \lambda_2'^k|^2|1 - \bar\lambda_1'\lambda_2'|^2 - |\lambda_1' - \lambda_2'|^2|1 - \bar\lambda_1'^k\lambda_2'^k|^2.$$

Теперь, учитывая, что (см. [3], с.12)

$$\left|\frac{\lambda_1'^k - \lambda_2'^k}{1 - \bar\lambda_1'^k\lambda_2'^k}\right| < \left|\frac{\lambda_1' - \lambda_2'}{1 - \bar\lambda_1'\lambda_2'}\right| \quad (k > 1),$$

завершаем доказательство леммы.

Систему (17) при $k > 1$ можно представить в виде

$$a_k + b_k + \bar\lambda_1'^{k+1}\bar a_k + \bar\lambda_2'^{k+1}\bar b_k = 0,$$

$$\lambda_1' a_k + \lambda_2' b_k + \bar\lambda_1'^{k}\bar a_k + \bar\lambda_2'^{k}\bar b_k = 0,$$

$$\lambda_1'^k a_k + \lambda_2'^k b_k + \bar\lambda_1'\bar a_k + \bar\lambda_2'\bar b_k = 0,$$

$$\lambda_1'^{k+1} a_k + \lambda_2'^{k+1} b_k + \bar a_k + \bar b_k = 0.$$

Учитывая теперь лемму, при $k > 1$ будем иметь $a_k = b_k = 0$. Следовательно,

$$\mu_1(z) = a_0 + \frac{\mathrm{i}C(1 - |\lambda_2'|^2)(1 - \bar\lambda_1'\lambda_2')}{(1 - |\lambda_1'\lambda_2'|^2)(\lambda_1' - \lambda_2')}z,$$

$$\mu_2(z)=\frac{(\bar\lambda_2'-\bar\lambda_1')\bar a_0+(\lambda_1'\bar\lambda_2'-1)a_0}{1-|\lambda_2'|^2}+\frac{iC(1-|\lambda_1'|^2)(1-\lambda_1'\bar\lambda_2')}{(1-|\lambda_1'\lambda_2'|^2)(\lambda_2'-\lambda_1')}z.$$

Подставляя $\mu_1(z)$ и $\mu_2(z)$ в (11) и учитывая, что

$$\int_T\frac{(1-\lambda_j'\bar\tau^2)d\tau}{\tau+\lambda_j'\bar\tau-z}=1,\quad \int_T\frac{(\tau+\lambda_j'\bar\tau)(1-\lambda_j'\bar\tau^2)d\tau}{\tau+\lambda_j'\bar\tau-z}=z\ (j=1,2),$$

получим

$$\psi_1'(z)=2a_0+\frac{iC(1-|\lambda_2'|^2)(1-\bar\lambda_1'\lambda_2')}{(1-|\lambda_1'\lambda_2'|^2)(\lambda_1'-\lambda_2')}z,$$

$$\psi_2'(z)=2\frac{(\lambda_2'-\lambda_1')\bar a_0+(\lambda_1'\bar\lambda_2'-1)a_0}{1-|\lambda_2'|^2}+\frac{iC(1-|\lambda_1'|^2)(1-\lambda_1'\bar\lambda_2')}{(1-|\lambda_1'\lambda_2'|^2)(\lambda_2'-\lambda_1')}z.$$

Так как согласно (6), (7)

$$\varphi_1(z)=\psi_1\Big(\frac{z}{a+\lambda_1\bar a\bar\mu}\Big),\quad \varphi_2(z)=\psi_2\Big(\frac{z}{a+\lambda_2\bar a\bar\mu}\Big),$$

то

$$\varphi_1(z)=\frac{2a_0z}{a+\lambda_1'\bar a\bar\mu}+\frac{iC(1-|\lambda_2'|^2)(1-\bar\lambda_1'\lambda_2')}{2(1-|\lambda_1'\lambda_2'|^2)(\lambda_1'-\lambda_2')}\cdot\frac{z^2}{(a+\lambda_1\bar a\bar\mu)^2},$$

$$\varphi_2(z)=2\frac{((\bar\lambda_2'-\bar\lambda_1')\bar a_0+(\lambda_1'\bar\lambda_2'-1)a_0)z}{(1-|\lambda_2'|^2)(a+\lambda_2'\bar a\bar\mu)}+$$

$$+\frac{iC(1-|\lambda_1'|^2)(1-\lambda_1'\bar\lambda_1')}{2(1-|\lambda_1'\lambda_2'|^2)(\lambda_2'-\lambda_1')}\cdot\frac{z^2}{a+\lambda_2\bar a\bar\mu}.$$

