

**ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ**

**Ն. Գ. ԱՀԱՐՈՆՅԱՆ  
Ե. Ռ. ԻՍՐԱԵԼՅԱՆ**

**ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ  
ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴՐԱԳԻՐՔ**

**ԵՐԵՎԱՆ  
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ  
2016**

ՀՏԳ-519.2(076.1)  
ԳՄԳ-22.171g7  
Ա 420

*Հրատարակության և երաշխավորելի  
ԵՊՀ մաթեմատիկայի և մեխանիկայի  
ֆակուլտետի գիտական խորհուրդը*

- Խմբագիր՝** Ֆիզ-մաթ. գիտ. դոկտոր, պրոֆեսոր  
Վ. Կ. ՕՀԱՆՅԱՆ
- Գրախոսներ՝** Ֆիզ-մաթ. գիտ. թեկն., դոցենտ  
Ս. Մ. ՆԱՐԻՍԱՆՅԱՆ  
Ֆիզ-մաթ. գիտ. թեկն., դոցենտ  
Կ. Վ. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ

**Ահարոնյան Ն. Գ., Իսրայելյան Ե. Ռ.**

**Ա 420 Հավանականությունների տեսության խնդրագիրք/ Ն. Գ. Ահարոնյան, Ե. Ռ. Իսրայելյան:** -Եր., 2016, 154 էջ:

Խնդրագիրքը կազմվել է Երևանի պետական համալսարանի մաթեմատիկայի և մեխանիկայի, ինֆորմատիկայի, ֆիզիկայի, ռադիոֆիզիկայի, տնտեսագիտության ֆակուլտետներում դասավանդվող «Հավանականությունների տեսություն» առարկայի ծրագրին համապատասխան: Նախատեսվում է առկա և հեռակա ուսուցման ուսանողների համար:

ՀՏԳ-519.2(076.1)  
ԳՄԳ-22.171g7

ISBN 978-5-8084-2119-6

© ԵՊՀ հրատ., 2016  
© Ն. Գ. Ահարոնյան, 2016  
© Ե. Ռ. Իսրայելյան, 2016

## Խ Մ Բ Ա Գ Ր Ի Կ Ո Ղ Մ Ի Յ

Խնդրագիրքը կազմված է մաթեմատիկայի և մեխանիկայի, ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի, ֆիզիկայի, ռադիոֆիզիկայի, քիմիայի և կիրառական մաթեմատիկայի, ֆիզիկայի, ռադիոֆիզիկայի, քիմիայի, քիմիական տեխնոլոգիաների և նյութագիտության ֆակուլտետներում դասավանդվող «Նավանականությունների պատմություն» առարկայի ծրագրին համապատասխան: Այս խնդրագիրքը պարունակում է տեսական նյութի հակիրճ շարադրանք և 645 խնդիր: Նեղիմակները օգտագործելով իրենց դասախոսական փորձը, խնդիրները բաժանել են Ա և Բ խմբերի՝ հաշվի առնելով քարտեզ ֆակուլտետների պահանջները: Այդ իսկ պարճառով խնդրագիրքը կարող է օգտակար լինել ինչպես ԵՊՆ-ի, այնպես էլ այլ ԲՈՒՆ-երի այն ուսանողների համար, որոնք ուսումնասիրում են «Նավանականությունների պատմություն» առարկան: Խնդրագիրքը պարունակում է խնդիրներ հավանականությունների տեսության ընդհանուր դասընթացի բոլոր բաժիններից: Այս հրատարակման մեջ ի վարբերություն առաջինի (1986) և երկրորդի (1997), ավելացվել է խնդիրների ընդհանուր քանակը: Խնդիրների լուծման համար օգտագործվող մաթեմատիկական ապարապը դուրս չի գալիս մաթեմատիկական անալիզի, հանրահաշվի և անալիտիկ երկրաչափության սրանդար դասընթացների սահմաններից: Խնդրագրքի ձևավորման ընթացքում օգտագործվել են մի շարք խնդրագրքեր և դասագրքեր, մասնավորապես Մեսրոպյան Ն. Խ., Ղազանչյան Տ. Պ., «Նավանականությունների պատմության խնդրագիրք», մաս առաջին և երկրորդ:

Վ. Կ. Օհանյան

## Գործողություններ պատահականության հետ

Նախնականությունների տեսության մեջ ընդունված է հետևյալ մոտեցումը՝ յուրաքանչյուր փորձին համապատասխանության մեջ է դրվում փարրական պատահականության  $\Omega$  բազմություն՝ փորձի բոլոր իրար բացառող ելքերի համախմբությունը:  $\Omega$ -ի ենթաբազմությունների ոչ դատարկ  $\mathcal{F}$  դասը անվանում են  $\sigma$ -հանրահաշիվ, եթե բավարարված են հետևյալ պայմանները՝

1) եթե  $A \in \mathcal{F}$ , ապա  $\bar{A} \in \mathcal{F}$ , որտեղ  $\bar{A} = \Omega \setminus A$ ,

2) եթե  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$ , ապա  $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ :

Տվյալ փորձի հետ կապված պատահականությունը  $\Omega$  փարրական պատահականության բազմության ենթաբազմություններ են, որոնք պարկանում են  $\mathcal{F}$ -ին: Այսուհետ պատահականություն կանվանենք միայն  $\mathcal{F}$ -ի փարրերը: Պատահականությունը նշանակում են  $A, B, C, \dots$  փառերով: Ակնհայտ է, որ  $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$ :  $\Omega$  պատահականություն անվանում են հավասարի պատահականություն,  $\emptyset$  պատահականություն անվանում են անհնար պատահականություն:  $A$  պատահականություն է  $B$  պատահականության մասնավոր դեպք ( $A \subset B$ ), եթե  $A$  պատահականության հանդես գալուց հետևում է  $B$  պատահականության հանդես գալը: Մասնավորապես,  $A \subset A$  և  $\emptyset \subset A$  ցանկացած  $A$ -ի համար:  $A$  և  $B$  պատահականությունները համընկնում են, եթե  $A \subset B$  և  $B \subset A$ :  $A$  և  $B$  պատահականությունների  $A \cup B$  միավորումը այնպիսի պատահականություն է, որը տեղի է ունենում, երբ հանդես է գալիս  $A$  և  $B$  պատահականություններից գոնե մեկը:  $A$  և  $B$  պատահականությունների  $A \cap B$  հատումը պատահականություն է, որը տեղի է ունենում, երբ  $A$ -ն և  $B$ -ն հանդես են գալիս համարեղ:  $A$  և  $B$  պատահականությունների  $A \setminus B$  փարբերությունը պատահականություն է, որը տեղի է ունենում, երբ տեղի է ունենում  $A$ -ն, բայց տեղի չի ունենում  $B$ -ն:  $A$  և  $B$  պատահականությունների  $A \Delta B$  սիմետրիկ փարբերությունը սահմանվում է որպես  $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ :  $A$  և  $B$  պատահականությունները կոչվում են անհամարեղելի, եթե  $A \cap B = \emptyset$ :  $A_1, A_2, \dots, A_n$  պատահականությունները կազմում են լրիվ խումբ, եթե  $A_i \cap A_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$  և  $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$ :  $A$  և  $\bar{A}$  կոչվում են հակադիր պատահականություններ, եթե  $A \cup \bar{A} = \Omega$ ,  $A \cap \bar{A} = \emptyset$ :

$A$  պատահականության  $P(A)$  հավանականությունը թվային ֆունկցիա է, որը որոշված է  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -հանրահաշիվի վրա և բավարարում է հետևյալ աքսիոմ-

ներին՝

$$1) P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{F},$$

$$2) P(\Omega) = 1,$$

3) եթե  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  պատահույթները զույգ առ զույգ անհամաբերելի են՝  $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ , ապա  $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ :

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$  եռյակն անվանում են հավանականային փարաձույթուն:

## Ա

1. Մեփաղաղրամը նեփվում է երկու անգամ: Նկարագրել փարրական պատահույթների բազմությունը: Նկարագրել հեփևյալ պատահույթները՝  $A$  - գոնե մեկ անգամ կերևա գերբը,

$B$  - գերբը կերևա երկրորդ նեփման ժամանակ:

2. Զառը նեփում են երկու անգամ: Նկարագրել փարրական պատահույթների բազմությունը: Նկարագրել հեփևյալ պատահույթները՝

$A$  - երևացող միավորների գումարը հավասար է «8»-ի,

$B$  - գոնե մեկ անգամ կերևա «6»-ը:

3. Մեփաղաղրամը նեփվում է այնքան անգամ, մինչև երևա գերբը: Նկարագրել հեփևյալ պատահույթները՝

$A$  - գոնե մեկ անգամ կերևա գիրը,

$B$  - գերբը կերևա երրորդ նեփման դեպքում:

4. Մեփաղաղրամը նեփվում է այնքան անգամ, մինչև նույն կողմը իրար եփևից երևա երկու անգամ: Նկարագրել հեփևյալ պատահույթները՝

$A$  - կափարել են ճիշտ 5 նեփում,

$B$  - գիրը կերևա ոչ ավել, քան 4 անգամ:

5. Խանույթը աշխատում է ժամը 9-ից մինչև 18-ը: Պատահական գնորդը մփնում է խանույթ ժամանակի  $x$  պահին և հեռանում է խանույթից ժամանակի  $y$  պահին: Նկարագրել  $(x, y)$  փարրական պատահույթների բազմությունը:  $x$ -ի և  $y$ -ի փերմիններով նկարագրել հեփևյալ պատահույթները՝

- ա) գնորդը գտնվում է խանութում մեկ ժամից ոչ ավելի,  
բ) ժամանակի  $z$  պահին գնորդը գտնվում է խանութում:

6.  $1, 2, \dots, n$  թվերից պատահականորեն վերցրած է մեկ թիվ: Դիցուք  $A$  պատահույթը՝ ընտրված թիվը բաժանվում է երեքի,  $B$  պատահույթը՝ ընտրված թիվը զույգ է: Ի՞նչ են նշանակում  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$  պատահույթները:

7.  $1, 2, \dots, n$  թվերից պատահականորեն ընտրված է մեկ թիվ: Դիցուք  $A$  պատահույթը՝ ընտրված թիվը բաժանվում է հինգի,  $B$  պատահույթը՝ ընտրված թիվը ավարտվում է զրոյով: Ի՞նչ են նշանակում  $A \setminus B$  և  $A \cap \bar{B}$  պատահույթները:

8. Ներում են երկու զառ: Դիցուք  $A$  պատահույթը՝ երևացող միավորների գումարը կենս է,  $B$  -ն՝ առնվազն մեկ զառի վրա կերևա «1»-ը: Նկարագրել  $A \cap B$ ,  $A \cup B$  պատահույթները:

9. Ապացուցել, որ  $A \supset B$  դեպքում տեղի կունենան՝  
ա)  $\bar{A} \subset \bar{B}$ , բ)  $A \cap B = B$ , գ)  $A \cup B = A$ :

10. Ապացուցել հավասարությունները՝

$$\text{ա) } \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \bar{A}_i$$

$$\text{բ) } \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i$$

որտեղ  $I$ -ն ինդեքսների կամայական բազմություն է:

11. Գտնել  $x$  պատահույթը  $\overline{(x \cup A) \cup (x \cup \bar{A})} = B$  հավասարումից:

12. Ապացուցել, որ  $A$ ,  $\bar{A} \cap B$ ,  $\overline{A \cup B}$  պատահույթները կազմում են լրիվ խումբ:

13. Բերել օրինակներ՝

1) երեք պատահույթների, որոնք, լինելով հավասարահնարավոր և անհամարեղելի, չեն կազմում պատահույթների լրիվ խումբ,

2) չորս պատահույթների, որոնք, չլինելով հավասարահնարավոր, կազմում են լրիվ խումբ:

14. Երկու պարահույթների  $A \cup B$  միավորումը արտահայտել անհամարեղելի պարահույթների միավորման միջոցով:

Երեք պարահույթների  $A \cup B \cup C$  միավորումը արտահայտել անհամարեղելի պարահույթների միավորման միջոցով:

15. Նշել հետևյալ պարահույթների հակադիրները՝

ա)  $A$  – մերադադրամի երկու ներումների դեպքում կերևա գերբը,

բ)  $B$  – երեք կրակոցների դեպքում նշանին կդիպչեն երեք անգամ,

գ)  $C$  – երեք կրակոցների դեպքում նշանին կդիպչեն գոնե մեկ ան-

գամ:

16. Թիրախին կրակում են երեք անգամ: Դիցուք  $A_i$ -ն ( $i = 1, 2, 3$ ) պարահույթն է, երբ  $i$ -րդ կրակոցը դիպուկ է: Նկարագրել  $A_i$  պարահույթներով հետևյալ պարահույթները՝

ա)  $A$  – թիրախին կդիպչեն երեք անգամ,

բ)  $B$  – թիրախին ոչ մի անգամ չեն դիպչի,

գ)  $C$  – թիրախին կդիպչեն միայն մեկ անգամ,

դ)  $D$  – թիրախին կդիպչեն առնվազն երկու անգամ:

17. Սարքը բաղկացած է առաջին փիպի երկու և երկրորդ փիպի երեք մասերից: Դիտարկենք հետևյալ պարահույթները՝  $A_k$  ( $k = 1, 2$ ) – առաջին փիպի  $k$ -րդ մասը և  $B_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) – երկրորդ փիպի  $j$ -րդ մասը աշխատունակ է: Սարքը անխափան է, եթե աշխատունակ են առաջին փիպի մասերից գոնե մեկը և երկրորդ փիպի մասերից գոնե երկուսը: Նկարագրել  $A_k$  և  $B_j$  պարահույթների միջոցով սարքի անխափան լինելու  $C$  պարահույթը:

18. Դիցուք  $\Omega = R^2$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}_2$ ,  $A = \{(x, y) : x + y \leq 1\}$ ,  $B = \{(x, y) : y \leq 2x + 2\}$ : Նկարագրել  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \setminus B$ ,  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{A} \cap \bar{B}$  պարահույթները:

19. Դիցուք  $\Omega = R^1$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}_1$ ,  $A_n = (\frac{1}{2n}, \frac{1}{n})$ : Նկարագրել  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ ,  $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  պարահույթները:

## Բ

20. Դիցուք  $A_n \in \mathcal{F}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ : Ապացուցել, որ  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ , որպեսզի  $B_1 = A_1$ ,  $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$  և  $B_j$  պապահույթները անհամարելի են:

21. Ապացուցել, որ

ա)  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ ,

բ)  $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ ,

գ)  $A \Delta \emptyset = A$ ,  $A \Delta \Omega = \bar{A}$ ,

դ)  $A \Delta A = \emptyset$ ,  $A \Delta \bar{A} = \Omega$ :

22. Դիցուք  $A_n \in \mathcal{F}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $A^*$ -ը այն և միայն այն  $\omega$  փարբերի բազմությունն է, որոնք պատկանում են անվերջ թվով  $A_n$  պապահույթներին:  $A_*$  -ը այն և միայն այն  $\omega$  փարբերի բազմությունն է, որոնք պատկանում են բոլոր պապահույթներին, բացառությամբ վերջավոր թվով պապահույթների: Ապացուցել, որ

ա)  $A_n \subset A^*$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,    բ)  $A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$ ,

գ)  $A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$  :

**Դիփոդություն.**  $A^* = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$   $\{A_n\}$  հաջորդականության վերին սահմանն է,  $A_* = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$  հաջորդականության ստորին սահմանն է: Կասենք, որ  $\{A_n\}$  հաջորդականությունն անհամար է, եթե  $A_* = A^*$ :