Учитывая формулы (5), окончательно получим

$$\varphi_1(z)=\frac{2a_0z}{a+\lambda_1\bar a\bar\mu}+$$

$$+\frac{iC(\bar a+\bar\mu a\bar\lambda_1)|a|^2(1-|\mu|^2)(1-|\lambda_2|^2)(1-\bar\lambda_1\lambda_2)z^2}{2(|a+\bar\mu\bar a\lambda_1|^2|a+\bar\mu\bar a\lambda_2|^2-|a\mu+\lambda_1\bar a|^2|a\mu+\lambda_2\bar a|^2)(\lambda_2-\lambda_1)},\tag{20}$$

$$\varphi_2(z)=2\frac{((\bar a+\mu a\bar\lambda_2)(\bar\lambda_2-\bar\lambda_1)\bar a_0-(a-\bar\mu\bar a\lambda_2)(1-\lambda_1\bar\lambda_2)a_0)z}{(a+\bar\mu\bar a\lambda_1)(1-|\lambda_2|^2)(a+\lambda_2\bar a\mu)}+$$

$$+\frac{iC(\bar a+\bar\mu a\bar\lambda_2)|a|^2(1-|\mu|^2)(1-|\lambda_1|^2)(1-\lambda_1\bar\lambda_2)z^2}{2(|a+\bar\mu\bar a\lambda_2|^2|a+\bar\mu\bar a\lambda_1|^2-|a\mu+\lambda_2\bar a|^2|a\mu+\lambda_1\bar a|^2)(\lambda_1-\lambda_2)}.\tag{21}$$

Тем самым доказана

Теорема 1. Однородная задача (1)–(2) имеет пять линейно независимых решений. Общее решение можно представить в виде (3), где $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ определяются формулами (20) и (21).

4. Теперь перейдем к исследованию неоднородной задачи (1)–(2). Учитывая прежние обозначения условия, (2) можно представить в виде

$$\mathrm{Re}\Bigg(\Big(\tau+\frac{\lambda_1'}{\tau}\Big)\mu_1(\tau)+\Big(\tau+\frac{\lambda_2'}{\tau}\Big)\mu_2(\tau)+\Big(\frac{1}{\tau}+\bar\lambda_1'\tau\Big)\overline{\mu_1(\lambda_1'\bar\tau)}+$$

$$+\Big(\frac{1}{\tau}+\bar\lambda_2'\tau\Big)\overline{\mu_2(\lambda_2\bar\tau)}\Bigg)=\tilde f_1(\tau),$$

$$\operatorname{Re}\left(\mathrm{i}\Big(\tau-\frac{\lambda_1'}{\tau}\Big)\mu_1(\tau)+\mathrm{i}\Big(\tau-\frac{\lambda_2'}{\tau}\Big)\mu_2(\tau)-\mathrm{i}\Big(\frac{1}{\tau}-\bar\lambda_1'\tau\Big)\overline{\mu_1(\lambda_1'\bar\tau)}-\right.$$

$$\left.-\mathrm{i}\Big(\frac{1}{\tau}-\bar\lambda_2'\tau\Big)\overline{\mu_2(\lambda_2'\bar\tau)}\right)=\tilde f_2(\tau).$$

Из этих равенств получаем

$$\Big(z+\frac{\lambda_1'}{z}\Big)\mu_1(z)+\Big(z+\frac{\lambda_2'}{z}\Big)\mu_2(z)+\Big(\frac{1}{z}+\bar\lambda_1'z\Big)\overline{\mu_1(\lambda_1'\bar z)}+$$

$$+\Big(\frac{1}{z}+\bar\lambda_2'z\Big)\overline{\mu_2(\lambda_2'\bar z)}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_T\tilde f_1(\tau)\frac{\tau+z}{\tau-z}d\tau+\mathrm{i}C_1+Az-\frac{\overline{A}}{z},\tag{22}$$

$$\Big(z-\frac{\lambda_1'}{z}\Big)\mu_1(z)+\Big(z-\frac{\lambda_2'}{z}\Big)\mu_2(z)-\Big(\frac{1}{z}-\bar\lambda_1'z\Big)\overline{\mu_1(\lambda_1'\bar z)}-$$

$$-\Big(\frac{1}{z}-\bar\lambda_2'z\Big)\overline{\mu_2(\lambda_2'\bar z)}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_T(-\mathrm{i}f_2(\tau))\frac{\tau+z}{\tau-z}d\tau+C_2+Bz+\frac{\overline{B}}{z},\tag{23}$$

где C_1, C_2—произвольные действительные постоянные, A, B—произвольные комплексные числа. Складывая равенства (22) и (23), будем иметь

$$\mu_1(z)+\mu_2(z)+\bar\lambda_1'\overline{\mu_1(\lambda_1'\bar z)}+\bar\lambda_2'\overline{\mu_2(\lambda_2'\bar z)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}z}\int\limits_T\frac{\tilde f_1(\tau)-\mathrm{i}f_2(\tau)}{2}\frac{\tau+z}{\tau-z}d\tau+\frac{C_2+\mathrm{i}C_1}{2z}+\frac{A+B}{2}-\frac{\overline{A-B}}{2z^2}.$$

Из этого равенства следует, что $A=B$,

$$C_2+\mathrm{i}C_1=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_T(\tilde f_1(\tau)-\mathrm{i}\tilde f_2(\tau))d\tau.\tag{24}$$

Теперь из (22) и (23), учитывая (24), получаем

$$\mu_1(z)+\mu_2(z)+\bar\lambda_1'\overline{\mu_1(\lambda_1'\bar z)}+\bar\lambda_2'\overline{\mu_2(\lambda_2'\bar z)}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_T(\tilde f_1(\tau)-\mathrm{i}\tilde f_2(\tau))\frac{d\tau}{\tau-z}+A,$$

$$\lambda_1'\mu_1(z)+\lambda_2'\mu_2(z)+\overline{\mu_1(\lambda_1'\bar z)}+\overline{\mu_2(\lambda_2'\bar z)}=\frac{z^2}{2\pi\mathrm{i}}\int\limits_T(\tilde f_1(\tau)+\mathrm{i}\tilde f_2(\tau))\frac{d\tau}{\tau-z}-\overline{A}.\tag{25}$$

Из равенств (25) следует, что

$$A=-\frac{1}{4\pi\mathrm{i}}\int\limits_T(\tilde f_1(\tau)-\mathrm{i}\tilde f_2(\tau))\bar\tau d\tau.\tag{26}$$

Коэффициенты a_0, b_0 можно определить из равенства $a_0+b_0+\bar\lambda_1'\bar a_0+$ $+\bar\lambda_2'\bar b_0=A/2$. Здесь, считая a_0 произвольным, можно определить b_0. Коэффициенты a_1, b_1 можно определить из системы

$$\operatorname{Re}(\lambda_1'a_1+\lambda_2'b_1)=0,$$

$$a_1 + b_1 + \bar{\lambda_1'}^2\bar{a}_1 + \bar{\lambda_2'}^2\bar{b}_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_T (\tilde{f}_1(\tau) - i\tilde{f}_2(\tau))\bar{\tau}^2 d\tau.$$

Остальные коэффициенты a_k, b_k, $k > 1$, можно определить из систем

$$a_k + b_k + \bar{\lambda_1'}^{k+1}\bar{a}_k + \bar{\lambda_2'}^{k+1}\bar{b}_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_T (\tilde{f}_1(\tau) - i\tilde{f}_2(\tau))\bar{\tau}^{k+1} d\tau,$$

$$\lambda_1' a_k + \lambda_2' b_k + \bar{\lambda_1'}^{k}\bar{a}_k + \bar{\lambda_2'}^{k}\bar{b}_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_T (\tilde{f}_1(\tau) + i\tilde{f}_2(\tau))\bar{\tau}^{k-1} d\tau, \qquad (27)$$

$$(k = 1, 2, \dots).$$

Теорема 2. Задача разрешима для любых функций $f_1(t) \in C_0^\alpha(\Gamma)$, $f_2(t) \in C^\alpha(T)$.

Доказательство. Пусть числа a_k, b_k, $(k = 1, 2, \dots)$ удовлетворяют равенствам (27). Достаточно доказать, что функции $\mu_1(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_k z^k + \cdots$, $\mu_2(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_k z^k + \cdots$ принадлежат классу $C^\alpha(\overline{D})$. Систему (27) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1' & \lambda_2' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}_1' & \bar{\lambda}_2' \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ \bar{a}_k \\ \bar{b}_k \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{\lambda_1'}^{k+1} & \bar{\lambda_2'}^{k+1} \\ 0 & 0 & \bar{\lambda_1'}^{k} & \bar{\lambda_2'}^{k} \\ {\lambda_1'}^{k} & {\lambda_2'}^{k} & 0 & 0 \\ {\lambda_1'}^{k+1} & {\lambda_2'}^{k+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ \bar{a}_k \\ \bar{b}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_k \\ D_k \\ \overline{C}_k \\ \overline{D}_k \end{pmatrix}, \qquad (28)$$