23. Դիցուք

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{եթե } \omega \notin A \\ 1, & \text{եթե } \omega \in A \end{cases}$$

$I_A(\omega)$ -ն կոչվում է  $A$  բազմության ինդիկատոր ֆունկցիա: Ապացուցել, որ

ա)  $I_{A \cap B}(\omega) = I_A(\omega) \cdot I_B(\omega)$ ,



- բ)  $I_{A \cup B}(\omega) = I_A(\omega) + I_B(\omega) - I_A(\omega) \cdot I_B(\omega),$   
 գ)  $I_{\bar{A}}(\omega) = 1 - I_A(\omega),$   
 դ)  $I_{A \setminus B}(\omega) = I_A(\omega)[1 - I_B(\omega)],$   
 ե)  $I_{A \Delta B}(\omega) = |I_A(\omega) - I_B(\omega)|$   
 զ)  $I_{A \Delta B}(\omega) = [I_A(\omega) + I_B(\omega)](\text{mod } 2),$

որտեղ  $a(\text{mod } 2) = \begin{cases} 0, & \text{եթե } a\text{-ն զույգ է,} \\ 1, & \text{եթե } a\text{-ն կենսի է:} \end{cases}$

24. Դիցուք

$$A_n = \begin{cases} A, & \text{եթե } n - \text{ը զույգ է} \\ B, & \text{եթե } n - \text{ը կենսի է:} \end{cases}$$

Ապացուցել, որ  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = A \cup B, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = A \cap B:$

25. Դիցուք  $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \dots$  և բոլոր  $n$ -երի համար  $A_n \subset A_{n+1}$ : Ապացուցել, որ  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n:$

26. Դիցուք  $A_n \in \mathcal{F}, n = 1, 2, \dots$  և բոլոր  $n$ -երի համար  $A_n \supset A_{n+1}$ : Ապացուցել, որ  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n:$

### Տամակցություն (Կոմբինատորիկա)

1. **Տամակցության հիմնական սկզբունք** (բազմապատկման սկզբունք): Դիցուք անհրաժեշտ է հաջորդաբար կապարել  $k$  գործողություն: Եթե առաջին գործողությունը կարելի է կապարել  $n_1$  փարբեր ձևերով, այնուհետև երկրորդը՝  $n_2$ , իսկ երրորդը՝  $n_3$  ձևերով և այլն, մինչև  $k$ -րդ գործողությունը, որը կարելի է կապարել  $n_k$  փարբեր ձևերով, ապա բոլոր  $k$  գործողությունները կարելի է կապարել  $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$  փարբեր ձևերով:

Դիցուք ունենք  $n$  փարբերից բաղկացած համախմբություն:

2. **Կարգավորություն  $n$ -ից  $k$ -ական**՝ այնպիսի միացություններ են, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է  $n$  փարբերից վերցրած  $k$  փարբ

և որոնք փարբերվում են միմյանցից կամ զոնե մեկ փարբով, կամ դրանց դասավորությամբ, ընդ որում առանձին միացություններում յուրաքանչ-յուր փարբ մասնակցում է ոչ ավելի, քան մեկ անգամ:  $n$ -ից  $k$ -ական կարգավորությունների թիվը նշանակվում է  $A_n^k$ -ով և հավասար է

$$A_n^k = n(n-1) \cdots (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

(կարգավորված և անվերադարձ ընտրություն):

3.  **$n$  փարբերից փեղափոխությունները** այնպիսի միացություններ են, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է  $n$  փարբ, որոնք միմյանցից փարբերվում են միայն փարբերի դասավորությամբ:  $n$  փարբերից փեղափոխությունների թիվը նշանակվում է  $\mathcal{P}_n$  -ով և հավասար է

$$\mathcal{P}_n = A_n^n = n!$$

4. **Ջուգորդություններ  $n$ -ից  $k$ -ական** այնպիսի միացություններ են, որոնցից յուրաքանչյուրը պարունակում է փվյալ  $n$  փարբերից վերցրած  $k$  փարբ և որոնք փարբերվում են միմյանցից զոնե մեկ փարբով, ընդ որում առանձին միացություններում յուրաքանչյուր փարբ մասնակցում է ոչ ավելի, քան մեկ անգամ:  $n$ -ից  $k$ -ական Ջուգորդությունների թիվը նշանակվում է  $C_n^k$ -ով և հավասար է

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

(ոչ կարգավորված և անվերադարձ ընտրություն):

### 5. Կարգավորված և վերադարձումով ընտրություն`

$$\underbrace{n \cdot n \cdots n}_k = n^k :$$

### 6. Ոչ կարգավորված և վերադարձումով ընտրություն`

$$C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^k :$$

## Ա

27. Սարի գագաթ կարելի է հասնել 7 ուղիներով: Քանի՞ փարբեր ձևերով լեռնագնացը կարող է բարձրանալ և իջնել սարից: Լուծել խնդիրը, եթե վերելքը և վայրէջքը կատարվում են փարբեր ուղիներով:

28. Դասարանում անցնում են 10 առարկա: Երկուշաբթի օրը 6 դաս է, ընդ որում բոլոր դասերը փարբեր են: Քանի՞ փարբեր ձևերով կարելի է կազմել դասացուցակը երկուշաբթի օրվա համար:

29. Ուսանողը պետք է 8 օրվա ընթացքում հանձնի 4 քննություն: Քանի՞ փարբեր ձևերով կարելի է դա իրականացնել, եթե մեկ օրում կարելի է հանձնել միայն մեկ քննություն:

30. Քանի՞ անկյունագիծ ունի ուռուցիկ  $n$  անկյունին:

31. Քանի՞ ձևով կարելի է դասավորել շախմատի փախսակի վրա 8 նավակ, որպեսզի նրանք չկարողանան հարվածել միմյանց:

32. Գտնել  $n$  փարբերից այնպիսի փեղափոխությունների թիվը, որպեղ փվյալ 2 փարբեր չեն գտնվում իրար մոտ:

33. Պարոն Ջոնսը ունի 10 գիրք, որոնք նա պատրաստվում է փեղափոխել իր գրադարակում: Դրանցից 4-ը մաթեմատիկական գրքեր են, 3-ը վերաբերվում են քիմիային, 2-ը՝ պատմությանը, իսկ 1-ը՝ անգլերեն լեզվին: Ջոնսը ցանկանում է դասավորել իր գրքերը այնպես, որ նույն առարկային վերաբերվող գրքերը դրված լինեն միասին: Քանի փարբեր դասավորություններ են հնարավոր:

34. Ինչ-որ քաղաքի ոստիկանության բաժնում աշխատում է 10 սպա: Եթե ոստիկանական վարչությունը 5 սպաների պետք է ուղարկի փողոցները հսկելու, 2-ը պետք է աշխատեն լրիվ դրույքով կայանում, իսկ 3-ը՝ պահուստային կայանում, քանի՞ փարբեր հնարավորություններ կան 10 սպաներին 3 խմբերի բաժանելու համար:

## Բ

35. Որոշել ուռուցիկ  $n$ -անկյան անկյունագծերի հաքման կեքերի քանակը, եթե դրանցից յուրաքանչյուր երեքը չեն հաքվում նույն կեքում:

36. Տանձնաժողովը բաղկացած է 11 հոգուց: Փասքաթղթերը, որոնք ուղ կեքը է գբաղվի հանձնաժողովը, գքնվում են պահարանում: Քանի՞ փական կեքը է ունենա պահարանը և քանի բանալի կեքը է ունենա հանձնաժողովի յուրաքանչյուր անդամ, որկեսզի հնարավոր լինի բացել պահարանը այն և սիայն այն դեպքում, երբ ներկա կլինի հանձնաժողովի անդամների մեծամասնությունը:

37.  $n$  միանման գնդիկները քեղավորում են  $N$  սափորների մեջ: Ապացուցել, որ

ա) քարբեր քեղավորումների թիվը հավասար է  $C_{N+n-1}^n = C_{N+n-1}^{N-1}$ ,

բ) քեղավորումների թիվը, երբ յուրաքանչյուր սափորը կպարունակի առնվազն մեկ գնդիկ, հավասար է  $C_{n-1}^{N-1}$ :

38. Քանի՞ քարբեր ձևերով կարելի է բաշխել  $N$  երեխաների միջև  $n$  միանման նվեր: Գքնել այն եղանակների թիվը, երբ յուրաքանչյուր երեխա կսքրանա առնվազն մեկ նվեր:

39. Քանի՞ քարբեր ձևերով հնարավոր է ընքրել 6 կարկանդակ, եթե հրուշակարանում կան 11 քարբեր քեսակի կարկանդակներ:

40. ա) Քանի՞ ամբողջ ոչ բացասական լուծում ունի

$$x_1 + x_2 + \dots + x_N = n$$

հավասարումը:

բ) Քանի՞ ամբողջ դրական լուծում ունի

$$x_1 + x_2 + \dots + x_N = n$$

հավասարումը:

41. Դիցուք ունենք  $N$  փոփոխականներից  $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$  ֆունկցիա: Քանի՞ փարբեր  $n$ -րդ կարգի մասնակի ածանցյալներ ունի այդ ֆունկցիան:

42. 10 մարդկանցից բաղկացած ակումբից, որոնց թվում են  $A, B, C, D, E$ -ն և  $F$ -ը, հարկավոր է ընտրել նախագահ, գանձապահ և քարտուղար: Ոչ մեկը չի կարող ունենալ մեկից ավելի պաշտոն: Պետական պաշտոնյաների քանի՞ փարբեր ընտրություններ են հնարավոր, եթե

- ա) ոչ մի սահմանափակում չկա,
- բ)  $A$ -ն և  $B$ -ն չեն ընտրվի միասին,
- գ)  $C$ -ն և  $D$ -ն կամ միասին կընտրվեն, կամ չեն ընտրվի,
- դ)  $E$ -ն կլինի պաշտոնյա,
- ե)  $F$ -ը համաձայն է աշխատել միայն նախագահի պաշտոնում:

### Նավանականության դասական սահմանումը

Դիցուք  $\Omega$  փարածությունը բաղկացած է  $n$  հավասարահնարավոր փարրական պարահույթներից՝  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ : Ցանկացած  $A \subset \Omega$ ,  $A = \{\omega_{i_1}, \omega_{i_2}, \dots, \omega_{i_k}\}$ ,  $k \leq n$  պարահույթի հավանականությունը հավասար է

$$P(A) = \frac{k}{n} :$$

### Ա

43. Մեփաղաղրամը ներվում է երկու անգամ: Ինչպիսի՞ն է գերբի գոնե մեկ անգամ երևալու հավանականությունը:

44. Ներում են երկու զառ: Գտնել հերևյալ պարահույթների հավանականությունները՝

- ա) զառերի վրա կերևան միևնույն քանակի միավորներ,
- բ) զառերի վրա կերևան փարբեր քանակի միավորներ:

45. Նռախոսահամարը բաղկացած է 6 թվանշանից: Գտնել բոլոր թվանշանների փարբեր լինելու հավանականությունը:

46. Ութ հարկանի շենքի վերելակն են մտնում առաջին հարկում 5 հոգի: Ենթադրենք, որ նրանցից յուրաքանչյուրը հավասար հավանականությամբ կարող է դուրս գալ ցանկացած հարկում, սկսած երկրորդ հարկից: Գտնել հեփեսյալ պարահույթների հավանականությունները՝

- ա) բոլորը դուրս կգան միևնույն հարկում,
- բ) բոլորը դուրս կգան տարբեր հարկերում:

47.  $k$  հրանոթից բաղկացած մարտկոցը կրակ է բացել  $l$  ինքնաթիռներից բաղկացած խմբի վրա ( $k \leq l$ ): Տրանոթներից յուրաքանչյուրն իր նպատակակետի ընտրությունը կատարում է պարահականորեն, անկախ մյուսներից: Գտնել հեփեսյալ պարահույթների հավանականությունը՝

- ա) բոլոր  $k$  հրանոթները ընտրել են միևնույն նպատակակետը,
- բ) հրանոթներն ընտրել են տարբեր նպատակակետեր:

48. 1, 2, 3, 4, 5 թվերը գրված են 5 քարտերի վրա: Պարահականորեն հաջորդաբար հանում են երեք քարտ և հանված թվերը դասավորում են ձախից աջ: Ինչպիսի՞ն է ստացված թվի ա) գույգ, բ) կենտ լինելու հավանականությունը:

49. Առանձին քարտերի վրա գրված են 1, 2, 3, ..., 9 թվերը: Բոլոր քարտերը խառնելուց հետո պարահականորեն հաջորդաբար հանում են նրանցից չորսը և դասավորում մեկը մյուսի հետևից: Ինչպիսի՞ն է ստացված թվի ա) գույգ, բ) 1 2 3 4 լինելու հավանականությունը:

50. Արկղը պարունակում է 15 դեփալ, որոնցից 10-ը ներկված են: Բանվորը պարահական վերցնում է նրանցից 3-ը: Գտնել բոլոր վերցրած դեփալների ներկված լինելու հավանականությունը:

51. Սափորը պարունակում է  $a$  սպիտակ և  $b$  սև գնդիկներ: Սափորից միանգամից հանում են երկու գնդիկ: Որոշել այդ երկու գնդիկների սպիտակ լինելու հավանականությունը:

52.  $N$  դեփալներից բաղկացած խմբաքանակը գտնվում է հսկիչի մոտ, որը պարահականորեն ընտրում է  $n$  դեփալ և որոշում դրանց

որակը: Եթե ընտրած դեֆալներից ոչ մեկը խտրանված չէ, ապա ամբողջ խմբաքանակը ընդունվում է: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ հսկիչը կընդունի  $k$  խտրանված դեֆալ պարունակող խմբաքանակը:

53. 20 ուսանողներից բաղկացած խմբում կա 6 գերազանցիկ: Գտնել պարահականորեն ընտրած 9 ուսանողներից 4 - ի գերազանցիկ լինելու հավանականությունը:

54. Շախմատի մրցմանը մասնակցում է 20 հոգի, որոնք վիճակահանությամբ բաժանվում են 10 հոգուց բաղկացած երկու խմբի: Գտնել հեյսելյալ պարահայտյանների հավանականությունները՝

ա) երկու ամենաուժեղ խաղացողները կբաշխվեն փարբեր խմբերի մեջ,

բ) չորս ամենաուժեղ խաղացողները կբաշխվեն երկուական փարբեր խմբերի մեջ:

55. Խաղաթղթերի կապուկը պարահականորեն բաժանվում է երկու հավասար մասերի: Որոշել յուրաքանչյուր մասում երկուական մեկանոց լինելու հավանականությունը:

56.  $N$  արտադրանքներից բաղկացած խմբաքանակը պարունակում է  $M$  խտրանված արտադրանք: Այդ խմբաքանակից պարահականորեն վերցնում են  $n$  ( $n \leq N$ ) արտադրանք: Ինչի՞ է հավասար դրանց մեջ  $m$  ( $m \leq M$ ) խտրանված արտադրանքներ լինելու հավանականությունը:

57. 1 - 49 թվերից պարահական նշվում են 6 փարբեր թվեր: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ վիճակախաղի ժամանակ հանված 6 թվերի մեջ կգտնվեն նշված թվերից գոնե 3-ը:

58. Խաղարկվում է վիճակախաղի  $n$  փոմս, որոնցից  $m$ -ը շահող է: Ինչպիսի՞ն է շահելու հավանականությունը  $r$  ( $r < m$ ) փոմս ձեռք բերողի համար:

59. Մեքենաների 12 կանգառները դասավորված են մեկ շարքով: Նկատվեց, որ կանգառներից ութը զբաղեցված է, իսկ չորս ազատ փեղերը