где

$$C_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_T (\tilde{f}_1(\tau) - i\tilde{f}_2(\tau))\bar{\tau}^{k+1} d\tau, \quad D_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_T (\tilde{f}_1(\tau) + i\tilde{f}_2(\tau))\bar{\tau}^{k-1} d\tau.$$

Из (27) следует, что числа a_k, b_k равномерно ограничены. Поэтому из (28) имеем

$$a_k = \frac{1}{\lambda_1' - \lambda_2'}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T (\tilde{f}_1(\tau) + i\tilde{f}_2(\tau))\bar{\tau}^{k+1} d\tau - \right.$$

$$\left. - \frac{\lambda_2'}{2\pi i}\int\limits_T (\tilde{f}_1(\tau) - i\tilde{f}_2(\tau))\bar{\tau}^{k+1} d\tau + \tilde{a}_k,\right.$$

где $|\tilde{a}_k| < M \cdot \max\{|\lambda_1'|^k, |\lambda_2|^k\}$ (M =const). Функцию $\mu_1(z)$ можно представить в виде

$$\mu_1(z) = \frac{1}{\lambda_1' - \lambda_2'}\left(\frac{z^2}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\tilde{f}_1(\tau) + i\tilde{f}_2(\tau)}{\tau - z}\tau d\tau - \frac{\lambda_2' z^2}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\tilde{f}_1(\tau) - i\tilde{f}_2(\tau)}{\tau^2(\tau - z)} d\tau + \right.$$

$$\left. + a_0 + a_1 z + \tilde{a}_2 z^2 + \cdots + \tilde{a}_k z^k + \cdots.\right.$$

Так как степенной ряд $a_0 + a_1 z + \tilde{a}_2 z^2 + \cdots + \tilde{a}_k z^k + \cdots$ определяет аналитическую в $\overline{D}$ функцию, а функции

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{\tilde{f}_1(\tau) + i\tilde{f}_2(\tau)}{\tau - z}\tau d\tau, \quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_T \frac{f_1(\tau) - if_2(\tau)}{\tau^2(\tau - z)}d\tau$$

принадлежат классу $C^\alpha(\overline{D})$ (см. [4]) , то заключаем, что функция $\mu_1(z)$ принадлежит классу $C^\alpha(\overline{D})$. Аналогично доказывается, что $\mu_2(z) \in C^\alpha(\overline{D})$. Теорема доказана.

Межвузовский научный центр по прикладным проблемам математики

Поступила 21.12.1990

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бицадзе А.В.** Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка.— М.:Наука, 1966.
2. **Товмасян Н.Е.** Эффективные методы решения задачи Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в областях, ограниченных эллипсами.—Дифф. уравнения, 1969, т.5, N1.
3. **Гарнет Дж.** Ограниченные аналитические функции.—М.:Мир, 1984.
4. **Мусхелишвили Н.И.** Сингулярные интегральные уравнения.—М.:Наука, 1968.

Հ.Մ.ՀԱՅՐԱՊԵՏՅԱՆ

ՌԻՄԱՆԻ ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՈՉ ՃՇԳՐԻՏ ԷԼԻՊՏԻԿ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ԷԼԻՊՍՈՎ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿՎԱԾ ՏԻՐՈՒՅԹՆԵՐՈՒՄ

Ամփոփում

Աշխատանքում հետազոտվում է Ռիմանի տիպի եզրային խնդիր երկրորդ կարգի ոչ ճշգրիտ էլիպտիկ հավասարման համար էլիպսով սահմանափակված տիրույթներում: Հաշվվում է համասեռ խնդրի գծորեն անկախ լուծումների քանակը: Ապացուցվում է նաև, որ անհամասեռ խնդրի լուծման համար անհրաժեշտ և բավարար է մեկ գծորեն անկախ պայման:

H.M. HAIRAPETIAN

RIMAN BOUNDARY VOLUE PROBLEM FOR NONREGULAR ELLIPTIC EQUATION OF SECOND ORDER IN THE DOMAINS LIMITED BY ELLIPSE

Summary

A Riman type problem for second order nonregular elliptic equations has been considered. The number of linearly independent solutions of the homogeneous problem has been calculated. It has been proved also that for the solution of a nonhomogeneous problem one linearly independent condition is necessary and sufficient.