հեղինակը են մեկը մյուսին (կազմում են սերիա): Գտնել այդպիսի դասավորության հավանականությունը:

60. Կանգառին մոտեցող մեքենան զբաղեցնում է շարքի  $N$  տեղերից մեկը (ոչ ծայրամասային): Վերադառնալիս մեքենայի տերը նկատում է, որ  $N$  տեղերից  $r$  - ը դեռ զբաղեցված է: Գտնել երկու հարևան տեղերի ազատ լինելու հավանականությունը:

61. Ներված է 10 զառ: Գտնել հետևյալ պարահայտների հավանականությունները՝ ա) ոչ մի զառի վրա չի բացվել «6», բ) «6» բացվել է ճիշտ 3 զառի վրա:

62. 1, 2, 3, . . . , 29, 30 թվերից պարահական նշվում են 10 փարբեր թվեր: Գտնել հետևյալ պարահայտների հավանականությունները՝  
 ա) բոլոր ընտրված թվերը կենտ են,  
 բ) ընտրված թվերից ուղիղ 5-ը բաժանվում են 3-ի,  
 գ) ընտրված թվերից 5-ը գույգ են, 5-ը՝ կենտ, ընդ որում դրանցից ճիշտ մեկը բաժանվում է 10-ի:

63. Ինչպիսի՞ հավանականությամբ պարահականորեն վերցրած ավտոմեքենայի քառանիշ համարի՝  
 ա) բոլոր թվերը կլինեն փարբեր,  
 բ) թվերից միայն երկուսը կհամընկնեն,  
 գ) թվերը կկազմեն համընկնող թվերից բաղկացած երկու գույգ,  
 դ) թվերից երեքը կհամընկնեն,  
 ե) բոլոր թվերը կհամընկնեն:

64. 0, 1, 2 թվերից բաղկացած  $n$  երկարություն ունեցող բոլոր հաջորդականությունների բազմությունից պարահականորեն ընտրվում է մեկը: Գտնել հետևյալ պարահայտների հավանականությունները՝  
 ա) հաջորդականությունը սկսվում է զրոյով,  
 բ) հաջորդականությունը պարունակում է ուղիղ  $m + 2$  զրոներ, ընդ որում դրանցից երկուսը գտնվում են հաջորդականության ծայրերում,  
 գ) հաջորդականությունը պարունակում է ուղիղ  $m$  միավոր,  
 դ) հաջորդականությունը պարունակում է ուղիղ  $m_0$  հապ «0»,  $m_1$  հապ «1»,  $m_2$  հապ «2»:



65. Դահլիճում կա  $n + k$  նստարան, մարդիկ պարահականորեն զբաղեցնում են  $n$  փեղ: Գտնել հավանականությունը, որ կզբաղեցվի որոշակի ճիշտ  $m$  ( $m \leq n$ ) փեղ:

66. Ունենք դասավորված 52 խաղաթղթերի կապուկ: Գտնել հավանականությունը, որ

- ա) առաջին չորս խաղաթղթերը կլինեն մեկանոց,
- բ) առաջին և վերջին խաղաթղթերը մեկանոց են,
- գ) մեկանոցների միջև կա ճիշտ  $l$  խաղաթուղթ:

67. 52 խաղաթղթերից կազմված կապուկը հավասար բաժանվում է 4 խաղացողների միջև: Գտնել հավանականությունը, որ

- ա) յուրաքանչյուր խաղացողի մոտ կլինի մեկանոց,
- բ) խաղացողներից մեկի մոտ բոլոր 13 խաղաթղթերը կլինեն նույն փեսակի,
- գ) յուրաքանչյուր խաղացողի մոտ կլինեն բոլոր խաղաթղթերից՝ երկուսից մինչև մեկանոց:

68. 15 դասագիրք պարահական կարգով դասավորված են դարակի վրա, ընդ որում դրանցից 5-ը կազմով են: Աշակերտը պարահականորեն վերցնում է դրանցից 3-ը: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ վերցրած զրքերից գոնե մեկը կազմով է:

69. Նեփում են 3 զառ: Գտնել «6»-ի գոնե մեկ անգամ երևալու հավանականությունը:

70. Արկղը պարունակում է 8 կարմիր, 10 կանաչ, 12 կապույտ գնդիկներ: Պարահականորեն հանում են նրանցից երեքը: Գտնել հանված գնդիկներից գոնե երկուսի նույն գույնի լինելու հավանականությունը:

71. 9 ուղևոր նստում է 3 վագոնից բաղկացած գնացք: Յուրաքանչյուր ուղևոր պարահական ընտրում է վագոններից մեկը: Գտնել հետևյալ պարահայտների հավանականությունները՝

- ա) բոլորը կընտրեն առաջին վագոնը,
- բ) բոլորը կընտրեն միևնույն վագոնը,

- գ) ուղևորներից գոնե մեկը կընտրի առաջին վագոնը,
- դ) յուրաքանչյուր վագոն կբարձրանա 3 ուղևոր:

72. Գտնել 12 անձերի ծննդյան օրերի փարվա փարբեր ամիսներում լինելու հավանականությունը:

73. Քառակուսին հորիզոնական գծերով բաժանված է  $n$  միանման շերտերի: Դրանցից յուրաքանչյուրի վրա պարահականորեն նշվում է մի կետ, որի դիրքը հավասարահեռավոր է շերտի ցանկացած փեղում: Այնուհետև այդ քառակուսին բաժանվում է  $n - 1$  ուղղաձիգ գծերով: Գտնել յուրաքանչյուր ուղղաձիգ շերտում մեկական կետ գտնվելու հավանականությունը:

74. Սափորից, որը պարունակում է 2 սպիտակ և 4 սև գնդիկներ իրար հետևից հանում են բոլոր գնդիկները: Գտնել հետևյալ պարահույթների հավանականությունները՝

- ա) առաջին հանված գնդիկը սպիտակ է,
- բ) երկրորդ հանված գնդիկը սպիտակ է,
- գ) վերջին հանված գնդիկը սպիտակ է:

75. Վիճակախաղի 7 փոմսերից երկուսը շահող են: 7 հոգի հաջորդաբար վերցնում են մեկական փոմս: Կախված կլինի՞ արդյոք շահելու հավանականությունը հերթի համարից:

76.  $n$  ընկերներ պարահականորեն նստում են կլոր սեղանի շուրջը: Գտնել հետևյալ պարահույթների հավանականությունները՝

- ա) որոշակի երկուսը՝  $A$ -ն և  $B$ -ն, նստած են կողք-կողքի,
- բ)  $A$ -ն նստած է  $B$ -ից ձախ,
- գ) որոշակի երեքը՝  $A$ -ն,  $B$ -ն և  $C$ -ն նստած են կողք-կողքի,
- դ)  $A$ -ն նստած է  $B$ -ից աջ, իսկ  $C$ -ն՝  $B$ -ից ձախ:

77. Գտնել նախորդ խնդրի պարահույթների հավանականությունները, եթե ընկերները նստած են շարքով մեկ նստարանին:

78. Դարակում պարահական հերթականությամբ դասավորված է 40 գիրք, որոնց թվում նաև Ս. Զորյանի երեք հատորները: Գտնել հետևյալ պարահույթների հավանականությունները՝

- ա) Ս. Զորյանի հատորները դասավորված են իրար մոտ,
- բ) Ս. Զորյանի հատորները դասավորված են իրար մոտ համարների աճման կարգով,
- գ) Ս. Զորյանի հատորները դասավորված են համարների աճման կարգով (պարտադիր չէ իրար մոտ),
- դ) հատորների զբաղեցրած փեղերը կազմում են թվաբանական պրոգրեսիա, որի փարբերությունը հավասար է 7-ի:

79. Ենթադրենք դուք մոռացել եք Ձեզ հարկավոր հեռախոսի համարի մեկ թվանշանը և հավաքում եք այն պարահականորեն: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ դուք ստիպված կլինեք անել ոչ ավելի քան երկու կանչ:

80. 20 երեխա (10 փղա և 10 աղջիկ) պարահականորեն խմբավորվում են զույգերով: Գտնել 10 զույգերից յուրաքանչյուրի փարբեր սեռի երեխաներից բաղկացած լինելու հավանականությունը:

81. 5 փղամարդ և 10 կին համախմբվում են երեքական: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ ստացված 5 խմբերից յուրաքանչյուրում կլինի մեկ փղամարդ:

82. Դիցուք նետում են երկու զառ: Գտնել հավանականությունը, որ զառերի վրա բացված միավորների գումարը հավասար է  $i$ -ի,  $i = 2, 3, \dots, 11, 12$ :

83. Անփառում ապրում է 20 հյուսիսային եղջերու, որոնցից հինգին որսացել, պիտակավորել, ապա ազար են արձակել: Որոշ ժամանակ անց այդ 20 եղջերուներից 4-ին որսում են: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ դրանցից 2-ը պիտակավորված են եղել:

84. Առկա է  $n$  բանալի, որոնցից մեկն է համապարասխանում կողպեքին: Ինչպիսի հավանականությամբ կարելի է բացել դուռը  $k$ -րդ փորձում, եթե

- ա) պարահականորեն վերցված բանալին չի մասնակցում հաջորդ փորձերին,

բ) արդեն փորձված բանալին կարող է նորից մասնակցել հաջորդ փորձերին:

## Բ

85.  $k$  մասնիկները պարահականորեն բաշխվում են  $n$  բջիջների մեջ ( $k \leq n$ ): Գտնել հետևյալ պարահայտների հավանականությունները՝  
 ա) որոշակի  $k$  բջիջներում կհայտնաբերվի մեկական մասնիկ,  
 բ)  $k$  բջիջներում կհայտնաբերվի մեկական մասնիկ:

Խնդիրը լուծել հետևյալ պայմանների դեպքում՝

1) մասնիկները փարբերվում են, մեկ բջջում ընկած մասնիկների թիվը չի սահմանափակվում,

2) մասնիկները չեն փարբերվում, մեկ բջջի մեջ ընկած մասնիկների թիվը չի սահմանափակվում,

3) մասնիկները փարբերվում են, յուրաքանչյուր բջջի մեջ կարող է ընկնել մեկից ոչ ավելի մասնիկ,

4) մասնիկները չեն փարբերվում, յուրաքանչյուր բջջի մեջ կարող է ընկնել մեկից ոչ ավելի մասնիկ:

86.  $n$  ուսանող, որոնց թվում են  $A$ -ն և  $B$ -ն, պարահականորեն շարք են կանգնում: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ  $A$ -ի և  $B$ -ի միջև կլինի ճիշտ  $r$  ուսանող: Ցույց փայլ, որ եթե  $n$  ուսանողներ շրջան կազմեն, ապա այդ հավանականությունը կլինի  $r$ -ից անկախ և հավասար  $\frac{2}{n-1}$ :

87. Ինչպիսի՞ հավանականությամբ  $r$  գնդակներ կարելի է փեղավորել  $n$  արկղերի մեջ այնպես, որ ճիշտ  $m$  արկղ մնա դարարկ, եթե գնդակները չեն փարբերվում և բոլոր փեղավորումները հավասարահնարավոր են:

88. Ինչպիսի՞ հավանականությամբ  $2n$  գնդակներ կարելի է փեղավորել  $n$  արկղերի մեջ այնպես, որ ոչ մի արկղ դարարկ չլինի, եթե գնդակները չեն փարբերվում և բոլոր փեղավորումները հավասարահնարավոր են:

89. Խաղաթղթերի կապուկից (52 հատ) պարահականորեն վերցնում են 6 խաղաթուղթ: Գտնել վերցրած խաղաթղթերի մեջ բոլոր փեսակի խաղաթղթերից լինելու հավանականությունը:

90. 1, 2, ..., 20 թվերը պարունակող 20 քարտերից պարահականորեն վերցնում են մեկ քարտ: Որոշել այդ քարտի վրա գրված թվի 3-ի կամ 4-ի վրա բաժանվելու հավանականությունը:

91. 10 ձեռագրեր դասավորված են 30 թղթապանակների մեջ: Յուրաքանչյուր ձեռագրի համար նախատեսված է 3 թղթապանակ: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ պարահականորեն վերցրած 6 թղթապանակների մեջ չի գտնվի ամբողջական ձեռագիր:

92. Տոմսարկղի մոտ հերթ են կանգնած  $n + m$  մարդ, որոնցից  $n$ -ը ունեն 50-ական դրամ, իսկ մյուսները՝ 100-ական դրամ: Տոմսի գինը 50 դրամ է: Վաճառքից առաջ փոմսարկղում դրամ չկար: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ գնողներից ոչ մեկը սրիաված չի լինի սպասել մնացորդ մանր դրամին:

93. Արկղից, որը պարունակում է  $m$  սպիտակ և  $n$  սև գնդիկներ ( $m \geq n$ ) պարահականորեն հանում են իրար հետևից բոլոր գնդիկները: Ինչ՞ հավանականությամբ կգա այնպիսի պահ, երբ հանված սև գնդիկների քանակը կհավասարվի հանված սպիտակ գնդիկների քանակին:

94.  $n$  փայտիկներից յուրաքանչյուրը բաժանվում է երկու մասի՝ երկար և կարճ: Մտացված  $2n$  կտորները միավորում են  $n$  զույգերի, որոնցից յուրաքանչյուրը կազմում է նոր «փայտիկ»: Գտնել հետևյալ պատահույթների հավանականությունները՝

- ա) բոլոր կտորները կմիանան սկզբնական կարգով,
- բ) բոլոր երկար կտորները կմիանան կարճ կտորների հետ:

95. Դիֆարենցիալ  $ax^2 + bx + c = 0$  քառակուսի հավասարումը, որտեղ  $a, b, c$  -ն որոշվում են, համապատասխանաբար, որպես զառի երեք հաջորդական ներումների արդյունքներ: Գտնել՝

- ա) հավասարման արմատների իրական լինելու,
- բ) հավասարման արմատների ռացիոնալ լինելու հավանականությունները:

96.  $n + 1$  մարդկանցից մեկը, որին կանվանենք «նախածնող», երկու նամակ է գրում պարահականորեն ընտրած հասցեատերերին, որոնք

կազմում են «առաջին սերունդը», նրանք իրենց հերթին անում են նույնը՝ առաջացնելով «երկրորդ սերունդը»: Եվ « $r$ -դ սերունդ» կազմող մարդկանցից յուրաքանչյուրը ուղարկում է երկու նամակ պարահականորեն ընտրած հասցեատերերին: Գտնել «նախածնողի»  $1, 2, \dots, r$  համարներով «սերունդներից» ոչ մեկին չպարկանելու հավանականությունը:

97.  $n + 1$  բնակիչ ունեցող քաղաքում ինչ-որ մեկը նորություն է իմանում: Նա այն հաղորդում է առաջին հանդիպածին, դա էլ մեկ ուրիշին և այդպես շարունակ: Յուրաքանչյուր քայլում առաջին անգամ նորություն իմացողը հավասար հավանականությամբ կարող է հաղորդել այդ մարդկանցից յուրաքանչյուրին: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ ժամանակի  $r$  միավորների ընթացքում՝

ա) նորությունը կրկին չի հասնի այն մարդուն, որն առաջինն է իմացել դա,

բ) մարդկանցից ոչ մեկը չի կրկնի նորությունը:

98.  $1, 2, \dots, N$  բազմությունից պարահական վերցնում են  $a$  թիվը: Գտնել  $\lim_{N \rightarrow \infty} p_N$ , որտեղ  $p_N$  -ը  $(a^2 - 1)$  թվի  $10$ -ի բաժանվելու հավանականությունն է:

99. Ինչի՞ է հավասար  $1, 2, \dots, N$  բազմությունից պարահական վերցրած բնական թվի ֆիքսած բնական  $k$  թվի բաժանվելու  $p_N$  հավանականությունը: Գտնել  $\lim_{N \rightarrow \infty} p_N$ :

100.  $1, 2, \dots, N$  թվերի բազմությունից պարահականորեն վերցնում են (վերադարձով)  $x$  և  $y$  թվերը: Ի՞նչն է մեծ.

$$p_2 = P(x^2 - y^2 \text{ բաժանվում է } 2 - \text{ի}),$$

թե՛

$$p_3 = P(x^2 - y^2 \text{ բաժանվում է } 3 - \text{ի}) :$$

101.  $1, 2, \dots, n$  բազմության բոլոր իր մեջ կապարվող արտապարկերումներից պարահականորեն վերցնում են մեկը: Գտնել հետևյալ պարահույթների հավանականությունները՝

ա) ընտրած արտապատկերումը  $n$  փարրերից յուրաքանչյուրը փանում է 1-ի,

բ)  $i$  փարրն ունի ուղիղ  $k$  նախապատկեր,

գ)  $i$  փարրն արտապատկերվում է  $j$  փարրի վրա,

դ)  $i_1, i_2, \dots, i_k$  փարրերը ( $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ ) համապատասխանաբար արտապատկերվում են  $j_1, j_2, \dots, j_k$  -ի վրա:

102.  $1, 2, \dots, n$  բազմության փոխմիարժեք արտապատկերումը իր վրա անվանում են  $n$  ասփիճանի փեղափոխություն: Բոլոր  $n$  ասփիճանի փեղափոխություններից պարահականորեն վերցնում են մեկը: Գտնել հետևյալ պարահույթների հավանականությունները՝

ա) ընտրված է նույնական փեղափոխություն  $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ ,

բ) ընտրած փեղափոխությունը՝  $i_1, i_2, \dots, i_k$  ( $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ ) փարրերը փեղափոխում է համապատասխանաբար  $j_1, j_2, \dots, j_k$  փարրերին,

գ)  $i$  փարրը փեղափոխում է  $i$ -ին, այսինքն՝  $i \rightarrow i$ :

103.  $n$  մասնիկները բաշխվում են  $N$  բջիջների մեջ: Նշանակենք  $\mu_r = \mu(n, N)$  այն բջիջների քանակը, որոնցից յուրաքանչյուրը բաշխելուց հետո կպարունակի ուղիղ  $r$  մասնիկ: Գտնել հետևյալ պարահույթների հավանականությունները՝

$$1) \mu_0(n, N) > 0, \text{ երբ } n = N$$

$$2) \mu_0(n, N) = 0, \text{ երբ } n = N + 1$$

$$3) \mu(n, N) = 1, \text{ երբ } n = N + 1 :$$

104. Բաժանում են 52 խաղաքարերից բաղկացած կապուկը: Ինչպիսի՞ն է հավանականությունը, որ փասնջորսերորդ քարը կլինի «մեկանոց»: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ առաջին «մեկանոցը» դուրս կգա փասնջորսերորդ քարի վրա:

## Երկրաչափական հավանականություններ

Դիցուք  $\Omega$  -ն  $n$ -չափանի Էվկլիդեսյան  $R^n$  փարածության վերջավոր Լեբեգի չափ ունեցող ենթաբազմություն է:  $\mathcal{F}$ -ը  $\Omega$ -ի ըստ Լեբեգի չափելի ենթաբազմությունների  $\sigma$ -հանրահաշիվն է:  $L_n(\cdot)$ -ը Լեբեգի չափն է  $R^n$ -ում: Ցանկացած  $A \in \mathcal{F}$  համար երկրաչափական հավանականությունը սահմանվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$P(A) = \frac{L_n(A)}{L_n(\Omega)} :$$

## Ա

105. Ուղիղ գծի յուրաքանչյուր 15 մետրի վրա փեղավորված են հավասարակալին ականներ, 3 մետր լայնություն ունեցող փանկն ընթանում է այդ գծին ուղղահայաց: Ինչպիսի՞ն է փանկի պայթելու հավանականությունը:

106. Նարթությունը բաժանված է իրարից  $2a$  հեռավորության վրա գրնվող զուգահեռ ուղիղներով: Նարթության վրա պարահականորեն նետվում է  $r$  ( $r < a$ ) շառավղով մետաղադրամը: Ինչպիսի՞ն է նրա ոչ մի ուղղի հետ չհարվելու հավանականությունը:

107. Շախմատի անվերջ փախարակի վրա, որի քառակուսիների կողմերի երկարությունը  $a$  է, պարահականորեն նետվում է  $2r$  ( $2r < a$ ) փրամագծով մետաղադրամը: Գտնել հետևյալ պարահույթների հավանականությունները՝

- ա) դրամը ամբողջովին ընկած կլինի մեկ քառակուսու մեջ,
- բ) դրամը կհարի քառակուսու մեկ կողմից ոչ ավելի:

108. Կետը պարահականորեն նշվում է  $R$  շառավղով շրջանի ներսը: Գտնել այդ կետի շրջանին ներգծված ա) քառակուսու, բ) կանոնավոր եռանկյան ներսում գրնվելու հավանականությունը:

109.  $l$  երկարություն ունեցող  $OA$  հարվածի վրա պարահականորեն նշվում են երկու  $B$  և  $C$  կետեր, ընդ որում, հայրնի է, որ  $OB < OC$ :



Գտնել  $BC$  հատվածը  $OB$  հատվածից կարճ լինելու հավանականությունը:

110. Ինչպիսի՞ հավանականությամբ  $x^2 + ax + b = 0$  քառակուսի հավասարման արմատները. ա) իրական են, բ) դրական են, եթե  $a$  և  $b$  գործակիցների արժեքները հավասարահնարավոր են  $0 \leq a \leq 1$ ,  $0 \leq b \leq 1$  քառակուսու ներսում:

111. Գտնել  $x^2 + 2ax + b = 0$  հավասարման արմատների ա) իրական, բ) դրական լինելու հավանականությունը, եթե  $a$  և  $b$  գործակիցների արժեքները հավասարահնարավոր են  $|a| \leq 1$ ,  $|b| \leq 1$  քառակուսու ներսում:

112.  $l$  երկարություն ունեցող հատվածի վրա պարահականորեն նշում են երկու կետ: Գտնել նրանց միջև եղած հեռավորության  $kl$ -ից ( $0 < k < 1$ ) փոքր լինելու հավանականությունը:

113. Երկու նավ պեքք է կառանվեն նույն նավամարտույցին: Նավերի ժամանելու պահերը անկախ են և հավասարահնարավոր օրվա ընթացքում: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ նավերից մեկը սրիպված կլինի սպասել նավամարտույցի ազատմանը, եթե առաջին նավի կանգ առնելու ժամանակը մեկ ժամ է, իսկ երկրորդինը՝ երկու ժամ:

114.  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$  գագաթներ ունեցող քառակուսու ներսը նշված է  $M(\xi, \eta)$  կետը:

1. Ապացուցել, որ  $0 \leq x, y \leq 1$  -ի համար

$$P(\xi < x, \eta < y) = P(\xi < x) \cdot P(\eta < y) = x \cdot y :$$

2.  $0 < z < 1$ -ի համար գտնել

ա)  $P(|\xi - \eta| < z)$ ,                      դ)  $P(\max(\xi, \eta) < z)$ ,

բ)  $P(\xi \cdot \eta < z)$ ,                        ե)  $P(\frac{1}{2}(\xi + \eta) < z)$ :

գ)  $P(\min(\xi, \eta) < z)$ ,

115. Պարահականորեն վերցված են երկու դրական  $x$  և  $y$  թվեր, որոնցից յուրաքանչյուրը մեծ չէ 2-ից: Գտնել այդ թվերի  $xy$  արտադրյալի 1-ից մեծ չլինելու և  $\frac{x}{y}$  քանորդի 2-ին չգերազանցելու հավանականությունը:

116. Պատահականորեն վերցնում են երկու դրական  $x$  և  $y$  թվեր, որոնցից յուրաքանչյուրը մեծ չէ մեկից: Գտնել այդ թվերի գումարի մեկին չգերազանցելու, իսկ  $xy$  արտադրյալի  $0,09$ -ից փոքր չլինելու հավանականությունը:

## Բ

117. Ուղևորը կարող է օգտվել  $T_1$  և  $T_2$  ընդմիջումներով հաջորդող երկու երթուղիների փրամվայներից: Ուղևորի կանգառին մտքենալու պահը որոշում են  $T_1$  և  $T_2$  միջակայքերում երկու  $u$  և  $v$  կետերը, որոնք համապատասխանաբար ցույց են փալիս այն ժամանակը, որի ընթացքում ուղևորը պետք է սպասի մինչև փվյալ երթուղու հաջորդ փրամվայի գալը: Ենթադրելով, որ  $u$  և  $v$  արժեքները հավասարահնարավոր են  $T_1$  և  $T_2$  միջակայքերում, գտնել կանգառին մտքեցող ուղևորի ոչ ավելի քան  $0 < t \leq \min(T_1, T_2)$  ժամանակ սպասելու հավանականությունը:

118. **Բյուֆոնի խնդիրը:** Նարթությունը բաժանված է իրարից  $2a$  հեռավորության վրա գտնվող զուգահեռ ուղիղներով: Նարթության վրա պատահականորեն գցում են  $2l$  ( $l < a$ ) երկարություն ունեցող ասեղը: Գտնել դրա որևէ ուղղի հետ հարվելու հավանականությունը:

119. **Բերպրանի փրամիությունը:** Շրջանի մեջ «պատահականորեն» վերցնում են մի լար: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ դրա երկարությունը կգերազանցի շրջանին ներգծված կանոնավոր եռանկյան կողմի երկարությանը: Արդյունքը կախված է, թե ինչպես կփրամաբանեն «պատահականորեն» բառը:

120.  $l$  երկարություն ունեցող հարվածի վրա պատահականորեն նշում են երկու կետ: Ինչի՞ է հավասար՝ ա) սրացած երեք հարվածներից եռանկյուն կառուցելու հավանականությունը, բ) փոքրագույն մասի երկարությունը  $\frac{l}{3}$ -ին չգերազանցելու հավանականությունը:

121.  $R$  շառավիղ ունեցող շրջանագծի վրա պատահականորեն նշվում են  $A, B$  և  $C$  կետերը: Գտնել  $ABC$  եռանկյան ա) ստրանկյուն, բ) հավասարասրուն լինելու հավանականությունը:

122. Գտնել յուրաքանչյուրը  $a$ -ին չգերազանցող երկարություն ունեցող երեք պարահականորեն վերցրած հարվածներից եռանկյուն կառուցելու հավանականությունը:

123. Տասրապտուն արագությամբ պտտվող սկավառակի առջև գրված  $2h$  երկարություն ունեցող հարվածը, որը դասավորված է սկավառակի հետ միևնույն հարթության վրա այնպես, որ միջնակետը սկավառակի կենտրոնի հետ միացնող ուղիղը ուղղահայաց է հարվածին: Ժամանակի պարահական պահին շրջանագծից շոշափողի ուղղությամբ թռչում է մի մասնիկ: Գտնել մասնիկի հարվածի վրա ընկնելու հավանականությունը, եթե հարվածի հեռավորությունը սկավառակի կենտրոնից հավասար է  $l$ -ի:

124.  $r$  շառավիղ ունեցող գնդաձև մասնիկը պարահականորեն ուղղաձիգ կերպով ընկնում է քառակուսի բջիջներ ունեցող թեք մեքաղալար մադի վրա: Նորիզոնի հետ մադի կազմված անկյունը հավասար է  $\varphi$ -ի, մեքաղալարի փրամագիծը հավասար է  $d$ -ի, մեքաղալարերի առանցքային գծերի միջև հեռավորությունը՝  $l$ -ի: Գտնել մասնիկի մադի միջով ազատ անցնելու հավանականությունը:

125. Գտնել նավի պայթեցման հավանականությունը ակնափակոցը մարտանցելու դեպքում, եթե ականները դասավորված են շարքով իրարից  $L$  հեռավորության վրա, իսկ նավի ուղղությունը ականների գծի հետ կազմում է  $\alpha$  անկյուն: Նավի ուղղության հարումը ականների գծի հետ հավասարահնարավոր է ցանկացած կետում: Նավի լայնությունը հավասար է  $b$  -ի, իսկ ականի փրամագիծը՝  $d$  -ի:

126. Սուզանավը  $v$  արագությամբ շարժվում է  $L$  լայնություն ունեցող նեղուցի երկարությամբ: Պահականավը կարարում է մշտական որոնում, շարժվելով նեղուցի լայնքով  $v$  արագությամբ: Նավի վրա փեղադրված հայրնաբերման գործիքի գործողության հեռավորությունը հավասար է  $r$  -ի ( $r \leq L$ ): Ինչպիսի՞ հավանականությամբ պահականավը կբացահայրի սուզանավը, եթե սուզանավի և նավի ուղղությունների հարումը հավասարահնարավոր է նեղուցի ցանկացած կետում:

127. Ինչպիսի՞ հասարկություն պետք է ունենա մեքադադրամը, որպեսզի կողի վրա ընկնելու հավանականությունը հավասար լինի  $\frac{1}{3}$ :

128. Ավտոբուսի կանգառին յուրաքանչյուր ջորս թույլ են մեկ մոտենում է  $A$  գծի ավտոբուսը և յուրաքանչյուր վեց թույլ են մեկ  $B$  գծի ավտոբուսը:  $A$  գծի ավտոբուսի և  $B$  գծի ամենամոտ ավտոբուսի կանգառին մոտենալու պահերի միջև ժամանակահատվածը հավասարահնարավոր է 0-ից մինչև 4 թույլ: Գտնել հետևյալ պատահույթների հավանականությունները՝ ա) առաջին մոտեցող ավտոբուսը  $A$  գծի է, բ) երկու թույլի ընթացքում կմոտենա որևէ գծի ավտոբուս:

129. Գտնել  $ax^2 + bx + c = 0$  քառակուսի հավասարման արմատների իրական լինելու հավանականությունը, եթե  $a, b, c$  գործակիցների արժեքները հավասարահնարավոր են  $0 < a \leq 1, 0 < b \leq 1, 0 < c \leq 1$  խորանարդում:

### **Պայմանական հավանականություն Պատահույթների և փորձերի անկախությունը**

Դիցուք  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ -ն հավանականային փարածություն է,  $B \in \mathcal{F}$  և  $P(B) > 0$ :  $A$  պատահույթի պայմանական հավանականություն  $B$  պատահույթի իրականացման պայմանում որոշվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} :$$

Այդ հավասարությունը կարելի է գրել հետևյալ տեսքով՝

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) :$$

Վերջին բանաձևի ընդհանրացումն է

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) &= \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \end{aligned}$$

բանաձևը:

$A$  և  $B$  պատահույթները անկախ են, եթե

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) :$$

$A_1, A_2, \dots, A_n$  պարահույթները անկախ են ըստ համախմբության, եթե  $P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$  ցանկացած  $k = 2, 3, \dots, n$  և  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$  :

Ցանկացած  $A$  և  $B$  պարահույթների համար փեղի ունի հետևյալ բանաձևը՝

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) :$$

Ընդհանուր դեպքում՝ ցանկացած  $A_1, A_2, \dots, A_n$  պարահույթների համար ( $n \geq 2$ )

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i>j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i>j>k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right),$$

որը կոչվում է կցման և արտաքսման բանաձև: Ենթադրենք, որ յուրաքանչյուր ելք սպացվում է առանձին փորձի ընթացքում: Եթե առանձին փորձին վերաբերող ցանկացած պարահույթ անկախ է մյուս փորձերին վերաբերող ցանկացած պարահույթից, ապա կասենք, որ ունենք անկախ փորձերի հաջորդականություն:

Դիտարկենք երկու կամայական  $G_1$  և  $G_2$  փորձեր և նշանակենք  $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$  և  $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$  դրանց համապարասխանող հավանականային փարածությունները: Դիտարկենք նաև  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  հավանականային փարածության «բարդ» փորձ, որտեղ  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ -ն  $\Omega_1$  -ի և  $\Omega_2$  -ի դեկարտյան արտադրյալն է, իսկ  $\mathcal{F}$ -ը մինիմալ  $\sigma$ -հանրահաշիվն է՝ առաջացած  $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2 = \{B_1 \times B_2 : B_1 \in \mathcal{F}_1, B_2 \in \mathcal{F}_2\}$  ուղղանկյունների կիսահանրահաշիվից:

Ասում են, որ  $G_1$  և  $G_2$  փորձերը անկախ են, եթե ցանկացած  $B_1 \in \mathcal{F}_1, B_2 \in \mathcal{F}_2$  համար փեղի ունի

$$P(B_1 \times B_2) = P_1(B_1) \cdot P_2(B_2) = P(B_1 \times \Omega_2) \cdot P(B_2 \times \Omega_1) :$$

$G_1, G_2, \dots, G_n$  փորձերի անկախությունը սահմանվում է նման ձևով հետևյալ հավասարության միջոցով՝

$$P(B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n) = P_1(B_1) \cdot P_2(B_2) \cdot \dots \cdot P_n(B_n),$$

որպեղ  $B_k \in \mathcal{F}_k$ ,  $(\Omega_k, \mathcal{F}_k, P_k)$ -ն  $G_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  փորձին համապարափխանող հավանականային արարաձույթունն է:

## Ա

130. Ներում են երկու զառ: Գրնել երկուսի վրա էլ «5» բացվելու պայմանական հավանականությունը, եթե հայրնի է, որ բացվաձ միավորների զումարը բաժանվում է 5-ի:

131. Ներում են երկու զառ: Գրնել առնվազն մեկ անգամ «6» բացվելու հավանականությունը, եթե հայրնի է, որ բացվաձ միավորների զումարը հավասար է 8-ի:

132. Ներում են երեք զառ: Ինչպիսի՞ն է դրանցից առնվազն մեկի վրա «6» բացվելու հավանականությունը, եթե զառերի վրա բացվել են արբեր նիսրեր:

133. Ապացուցել, որ  $P(B/A) > P(B)$ , եթե  $P(A/B) > P(A)$ ,  $P(A) \neq 0$ :

134. Ապացուցել, որ  $P(B/A) \geq 1 - \frac{P(\bar{B})}{P(A)}$ , որպեղ  $P(A) \neq 0$ :

135. Ապացուցել, որ եթե  $A$  և  $B$  պարահույթները անհամարեղելի են և  $P(A \cup B) \neq 0$ , ապա

$$P(A/A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)} :$$

136. Դիցուք  $A$  և  $B$  պարահույթները անկախ են և  $A \subset B$ : Ապացուցել, որ  $P(A) = 0$  կամ  $P(B) = 1$ :

137. Ապացուցել, որ եթե  $A$  պարահույթն անկախ է իրենից, ապա  $P(A) = 0$  կամ  $P(A) = 1$ :

138. Դիցուք  $P(B/\bar{A}) = P(B/A)$ ,  $P(A) \neq 0$ ,  $P(\bar{A}) \neq 0$ : Ապացուցել, որ  $A$ -ն և  $B$ -ն անկախ են:

139.  $A$  և  $B$  պարահույթները անհամարեղելի են,  $P(A) \neq 0$  և  $P(B) \neq 0$ : Կախյալ են արդյոք այդ պարահույթները:

140.  $A$  և  $B$  պարահույթները անկախ են: Կախյալ են արդյոք հետևյալ պարահույթները՝ ա)  $A$  և  $\bar{B}$ , բ)  $\bar{A}$  և  $\bar{B}$  :

141. Ապացուցել, որ եթե  $A$  պարահույթը անկախ է  $B_1$  և  $B_2$  անհամարեղելի պարահույթներից, ապա  $A$ -ն և  $B_1 \cup B_2$  անկախ են:

142. Ներում են երկու զառ: Դիտարկենք հետևյալ պարահույթները՝  
 $A_1 = \{\text{առաջին զառի վրա կբացվեն զույգ թվով միավորներ}\},$   
 $A_2 = \{\text{երկրորդ զառի վրա կբացվեն կենտ թվով միավորներ}\},$   
 $A_3 = \{\text{բացված միավորների գումարը կենտ է}\}:$

Ապացուցել, որ  $A_1, A_2, A_3$ -ը զույգ առ զույգ անկախ են, բայց ըստ համախմբության անկախ չեն:

143. Ներում են երկու զառ:  $X_i$ -ն  $i$ -րդ զառի վրա երևացող միավորների թիվն է ( $i = 1, 2$ ): Դիտարկենք հետևյալ պարահույթները՝

$A_1 = \{X_1\text{-ը բաժանվում է } 2\text{-ի, } X_2\text{-ը բաժանվում է } 3\text{-ի}\},$   
 $A_2 = \{X_1\text{-ը բաժանվում է } 3\text{-ի, } X_2\text{-ը բաժանվում է } 2\text{-ի}\},$   
 $A_3 = \{X_1\text{-ը բաժանվում է } X_2\text{-ի}\}:$   
 $A_4 = \{X_2\text{-ը բաժանվում է } X_1\text{-ի}\},$   
 $A_5 = \{X_1 + X_2\text{-ը բաժանվում է } 2\text{-ի}\},$   
 $A_6 = \{X_1 + X_2\text{-ը բաժանվում է } 3\text{-ի}\}:$

Գտնել անկախ պարահույթների բոլոր զույգերը և եռյակները:

144. Առաջին սափորը պարունակում է 5 սպիտակ, 11 սև և 8 կարմիր գնդիկներ, իսկ երկրորդը՝ 10 սպիտակ, 8 սև և 6 կարմիր: Յուրաքանչյուր սափորից հանում են մեկական գնդիկ: Գտնել հանված գնդիկների միևնույն գույնի լինելու հավանականությունը:

145. Սափորը պարունակում է 2 սպիտակ, 3 սև և 5 կարմիր գնդիկներ: Պարահականորեն հանում են 3 գնդիկ: Գտնել դրանցից զոնե երկուսի փարբեր գույնի լինելու հավանականությունը:

146. Երկու հրաձիգ, որոնց համար թիրախին դիպչելու հավանականությունները համապատասխանաբար հավասար են 0,7 և 0,8, փալիս են մեկական կրակոց: Գտնել թիրախին ա) առնվազն մեկ անգամ դիպչելու, բ) միայն մեկ անգամ դիպչելու հավանականությունը:

147. Ինչ-որ մեկը մոռացել է հեռախոսի համարի վերջին թվանշանը և հավաքում է այն պատահականորեն: ա) Ինչպիսի՞ հավանականությամբ նա ստիպված կլինի զանգել ոչ ավել քան երեք անգամ, բ) ինչպե՞ն կփոխվի հավանականությունը, եթե հայտնի լիներ, որ վերջին թվանշանը կենսա է:

148. Ծրագրի 25 հարցերից ուսանողը գիտի միայն 20-ը: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ նա կպատասխանի իրեն առաջարկված երեք հարցերին:

149. Վիճակախաղի մեկ փոմսով շահելու հավանականությունը հավասար է 0,8: Ինչպիսի՞ն է 2 փոմս ունեցողի շահելու հավանականությունը:

150. Վիճակախաղի  $n$  փոմսերից  $l$ -ը շահող է: Ոմն ձեռք է բերում  $k$  փոմս: Ինչպիսի՞ն է նրանցից գոնե մեկի շահող լինելու հավանականությունը:

151. Ապացուցել, որ  $A$  և  $B$  անհամաբեղելի պատահույթների համար հավանականությունը, որ անկախ փորձերում  $A$  պատահույթը կիրականանա  $B$ -ից առաջ, հավասար է

$$\frac{P(A)}{P(A) + P(B)} :$$

152. Դիցուք  $A_1 \cap A_2 \subset A$ : Ապացուցել, որ

$$P(A) \geq P(A_1) + P(A_2) - 1 :$$

153. Շրջանին ներգծված է քառակուսի: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ շրջանի մեջ պատահականորեն ներված հինգ կետերից մեկը



կգրվի քառակուսու ներսում, իսկ մյուսները՝ մեկական յուրաքանչյուր սեգմենտում:

154. Էլեկտրական շղթայի խզումը կարող է փեղի ունենալ  $k_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  փարրերից մեկի շարքից դուրս գալու պարճառով: Տարրերը շարքից դուրս են գալիս իրարից անկախ: Նշանակենք  $p_i$ -ով,  $i = 1, 2, 3$ ,  $i$ -րդ փարրի շարքից դուրս գալու հավանականությունը՝  $p_1 = 0, 3$ ,  $p_2 = p_3 = 0, 2$ : Գտնել շղթայի խզման հավանականությունը, եթե փարրերը միացված են ա) հաջորդաբար, բ) զուգահեռ, գ)  $k_1$ -ը հաջորդաբար, իսկ  $k_2$  և  $k_3$  զուգահեռ, դ) առաջին երկու փարրերը զուգահեռ երրորդի հետ:

155. Երկու խաղացող հաջորդաբար ներում են մեփաղադրամը: Շահում է այն խաղացողը, ում մոփ ավելի շուր կբացվի գերբը: Գտնել շահելու հավանականությունը յուրաքանչյուր խաղացողի համար:

156. Երեք խաղացող հաջորդաբար ներում են մեփաղադրամը: Շահում է այն խաղացողը, ում մոփ ավելի շուր կբացվի գերբը: Գտնել շահելու հավանականությունը յուրաքանչյուր խաղացողի համար:

157. Մափորը պարունակում է  $a$  սպիփակ և  $b$  սև գնդիկներ: Խաղի երկու մասնակիցներ հաջորդաբար հանում են սափորից մեկական գնդիկ, յուրաքանչյուր անգամ վերադարձնելով այն եր: Շահում է այն խաղացողը, որը ավելի շուր է հանում սպիփակ գնդիկը: Գտնել շահելու հավանականությունը յուրաքանչյուր խաղացողի համար:

158. Երկու հրաճիգ հաջորդաբար կրակում են թիրախին մինչև առաջին դիպուկ կրակոցը: Թիրախին դիպչելու հավանականությունը առաջին հրաճիգի համար հավասար է 0,2-ի, իսկ երկրորդի համար՝ 0,3-ի: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ առաջին հրաճիգը կկափարի ավելի շար կրակոց, քան երկրորդը:

159. Զննությունը հաջող հանճնելու հավանականությունը երեք ուսանողներից յուրաքանչյուրի համար համապատասխանաբար հավասար է  $1/5$ ,  $1/4$  և  $1/3$ : Վաշվել հավանականությունը, որ քննությունը հաջող կհանճնեն այդ 3 ուսանողներից գոնե երկուսը:

160. Սափորը պարունակում է 12 գնդիկ, որոնցից 4-ը սպիտակ են: Երեք խաղացողներ հաջորդաբար առանց վերադարձի հանում են մեկական գնդիկ: Նախընտրում է այն խաղացողը, ով ավելի շուտ կհանի սպիտակ գնդիկը: Գտնել շահելու հավանականությունը յուրաքանչյուր խաղացողի համար:

161. Թագավորը 2 երեխաներից բաղկացած ընդհանրից է: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ մյուս երեխան նրա քույրն է:

162. Որոշակի համայնքի ընդհանրիցների 36 փոկոսը շուն է պահում, շուն ունեցող ընդհանրիցների 22 փոկոսը պահում է նաև կատու: Բացի այդ, այդ համայնքի ընդհանրիցների 30 փոկոսը պահում է կատու: Ինչի՞ է հավասար.

ա) հավանականությունը, որ պարահականորեն ընտրված ընդհանրիցը ունի և՛ շուն, և՛ կատու,

բ) պայմանական հավանականությունը, որ պարահականորեն ընտրված ընդհանրիցը պահում է շուն, եթե այն պահում է կատու:

163. Որոշակի քոլեջի ուսանողների 52 փոկոսը իգական սեռի ներկայացուցիչներ են: Այս քոլեջի ուսանողների հինգ փոկոսը մասնագիտանում է համակարգչային գիտության մեջ: Ուսանողների երկու փոկոսը, որոնք սովորում են համակարգչային գիտություն, աղջիկներ են: Գտնել պայմանական հավանականությունը, որ պարահականորեն ընտրված ուսանողը

ա) իգական սեռի է, հաշվի առնելով, որ նա մասնագիտանում է համակարգչային գիտության մեջ,

բ) մասնագիտանում է համակարգչային գիտության մեջ, հաշվի առնելով, որ նա իգական սեռի է:

## Բ

164. 00, 01, ..., 98, 99 թվերով համարակալված 100 քարտերից պարահականորեն ընտրում են մեկը: Դիցուք  $\xi$  և  $\eta$  համապատասխանաբար ընտրված քարտի թվանշանների գումարն է և արտադրյալը: Գտնել  $P(\xi = i/\eta = 0)$ :

165. Գրասեղանում նամակի գրնվելու հավանականությունը հավասար է  $p$ -ի, ընդ որում հավասար հավանականությամբ այն կարող է լինել սեղանի ութ դարակներից ցանկացածում: Մտուգված յոթ դարակներում նամակը չի հայտնաբերվել: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ այն կգտնվի 8-րդ դարակում:

166. Ապացուցել, որ եթե  $A, B, C$  պարահույթներն անկախ են ըստ համախմբության, ապա ա)  $A$  և  $B \cup C$ , բ)  $A$  և  $B \setminus C$  անկախ են:

167. Բերել օրինակ, որը ցույց է տալիս, որ  $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$  և  $P(A_3) > 0$  պայմանից չի բխում  $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$ :

168. Ներվում է երկու զառ: Նշանակենք

$A_l = \{\text{առաջին զառի վրա երևացող միավորների թիվը բաժանվում է } l\text{-ի}\}$ ,

$B_l = \{\text{երկրորդ զառի վրա երևացող միավորների թիվը բաժանվում է } l\text{-ի}\}$ ,

$C_l = \{\text{երկու զառերի վրա երևացող միավորների գումարը բաժանվում է } l\text{-ի}\}$ :

Անկախ են արդյոք հետևյալ պարահույթների զույգերը ա)  $A_l, B_k$  ցանկացած  $l$ -ի և  $k$ -ի դեպքում, բ)  $A_2, C_2$ , գ)  $A_4, C_4$ :

169.  $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$  զագաթներ ունեցող քառակուսու մեջ պարահականորեն նշվում է  $M$  կետը: Դիցուք  $(\xi_1, \xi_2)$ -ը այդ կետի կոորդինատներն են:  $r$ -ի ո՞ր արժեքների դեպքում  $A_r = (|\xi_1 - \xi_2| \geq r)$  և  $B_r = (\xi_1 + \xi_2 \leq 3r)$  պարահույթները կլինեն անկախ:

170. Ըստ նախորդ խնդրի պայմանների, դիցուք  $A_1 = (\xi_1 \leq \frac{1}{2})$ ,  $A_2 = (\xi_2 \leq \frac{1}{2})$ ,  $A_3 = ((\xi_1 - \frac{1}{2})(\xi_1 - \frac{1}{2}) < 0)$ : Ցույց տալ որ  $A_1, A_2, A_3$  պարահույթները զույգ առ զույգ անկախ են, բայց ըստ համախմբության անկախ չեն:

171. Ընդհանրացնելով խնդիր 170-ը ցույց տալ, որ ցանկացած ամբողջ  $n \geq 4$  համար զոյություն ունի պարահույթների  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  համախմբություն, որն ունի հետևյալ հատկությունները՝

ա)  $A_1, A_2, \dots, A_n$  պարահույթները խմբովին անկախ չեն,

բ)  $A_1, A_2, \dots, A_n$  համախմբությունից ցանկացած պարահույթ հեռացնելուց հետո մնացած պարահույթները ըստ համախմբության կրկին են անկախ:

172. Առաջին սափորը պարունակում է 2 սպիտակ և 3 սև գնդիկներ, երկրորդը՝ 2 սպիտակ և 2 սև, երրորդը՝ 3 սպիտակ և 1 սև գնդիկներ: Առաջին սափորից երկրորդը փեղափոխվում է պարահականորեն վերցրած մեկ գնդիկ, երկրորդից վերցրած գնդիկը՝ երրորդ, ապա երրորդից՝ առաջին սափոր: ա) Որոշել առաջին սափորի ամենահավանական պարունակությունը, բ) ինչպիսի՞ հավանականությամբ բոլոր սափորների պարունակությունը կմնա անփոփոխ:

173. Մասնագիտական գրականություն որոնելիս, ուսանողը որոշեց այցելել երեք գրադարան: Յուրաքանչյուր գրադարանի համար հավասարահնարավոր է, որ այդ գրականությունը գտնվում է այնփեղ, կամ չի գտնվում, իսկ եթե գտնվում է, ապա հավասարահնարավոր է, որ զբաղեցրած է այն այլ ընթերցողի կողմից, թե ոչ: Ո՞րն է ավելի հավանական՝ կգտնի ուսանողը այդ գրականությունը, թե ոչ, եթե գրադարանները համալրվում են մեկը մյուսից անկախ:

174. Ապացուցել, որ եթե  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \subset A$ , ապա

$$P(A) \geq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) - (n - 1) :$$

175. Ապացուցել, որ ցանկացած երկու  $A$  և  $B$  պարահույթների համար փեղի ունի հետևյալ առնչությունը՝

$$|P(A \cap B) - P(A) \cdot P(B)| \leq \frac{1}{4} :$$

176. Ապացուցել, որ ցանկացած  $A$  և  $B$  պարահույթների համար փեղի ունի հետևյալ անհավասարությունը՝

$$P(A \cup B) \cdot P(A \cap B) \leq P(A) \cdot P(B) :$$

177. Ունենք երեք զույգ առ զույգ անկախ պարահույթներ, որոնք համափեղ հանդես գալ չեն կարող: Ենթադրենք, որ նրանք բոլորն էլ

ունեն միևնույն  $x$  հավանականությունը: Գտնել  $x$ -ի մեծագույն հնարավոր արժեքը:

178.  $R$  շառավիղ ունեցող գնդի ներսում պարահականորեն և իրարից անկախ նշված են  $N$  կետեր:

ա) Ինչի՞ է հավասար կենտրոնի և նրա ամենամոտ կետի միջև եղած հեռավորության  $r$  -ից ոչ պակաս լինելու հավանականությունը.

բ) Ինչի՞ է հավասար ա) -ում սրացված հավանականության սահմանը, երբ  $R \rightarrow \infty$  և  $\frac{N}{R^3} \rightarrow \frac{4}{3}\pi\lambda$ :

179. Մոլեկուլը, որը  $t = 0$  պահին բախվել է մյուս մոլեկուլին և մինչև  $t$  պահը չի ունեցել ոչ մի ուրիշ բախում,  $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$  հավանականությամբ ( $t, t + \Delta t$ ) ժամանակամիջոցում կունենա նոր բախում: Գտնել «ազատ վազքի»  $t$ -ից մեծ լինելու հավանականությունը:

180. Խումբը բաղկացած է  $k$  փեզերական մարմիններից, որոնցից յուրաքանչյուրը անկախ մյուսներից հայրնաբերվում է ռադիոլկացիոն կայանով  $p$  հավանականությամբ: Մարմինների խումբը դիպվում է իրարից անկախ գործող  $m$  ռադիոլկացիոն կայաններով: Գտնել խմբի ոչ բոլոր մարմինների հայրնաբերելու հավանականությունը:

181. Որևէ համակարգի հուսալիություն են անվանում հասարակած ժամանակամիջոցում դրա անխափան աշխատանքի հավանականությունը: Էլեկտրական շղթան բաղկացած է ա) զուգահեռ, բ) հաջորդաբար միացված  $z_1, z_2, \dots, z_k$  դիմադրություններից: Յուրաքանչյուր դիմադրության հուսալիությունը հավասար է  $p$  -ի: Գտնել շղթայի հուսալիությունը:

182. Սափորը պարունակում է  $a$  սպիտակ,  $b$  սև և  $c$  կարմիր գնդիկներ: Սափորից մեկը մյուսի հեփուից հանում են նրա մեջ գտնվող բոլոր գնդիկները, նշելով նրանց գույնը: Գտնել սպիտակ գնդիկի սևից շուրջ երևալու հավանականությունը:

183. Ընտրելով սափորից գնդիկների դուրս հանելու համապարասխան սխեման, ստուգել հեփույալ նույնությունները՝

$$\text{ա) } 1 + \frac{N-m}{N-1} + \frac{(N-m)(N-m-1)}{(N-1)(N-2)} + \dots + \frac{(N-m)(N-m-1)\dots\cdot 2\cdot 1}{(N-1)(N-2)\dots\cdot(m+1)\cdot m} = \frac{N}{m}$$

$$\text{բ) } 1 + \frac{N-m}{N} \cdot \frac{m+1}{m} + \frac{(N-m)(N-m-1)}{N^2} \cdot \frac{m+2}{m} + \dots + \frac{(N-m)(N-m-1)\dots\cdot 2\cdot 1}{N^{N-m}} \cdot \frac{N}{m} = \frac{N}{m} :$$

184. Սափորը պարունակում է երկու գնդիկ՝ սպիտակ և սև: Սափորից հանում են մեկական գնդիկ մինչև սև գնդիկի դուրս գալը, ընդ որում, սպիտակ գնդիկի հանելու դեպքում այն եր է վերադարձվում և ավելացվում է ևս 2 սպիտակ գնդիկ: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ առաջին 50 հանված գնդիկները կլինեն սպիտակ:

185. Սափորը պարունակում է  $n + m$  միանման գնդիկ, որոնցից  $n$ -ը սպիտակ է, իսկ  $m$ -ը՝ սև ( $m \geq n$ ): Իրար հետևից առանց վերադարձի  $n$  անգամ հանում են երկուական գնդիկ: Գտնել ամեն անգամ փարբեր գույնի գնդիկներ հանելու հավանականությունը:

186.  $A_1, A_2, \dots, A_n$  պատահույթները անկախ են ըստ համախմբության և  $P(A_k) = p_k$ : Ինչպիսի՞ն է

ա)  $A_1, A_2, \dots, A_n$  պատահույթներից ոչ մեկի փրեղի չունենալու,

բ)  $A_1, A_2, \dots, A_n$  պատահույթներից գոնե մեկի փրեղի ունենալու,

գ)  $A_1, A_2, \dots, A_n$  պատահույթներից միայն մեկի փրեղի ունենալու հավանականությունը:

187. Դիցուք  $A_1, A_2, \dots, A_n$ -ը անկախ պատահույթներ են և  $P(A_i) = p_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ : Ապացուցել, որ այդ պատահույթներից գոնե մեկի երևալու  $P$  հավանականությունը բավարարում է

$$\sum_{i=1}^n p_i > P > 1 - e^{-\sum_{i=1}^n p_i}$$

անհավասարություններին:

188. Ինչ-որ մեկը  $n$  հասցեատերերին նամակներ է գրել, որոնցից յուրաքանչյուրը դրել է առանձին ծրարի մեջ և յուրաքանչյուր ծրարի

վրա պատահականորեն գրել  $n$  հասցեներից մեկը: Գտնել գոնե մեկ նամակը ճիշտ հասցեով ուղարկելու հավանականությունը:

189.  $1, 2, \dots, n$  թվերը դասավորված են պատահական կարգով: Ինչպիսի՞ն է թվերից գոնե մեկի իր տեղում գտնվելու  $p_n$  հավանականությունը: Գտնել  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ :

190. Պատահականորեն ընտրվում է  $n$ -րդ կարգի որոշի վերլուծության անդամներից մեկը: Ինչպիսի՞  $p_n$  հավանականությամբ այն չի պարունակի գլխավոր անկյունագծի փարբերը: Գտնել  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ :

191. Դահլիճում կա  $n$  տեղ: Տոմսերը համարակալված են և բոլորը վաճառված: Նանդիսատեսները պատահականորեն զբաղեցնում են տեղերը: Գտնել հետևյալ պատահույթների հավանականությունները.

- ա) միայն  $m$  ( $m \leq n$ ) հանդիսատես նստած կլինեն իրենց տեղերում,
- բ) ոչ մի հանդիսատես նստած չի լինի իր տեղում,
- գ) գտնել բ)-ում որոշված հավանականության սահմանը, երբ  $n \rightarrow \infty$  :

192.  $n$  վագոններից բաղկացած էլեկտրագնացք են բարձրանում  $k$  ( $k \geq n$ ) ուղևոր, որոնցից յուրաքանչյուրը պատահականորեն ընտրում է վագոններից մեկը: Գտնել յուրաքանչյուր վագոն առնվազն մեկ ուղևոր բարձրանալու հավանականությունը:

### Լրիվ հավանականության և Բայեսի բանաձևերը

Դիցուք ունենք  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  հավանականային փարածություն: Եթե  $A_1, A_2, \dots, A_n$  պատահույթները կազմում են լրիվ խումբ և  $P(A_i) > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , ապա ցանկացած  $B$  պատահույթի համար տեղի ունի լրիվ հավանականության բանաձևը՝

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i) :$$

Լրիվ հավանականության բանաձևը տեղի ունի նաև հաշվելի թվով պատահույթների համար՝ եթե  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$  պատահույթների հաջորդականությունն այնպիսին է, որ

$$1) A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, P(A_i) > 0,$$

$$2) B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

ապա ցանկացած  $B$  պարահույթի համար

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \cdot P(B/A_i) :$$

**Բայեսի բանաձևը:** Եթե բավարարված են լրիվ հավանականության բանաձևի բոլոր պայմանները և  $P(B) \neq 0$ , ապա

$$P(A_k/B) = \frac{P(A_k) \cdot P(B/A_k)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i)}, \quad k = 1, 2, \dots, n :$$

Բայեսի բանաձևը փեղի ունի նաև հաշվելի թվով  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$  պարահույթների համար:

## Ա

193. Դոմինոյի 28 քարերից պարահականորեն վերցնում են երկուսը: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ նրանք կկազմեն շղթա՝ համաձայն խաղի կանոնների:

194. Երկու սափոր պարունակում են համապարասխանաբար  $m_1$  և  $m_2$  սպիտակ և  $n_1$  և  $n_2$  սև գնդիկներ: Յուրաքանչյուր սափորից պարահականորեն վերցնում են մեկական գնդիկ, ապա այդ երկու գնդիկներից պարահականորեն ընտրում են մեկը: Ինչպիսի՞ն է այդ գնդիկի սպիտակ լինելու հավանականությունը:

195.  $n$  գնդակ պարունակող սափորի մեջ զցվել է մեկ սպիտակ գնդակ: Գտնել սափորից սպիտակ գնդակ հանելու հավանականությունը, եթե բոլոր հնարավոր ենթադրությունները սպիտակ գնդակների սկզբնական քանակի վերաբերյալ հավասարահնարավոր են:

196. Երեք սափորներից յուրաքանչյուրը պարունակում է 6 սև և 4 սպիտակ գնդիկներ: Առաջին սափորից պարահականորեն վերցրած



գնդիկը փեղափոխվում է երկրորդ սափոր, ապա այդփեղից պարահականորեն վերցրած գնդիկը փեղափոխվում է երրորդ սափոր: Գտնել երրորդ սափորից պարահականորեն հանած գնդիկի սպիտակ լինելու հավանականությունը:

197.  $n$  սափորներից յուրաքանչյուրը պարունակում է  $a$  սպիտակ և  $b$  սև գնդիկներ: Առաջին սափորից պարահականորեն վերցրած մեկ գնդիկ փեղափոխվում է երկրորդ սափոր, ապա երկրորդից՝ երրորդը և այլն: Վերջապես վերջին սափորից հանում են մեկ գնդիկ: Գտնել նրա սպիտակ լինելու հավանականությունը:

198. Ուսանողը գիտի ոչ բոլոր քննական փոմսերը: Ո՞ր դեպքում չիմացած փոմս վերցնելու հավանականությունը կլինի փոքրագույն, երբ ուսանողը վերցնում է փոմսը սկզբում, թե՞ վերջում:

199. Առաջին սափորը պարունակում է  $a$  սպիտակ և  $b$  սև ( $a \geq 3$ ,  $b \geq 3$ ) գնդիկներ, երկրորդը՝  $c$  սպիտակ և  $d$  սև գնդիկներ: Առաջին սափորից պարահականորեն վերցրած 3 գնդիկ փեղափոխում են երկրորդ սափոր: Գտնել երկրորդ սափորից պարահականորեն վերցրած գնդիկի սպիտակ լինելու հավանականությունը:

200. Արկղում կա թենիսի 15 գնդակ, որոնցից 9-ը նոր են: Առաջին խաղի համար պարահականորեն վերցնում են 3 գնդակ, որոնք խաղից հետո ետ են վերադարձնում արկղ: Երկրորդ խաղի համար նույնպես պարահականորեն վերցնում են 3 գնդակ: Ինչպիսի՞ն է երկրորդ խաղի համար վերցրած գնդակների չօգտագործված լինելու հավանականությունը:

201. Արյան փոխներարկման ժամանակ պետք է հաշվի առնել դոնորի և հիվանդի արյան խմբերը:  $IV$  խմբի արյուն ունեցող հիվանդին կարելի է փոխներարկել ցանկացած խմբի արյուն,  $III$  խմբի արյուն ունեցող հիվանդին՝  $I$  կամ  $III$  խմբի արյուն,  $II$  խմբի արյուն ունեցողին՝  $I$  կամ  $II$ , իսկ  $I$  խմբի արյուն ունեցող հիվանդին՝ միայն  $I$  խմբի արյուն: Բնակչության 33, 7%-ը ունեն  $I$ , 37, 5%-ը՝  $II$ , 20, 9%-ը՝  $III$ , 7, 9%-ը՝  $IV$  խմբի արյուն:

ա) Ինչպիսի՞ հավանականությամբ պարահականորեն ընտրված հիվանդին կարելի է փոխներարկել պարահականորեն ընտրված դոնորի արյուն:

բ) Ինչպիսի՞ հավանականությամբ կարելի է իրագործել արյան փոխներարկումը, եթե ներկա են դոնորներից երկուսը:

202. Երկու հասարոց արտադրում են միանման մասեր, որոնք ուղարկվում են ընդհանուր պահեստ: Առաջին հասարոցի արտադրողականությունը երկու անգամ մեծ է երկրորդի արտադրողականությունից: Առաջին հասարոցի արտադրանքի 60%-ը բարձր որակի է, իսկ երկրորդին՝ 84%-ը: Պահեստից պարահականորեն վերցրած մասը բարձր որակի է: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ այն արտադրված է առաջին հասարոցի վրա:

203. Տեղյու արտադրող գործարանի  $A$ ,  $B$ ,  $C$  հասարոցները արտադրում են անբողջ արտադրանքի համապարասխանաբար 25%, 30% և 40%-ը: Նրանց արտադրանքի խտրանը կազմում է 5%, 4% և 2%: Պարահական վերցրած հեղույը խտրանված է: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ այն արտադրված է  $A$  հասարոցի,  $B$  հասարոցի,  $C$  հասարոցի վրա:

204. Երեք խմբաքանակներից յուրաքանչյուրը պարունակում է 10 մաս: Լավորակ մասերի քանակը առաջին, երկրորդ և երրորդ խմբաքանակներում հավասար է համապարասխանաբար 10, 7 և 4: Պարահական խմբաքանակից պարահական վերցրած մասը լավորակ է: Այն երեք են վերադարձնում և նույն խմբաքանակից երկրորդ անգամ վերցնում են մեկ մաս, որը նույնպես լավորակ է: Գտնել այդ մասի երրորդ խմբաքանակին պարկանելու հավանականությունը:

205. Տինգ դեքալներից բաղկացած խմբից պարահականորեն վերցնում են մեկը, պարզվում է որ այն խտրանված է: Խտրանված դեքալների քանակը հավասար հավանականությամբ կարող է լինել ցանկացած: Գտնել խտրանված դեքալների քանակի վերաբերյալ ենթադրություններից ամենահավանականը:

206. Տայրնի է, որ բոլոր փղամարդկանց 5%-ը և բոլոր կանանց 0,25%-ը գունակույր են: Պարահականորեն ընտրված մարդը փառա-

պում է գունակությունը: Ինչպիսի՞ն է հավանականությունը, որ դա փղամարդ է (փղամարդկանց և կանանց թիվը համարել հավասար):

207. Ռենդոմայն սպուգունով թոքախարավորի մոտ թոքախար հայր-նաբերելու հավանականությունը հավասար է  $1 - \beta$ -ի: Առողջ մարդուն հիվանդի տեղ ընդունելու հավանականությունը հավասար է  $\alpha$ -ի: Դիցուք թոքախարավորները կազմում են ամբողջ բնակչության  $\gamma$  մասը: ա) Գտնել մարդու առողջ լինելու պայմանական հավանականությունը, եթե սպուգուն ժամանակ նրան համարել են հիվանդ: բ) Նաշվել հավանականության արժեքը մասնավոր դեպքում, երբ  $1 - \beta = 0,9$ ;  $\alpha = 0,01$ ;  $\gamma = 0,001$ :

208. Մասնագիտացված հիվանդանոցում միջին հաշվով 50%-ը փառապում է  $K$  հիվանդությամբ, 30%-ը՝  $L$  հիվանդությամբ, 20%-ը՝  $M$  հիվանդությամբ:  $K, L, M$  հիվանդություններից լրիվ բուժվելու հավանականությունները համապատասխանաբար հավասար են 0,7-ի, 0,8-ի, 0,9-ի: Բուժվողներից մեկը առողջացած դուրս է գրվում հիվանդանոցից: Ինչպիսի՞ն է հավանականությունը, որ նա փառապում էր  $K$  հիվանդությամբ:

209. Մափորից, որը պարունակում է  $m \geq 3$  սպիտակ և  $n$  սև գնդիկներ, կորել է անհայտ գույնի մեկ գնդիկ: Որպեսզի որոշեն սափորի պարունակությունը, պարահականորեն հանում են երկու գնդիկ: Գտնել կորած գնդիկի սպիտակ լինելու հավանականությունը, եթե հայտնի է, որ հանված գնդիկները սպիտակ էին:

210. Մեկ կրակոցով թիրախին դիպչելու հավանականությունները երեք հրաձիգների համար համապատասխանաբար հավասար են  $\frac{4}{5}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{2}{3}$ : Նամազարկ փայլու դեպքում երեք հրաձիգներից երկուսը դիպչում են թիրախին: Գտնել երրորդ հրաձիգի վրիպելու հավանականությունը:

211. Երեք հրաձիգ կրակում են, ընդ որում երկուսը դիպչում են թիրախին: Գտնել երրորդ հրաձիգի թիրախին դիպչելու հավանականությունը, եթե դիպչելու հավանականությունները առաջին, երկրորդ և երրորդ հրաձիգների համար համապատասխանաբար հավասար են 0,6-ի, 0,5 -ի և 0,4-ի:

212. Ավտոմեքենա արտադրող գործարանը ուրբաթ օրերին արտադրում է շաբաթական արտադրվող ավտոմեքենաների 12%-ը, իսկ երկուշաբթիից հինգշաբթի՝ մնացած արտադրությունը հավասար քանակությամբ: Արտադրանքի խոփանը ուրբաթ օրը կազմում է 4%, երկուշաբթի և հինգշաբթի օրերին՝ 2%, իսկ երեքշաբթի և չորեքշաբթի օրերին՝ 1%: Ստուգման համար վերցված ավտոմեքենան ունի գործարանային թերություն: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ այդ ավտոմեքենան արտադրվել է հինգշաբթի օրը:

213. Դուք խնդրում եք հարևանին, որպեսզի նա ջրի ձեր ծաղիկները, երբ դուք գնաք հանգստանալու: Առանց ջրելու ծաղիկները կչորանան 0,8 հավանականությամբ, իսկ ջրելով չորանալու հավանականությունը հավասար է 0,15-ի: 90 րոպես հավանականությամբ դուք վստահ եք, որ ձեր հարևանը չի սոռանա ջրել ծաղիկները: Դիցուք ծաղիկները չորացել են: Ինչպիսի՞ն է՞ հավանականությունը, որ հարևանը սոռացել էր ջրել դրանք:

214. Արկղում կա երեք մեփաղադրամ: Դրանցից մեկի երկու կողմը «գերբ» է, մյուս մեփաղադրամը կանոնավոր է, իսկ երրորդի ծանրության կենտրոնը շեղված է և 75 րոպեսով բացվում է «գերբ»-ը: Արկղից պատահականորեն ընտրում են մեկ մեփաղադրամ և նետում, որի վրա բացվում է «գերբ»-ը: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ դա երկու «գերբ» պարունակող մեփաղադրամն էր:

## Բ

215. 1, 2, 3, ...,  $n$  թվերից հաջորդաբար պատահականորեն ընտրում են երկու թիվ: Գտնել առաջին և երկրորդ թվերի միջև եղած փարբերության  $m$ -ից ( $m > 0$ ) փոքր չլինելու հավանականությունը:

216.  $t$  ժամանակամիջոցում հեռախոսակալանում  $k$  կանչ ստանալու հավանականությունը հավասար է  $P_t(k)$  -ի: Նամարելով, որ ցանկացած երկու հարևան ժամանակամիջոցներում կանչերի թվերը իրարից անկախ են, գտնել  $2t$  ժամանակամիջոցում  $s$  կանչ ստանալու  $P_{2t}(s)$  հավանականությունը: Ինչի՞ է հավասար  $P_{2t}(s)$  -ը, եթե  $P_t(k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$ :

217. Դիցուք ունենք արտաքին տեսքով միանման  $n$  սափոր, ընդ որում  $r$ -րդ սափորը պարունակում է  $r - 1$  կարմիր և  $n - r$  սպիտակ գնդիկներ: Պատահական ընտրված սափորից պատահականորեն հաջորդաբար առանց վերադարձի հանում են 2 գնդիկ: Գտնել 2-րդ հանված գնդիկի սպիտակ լինելու հավանականությունը:

218.  $S = \{1, 2, 3, \dots, N\}$  բազմության բոլոր ենթաբազմությունների համախմբությունից վերադարձումով ընտրության սխեմայով ընտրում են  $A_1$  և  $A_2$  բազմությունները: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ :

219. Կորած ինքնաթիռի որոնման համար առանձնացրել են 10 ուղղաթիռ, որոնցից յուրաքանչյուրը կարող է օգտագործվել որոնման համար երկու հնարավոր շրջաններից մեկում, որպես ինքնաթիռը կարող է գտնվել 0,8 և 0,2 հավանականություններով: Ինչպես՞ պետք է բաշխել ուղղաթիռները ըստ որոնման շրջանների, որպեսզի ինքնաթիռի հայտնաբերելու հավանականությունը լինի մեծագույն, եթե յուրաքանչյուր ուղղաթիռ հայտնաբերում է որոնման շրջանում գտնվող ինքնաթիռը 0,2 հավանականությամբ, իսկ որոնումը կատարվում է յուրաքանչյուր ուղղաթիռով անկախ մյուսներից: Գտնել ինքնաթիռը հայտնաբերելու հավանականությունը որոնման լավագույն փորձերակի դեպքում:

220. Ուսանողների խումբը բաղկացած է  $a$  գերազանցիկներից,  $b$  լավ և  $c$  թույլ սովորող ուսանողներից: Քննության ժամանակ գերազանցիկը ստանում է միայն գերազանց գնահատականներ, լավ սովորող ուսանողը՝ հավասար հավանականությամբ գերազանց և լավ գնահատականներ, թույլ սովորող ուսանողը՝ հավասար հավանականությամբ լավ, բավարար և անբավարար գնահատականներ: Քննություն են հանձնում այդ խմբից պատահականորեն ընտրված երեք ուսանող: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ նրանք կստանան գերազանց, լավ, բավարար գնահատականներ (ցանկացած կարգով):

221. Որոշ վայրում փվյալ օրվա եղանակը նախորդ օրվա պես լինելու հավանականությունը հավասար է  $p$ -ի, եթե նախորդ օրը անձրևային էր

և  $q$ -ի, եթե այդ օրը անձրևային չէր ( $p < 1$  կամ  $q < 1$ ): Գտնել  $n$ -րդ օրը անձրևային լինելու  $p_n$  հավանականությունը: Նաշվել  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ :

222.  $A$  և  $B$  խաղացողներից յուրաքանչյուրը հերթախաղը շահելու դեպքում սրանում է մեկ միավոր:  $A$ -ն հերթախաղը շահում է  $\alpha$  հավանականությամբ,  $B$ -ն՝  $\beta$  հավանականությամբ, ընդ որում,  $\alpha > \beta$ ,  $\alpha + \beta = 1$ : Ամբողջ խաղը հաղթում է այն խաղացողը, որը հակառակորդից առաջ է անցնում 2 միավորով: ա) Գտնել յուրաքանչյուր խաղացողի ամբողջ խաղը փանելու հավանականությունը, բ) ո՞րն է ավելի շահավետ  $A$  խաղացողի համար, խաղալ մեկ հերթախաղ, թե ամբողջ խաղը:

223.  $A$  և  $B$  խաղացողներ, որոնք ունեն համապատասխան  $a$  և  $b$  դրամագուլխներ, խաղում են մոլեխաղ, որը բաղկացած է առանձին հերթախաղերից: Նրանցից յուրաքանչյուրը հերթախաղը շահում է  $\frac{1}{2}$  հավանականությամբ: Յուրաքանչյուր հերթախաղից հետո պարտվողը վճարում է հաղթողին 1 դրամ: Խաղը շարունակվում է մինչև նրանցից մեկի սննկացումը: Գտնել  $B$  խաղացողի սննկանալու հավանականությունը:

224. Ենթադրենք նախորդ խնդրում  $A$  խաղացողը շահում է  $p > \frac{1}{2}$  հավանականությամբ և պարտվում է  $q = 1 - p$  հավանականությամբ: Գտնել երկրորդ խաղացողի սննկանալու հավանականությունը:

225.  $(N + 1)$  սափորներից յուրաքանչյուրը պարունակում է  $N$  սպիտակ և սև գնդիկներ: Գնդիկների բաշխումը ըստ գույնի փարբեր է բոլոր սափորներում, իսկ պատահական ընտրած սափորում անհայտ է: Պատահական սափորից պատահականորեն վերցնում են մեկ գնդիկ և փեղափոխում են մեկ ուրիշ սափոր: Այդ սափորից վերցրած գնդիկը փեղափոխվում է մեկ այլ սափոր և այդպես շարունակ: Տեղափոխությունները կատարում են  $(N + 1)$  անգամ այնպես, որ յուրաքանչյուր սափոր մասնակցում է միայն մեկ անգամ, ընդ որում  $(N + 1)$ -րդ փեղափոխությունը կատարվում է առաջին ընտրած սափորը: Գտնել յուրաքանչյուր սափորում սկզբնական պարունակության պահպանվելու հավանականությունը:

226.  $N$  հրաձիգներին կարելի է բաժանել չորս խմբի՝  $a_1$  գերազանցիկ հրաձիգ,  $a_2$  լավ,  $a_3$  միջակ,  $a_4$  վատ: Մեկ կրակոցով թիրախին դիպչելու հավանականությունը  $i$ -րդ խմբի հրաձիգի համար հավասար է  $p_i$ -ի,  $i = 1, 2, 3, 4$ : Երկու պատահական ընտրած հրաձիգները կրակում են միևնույն թիրախին: Գտնել զոնե մեկ դիպուկ կրակոցի հավանականությունը:

227. Չորս  $a, b, c, d$  մարդկանցից  $a$ -ն սրացել է տեղեկություն, որը «այո» կամ «ոչ» ազանջանով հաղորդում է  $b$ -ին,  $b$ -ն՝  $c$ -ին,  $c$ -ն՝  $d$ -ին, իսկ  $d$ -ն հաղորդում է սրացված տեղեկությունը նույն ձևով, ինչպես մյուսները: Նայանի է, որ նրանցից յուրաքանչյուրը ասում է ճշմարտությունը երեք դեպքերից մեկում: Որոշել առաջին մարդու ճշմարտություն ասելու հավանականությունը, եթե հայտնի է, որ չորրորդը ճշմարտություն է ասել:

228. Անհայտ գույնի  $n$  գնդիկներ պարունակող սափորից հանում են մեկ գնդիկ, որը սպիտակ է: Գտնել երկրորդ հանված գնդիկի սպիտակ լինելու հավանականությունը: Մափորի սկզբնական պարունակության մասին բոլոր ենթադրությունները համարել հավասարահնարավոր:

229. Անհայտ գույնի  $n$  գնդիկներ պարունակող սափորից հանում են մեկ գնդիկ, որը սպիտակ է: Այն ետ վերադարձնելուց հետո հանում են մեկ գնդիկ ևս: Գտնել այդ գնդիկի սպիտակ լինելու հավանականությունը, եթե սկզբնական պարունակության մասին բոլոր ենթադրությունները հավասարահնարավոր են:

230. Իրարից անկախ աշխատող չորս փարերից բաղկացած սարքի փարերից երկուսը խափանվել են: Գտնել առաջին և երկրորդ փարերի խափանվելու հավանականությունը, եթե այն առաջին, երկրորդ, երրորդ և չորրորդ փարերի համար համապատասխանաբար հավասար է՝  $p_1=0,1$ ,  $p_2=0,2$ ,  $p_3=0,3$ ,  $p_4=0,4$ :

231. Ուսումնարանում սովորում են  $n$  ուսանող, որոնցից  $n_k$ -ն ( $k = 1, 2, 3$ ) սովորում են  $k$ -րդ փարին: Երկու պատահական ընտրած ուսանողներից մեկը մյուսից շուտ է ընդունվել: Գտնել այդ ուսանողի երրորդ փարին սովորելու հավանականությունը:

232. Կապի գծով հաղորդվում են  $AAAA, BBBB, CCCC$  հաջորդականությունները համապատասխանաբար  $p_1, p_2, p_3$  ( $\sum_{i=1}^3 p_i = 1$ ) հավանականություններով: Յուրաքանչյուր հաղորդվող  $A, B$  կամ  $C$  փառ ճիշտ է ընդունվում  $\alpha$  հավանականությամբ, իսկ  $\frac{1}{2}(1 - \alpha)$  և  $\frac{1}{2}(1 - \alpha)$  հավանականություններով ընդունվում է մյուս երկու փառերի փոխարեն: Ենթադրվում է, որ փառերը աղավաղվում են իրարից անկախ: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ հաղորդված է եղել  $AAAA$ -ն, եթե ընդունված է  $ABCA$ -ն:

### Բեռնուլիի բանաձևը

Եթե  $n$  անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում  $A$  պատահույթի երևալու հավանականությունը հավասար է  $P(A) = p$  (Բեռնուլիի սխեման), իսկ  $\mu_n$ -ը  $A$  պատահույթի ի հայտ գալու թիվն է  $n$  փորձերում, ապա

$$P(\mu_n = m) = P_n(m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}, \quad m = 0, 1, \dots, n :$$

**Բեռնուլիի բանաձևի ընդհանրացումը:** Դիցուք կարարում են  $n$  անկախ փորձեր, որոնցից յուրաքանչյուրում կարող է իրականանալ  $A_1, A_2, \dots, A_s$  անհամարելի պատահույթներից որևէ մեկը: Նշանակենք  $P(A_i) = p_i, i = 1, \dots, s, \sum_{i=1}^s p_i = 1$ : Նավանականությունը, որ  $n$  անկախ փորձերում  $A_1$  պատահույթը կիրականանա ճիշտ  $m_1$  անգամ,  $A_2$  պատահույթը՝ ճիշտ  $m_2$  անգամ և այլն,  $A_s$  պատահույթը՝ ճիշտ  $m_s$  անգամ, հաշվում են հետևյալ բանաձևով՝

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_s) = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_s!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_s^{m_s},$$

երբ  $m_1 + m_2 + \dots + m_s = n$  և  $P_n(m_1, m_2, \dots, m_s) = 0$ , երբ  $m_1 + m_2 + \dots + m_s \neq n$ :

Այն  $m$ -ը, որին համապատասխանում է  $P_n(m)$ -ի մեծագույն արժեքը, կոչվում է  $A$  պատահույթի ի հայտ գալու ամենահավանական թիվ և նշանակվում է  $m_o$ -ով:

$$np - (1 - p) \leq m_o \leq np + p :$$



Եթե  $p = p_n = \frac{\lambda_n}{n}$ , որպեսզի  $\lambda_n \rightarrow \lambda$  ( $0 < \lambda < \infty$ ) երբ  $n \rightarrow \infty$ , ապա ճիշտ է հետևյալ առնչությունը (**Պուասոնի թեորեմ**)՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\mu_n = m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad m = 0, 1, 2, \dots :$$

**Մուավր-Լապլասի լոկալ սահմանային թեորեմ**: Եթե  $p = \text{const}$ ,  $0 < p < 1$ ,  $q = 1 - p$ , ապա հավասարաչափ ըստ այն  $m$ -երի, որոնց համար  $\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$  մեծությունը սահմանափակ է, փրեդի ունի

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( P(\mu_n = m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi \left( \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \right) \right) = 1,$$

որպեսզի  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  Ֆունկցիայի արժեքները բերված են խնդրագրքի աղյուսակ 1-ում:

**Մուավր-Լապլասի ինտեգրալային սահմանային թեորեմ**: Եթե  $p = \text{const}$ ,  $0 < p < 1$ ,  $q = 1 - p$ , ապա հավասարաչափ  $x_1$ -ի և  $x_2$ -ի նկատմամբ ( $\forall x_1, x_2 \in R^1$ )

$$P(x_1 < \frac{\mu_n - np}{\sqrt{npq}} < x_2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

որպեսզի  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$  Ֆունկցիայի արժեքները բերված են խնդրագրքի աղյուսակ 2-ում:

## Ա

233. Զառը նետվում է 5 անգամ: Ինչպիսի՞ն է երեքին բազմապարիկ թվի երկու անգամ բացվելու հավանականությունը:

234. Կապարում են հինգ անկախ փորձեր, որոնցից յուրաքանչյուրում միաժամանակ նետում են երեք գառ: Ինչի՞ն է հավասար փորձերից երկուսում երեքական միավոր սրանալու հավանականությունը:

235. Ինչպիսի՞ հավանականությամբ 52 խաղաթղթերից բաղկացած կապուկը չորս խաղացողների միջև բաժանելու ժամանակ նրանցից մեկի մոտ երեք անգամ անընդմեջ «մեկանոց» չի ընկնի:

236.  $R$  շառավիղ ունեցող շրջանի մեջ ներգծված է կանոնավոր եռանկյուն: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ այդ շրջանի մեջ պարահավանորեն նշված 4 կետերը կգտնվեն եռանկյան մեջ:

237.  $l$  երկարություն ունեցող  $AB$  հարվածը բաժանվում է  $C$  կետով 2:1 հարաբերությամբ: Այդ հարվածի վրա պարահավանորեն նետում են 4 կետ: Գտնել դրանցից երկուսի  $C$  կետից ձախ, երկուսի՝ աջ գտնվելու հավանականությունը:

238. **Քանախի խնդիրը:** Մի մաթեմատիկոս իր մոտ ունի լուցկու երկու փուփ: Ամեն անգամ լուցկի հանելիս նա պարահավանորեն վերցնում է այդ փուփերից մեկը: Որոշ ժամանակ անց նա նկատում է, որ փուփերից մեկը դարարկ է: Ինչի՞ է հավասար այդ դեպքում երկրորդ փուփի մեջ  $k$  հարիկ գտնվելու հավանականությունը, եթե սկզբում յուրաքանչյուր փուփի մեջ կար  $n$  հարիկ:

239. Պարահույթի գոնե մեկ անգամ երևալու հավանականությունը չորս անկախ փորձերում հավասար է 0,59-ի: Ինչպիսի՞ն է մեկ փորձում պարահույթի երևալու հավանականությունը, եթե յուրաքանչյուր փորձում այդ հավանականությունը նույնն է:

240. Կարարում են 20 անկախ փորձ, որոնցից յուրաքանչյուրում միաժամանակ նետում են 3 մետաղադրամ: Գտնել գոնե մեկ փորձում երեք «գերբ» բացվելու հավանականությունը:

241. Կարարվում է հրաձգություն մինչև առաջին դիպուկ կրակոցը: Մեկ կրակոցով թիրախին դիպչելու հավանականությունը հավասար է 0,2-ի: Գտնել միայն 6 կրակոց փալու հավանականությունը:

242. Մեկ կրակոցով թիրախի «10»-ը խոցելու հավանականությունը հավասար է 0,2-ի: Քանի՞ անկախ կրակոց է պետք կարարել, որպեսզի 0,9-ից ոչ պակաս հավանականությամբ «10»-ը խոցվի գոնե մեկ անգամ:

243. Քանի՞ անգամ է պետք նետել երկու գառը, որ գոնե մեկ անգամ «6, 6» բացվելու հավանականությունը լինի մեծ  $\frac{1}{2}$ -ից:

244. Արտադրանքի 5%-ը խոփան է: Որոշել պարահականորեն վերցրված հինգ արտադրանքներից գոնե երկուսի խոփանված լինելու հավանականությունը:

245. Արտադրանքի 90%-ը լավորակ է, 9%-ը ունի վերացնելի արար, 1%-ը՝ անվերացնելի արար: Գտնել պարահականորեն վերցրած երեք արտադրանքներից գոնե մեկի լավորակ և գոնե մեկի վերացնելի արար ունենալու հավանականությունը:

246. Գտնել 30 անձերի համար փարվա 12 ամիսներից 6 ամիսներում երկուական ծննդյան օր, իսկ մյուս 6 ամիսներում երեքական ծննդյան օր ընկնելու հավանականությունը:

247. Կանոնավոր մեքադադրամը նետում են 10 անգամ: Ինչպիսի հավանականությամբ պարահական իրագործումը կամ կսկսվի 3 հաջորդական «գերբով», կամ կավարտվի երկու հաջորդական «գիրով»:

248. Ենթադրենք ընփանիքում ծնված երեխաները, անկախ ընփանիքում արդեն առկա մյուս երեխաների սեռից, հավասար հավանականությամբ կարող են լինել աղջիկ կամ փղա: 5 երեխաներ ունեցող ընփանեկան զույգի համար հաշվել հետևյալ պարահայտների հավանականությունները՝

- ա) բոլոր երեխաները նույն սեռի են;
- բ) երեք մեծ երեխաները փղաներ են, իսկ մյուսները՝ աղջիկներ;
- գ) երեխաներից ճիշտ 3-ը փղաներ են;
- դ) երկու մեծ երեխաները աղջիկներ են;
- ե) երեխաներից գոնե մեկը աղջիկ է:

249. Նավանականությունը, որ հասարակ վրա արտադրված մասը կլինի խոփանված, հավասար է 0,1-ի: Նաշվել պարահականորեն ընփարված 10 արտադրանքներից ամենաշատը մեկի խոփանված լինելու հավանականությունը (հաշվել Բեռնուլիի բանաձևով և Պուասոնի մոփավոր բանաձևով):

250. Ենթադրելով, որ զրքի մեկ էջի վրա արված փղագրական սխալների թիվն ունի  $\lambda = 1/2$  պարամետրով Պուասոնի բաշխում, հաշվել

տվյալ էջում առնվազն մեկ փայագրական սխալ լինելու հավանականությունը:

251. Նաբվաձը բաժանվում է մասերի  $1 : 2 : 3 : 4$  հարաբերությամբ: Դրա վրա պարահականորեն նշում են 8 կետ: Գրնել առաջին հարվածին 3 կետ, երկրորդին՝ 2 կետ, իսկ մնացած կետերը 4-րդ հարվածին պատկանելու հավանականությունը:

252. Ի՞նչն է ավելի հավանական սրանալ՝ գոնե մեկ «6» չորս զառի նետումով, թե գոնե մեկ «6, 6» երկու զառերի 24 նետումներով:

253. Ի՞նչն է ավելի հավանական սրանալ՝
- ա) գոնե մեկ «6»՝ զառի վեց նետումով,
  - բ) գոնե երկու «6»՝ զառի 12 նետումով,
  - գ) գոնե երեք «6»՝ զառի 18 նետումով:

254. Տվյալ բասկետբոլիստի համար գնդակը մեկ նետումով զամբյուղ զցելու հավանականությունը հավասար է 0,4-ի: Կարարվել է 10 նետում: Գրնել հաջող փորձերի ամենահավանական թիվը և նրան համապատասխանող հավանականությունը:

255. Յուրաքանչյուր փորձում պարահույթի երևալու հավանականությունը հավասար է 0,8-ի: Որոշել անկախ փորձերի  $n$  թիվը, որոնց դեպքում պարահույթի ի հայտ գալու ամենահավանական թիվը հավասար կլինի 20-ի:

256. Մերադադրամը նետվում է 20 անգամ: Գրնել «գերբի» ի հայտ գալու ամենահավանական թիվը:

257. Գրնել  $A$  պարահույթի 2400 անկախ փորձերում 1400 անգամ երևալու հավանականությունը, եթե հայրնի է, որ փորձերից յուրաքանչյուրում այդ պարահույթի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է 0,6-ի:

258. Մեկ կրակոցով թիրախին դիպչելու հավանականությունը հավասար է 0,8 -ի: Գրնել 100 կրակոցների դեպքում թիրախին 75 անգամ դիպչելու հավանականությունը:

259. 200 անկախ կրակոցներից 116-ը դիպել են թիրախին: Մեկ կրակոցով թիրախին դիպչելու հավանականության ո՞ր արժեքն է ավելի հավանական՝  $\frac{1}{2}$ , թե՛  $\frac{2}{3}$ , եթե մինչև փորձ կատարելը այդ ենթադրությունները հավասարահնարավոր են և միակ հնարավոր:

260. Զառը նետվում է 80 անգամ: 0,99 հավանականությամբ գրնել այն սահմանները, որտեղ կգտնվի «6» -ի երևալու  $m$  թիվը:

261. Անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում պատահույթի երևալու հավանականությունը հավասար է 0,2-ի: Գտնել փորձերի փոքրագույն  $n$  թիվը, որի դեպքում 0,99 հավանականությամբ հնարավոր լինի պնդել, որ պատահույթի երևալու հարաբերական հաճախականությունը կշեղվի իր հավանականությունից բացարձակ արժեքով ոչ ավելի, քան 0,04-ով:

262. Պատահույթի երևալու հավանականությունը 900 անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում հավասար է 0,5-ի: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ պատահույթի հարաբերական հաճախականությունը կշեղվի իր երևալու հավանականությունից ոչ ավելի, քան 0,02-ով:

263. Տեխնիկական վերահսկողության բաժինը ստուգման է ենթարկում 475 դետալ: Դետալի խտրանված լինելու հավանականությունը հավասար է 0,05-ի: 0,95 հավանականությամբ գրնել այն սահմանները, որտեղ կգտնվի խտրանված դետալների  $m$  թիվը:

264. Խաղացողը շահում է 7 դրամ, եթե զառի վրա բացվում է «6»-ը և վճարում է 1 դրամ՝ հակառակ դեպքում: 0,999936 հավանականությամբ ինչ՞ սահմաններում կգտնվի նրա շահած գումարը, եթե զառը նետվում է 8000 անգամ:

## Բ

265. Նպատակակերը ոչնչանում է, եթե նրան դիպչում են յուրաքանչյուրը 120 կգ կշիռ ունեցող երկու ավիառումբ, կամ 200 կգ կշիռ ունեցող մեկ ավիառումբ: Ինքնաթիռը կարող է բեռնվել ոչ ավելի, քան 1200 կգ ընդհանուր կշիռ ունեցող ցանկացած միաբեռնակ ավիառումբերով: Ո՞ր փոխի ավիառումբերից է ձեռնարկ բեռնել ինքնաթիռը, եթե հայտնի է, որ

առաջին փիլի ավիառումբի դիպչելու հավանականությունը հավասար է 0,06-ի, իսկ երկրորդինը՝ 0,08-ի:

266.  $k$  հանգույցներից բաղկացած գործիքը աշխատել է  $t$  ժամանակ: Յուրաքանչյուր հանգույցի հուսալիությունը (անխափան աշխատանքի հավանականությունը)  $t$  ժամանակահատվածում հավասար է  $p$ -ի:  $t$  ժամանակ անց գործիքը կանգ է առնում: Բանվորը սփուգում և փոխարինում է շարքից դուրս եկած հանգույցները: Մեկ հանգույցը փոխարինելու համար նա ծախսում է  $\tau$  ժամանակ: Գտնել կանգ առնելուց  $2\tau$  ժամանակ անց գործիքի աշխատունակ լինելու հավանականությունը:

267. Կապի  $A$  կետը միացված է 10 աբոնենտ ունեցող  $B$  կետի հետ: Յուրաքանչյուր աբոնենտ զբաղեցնում է գիծը միջին հաշվով ժամում 6 րոպե: Ցանկացած երկու աբոնենտների կանչերը անկախ են:

ա) Ինչպիսի՞ հավանականությամբ աբոնենտներից մեկը կսփանա մերժում (գիծը զբաղված է):

բ) Գտնել անխափան սպասարկման հավանականությունը, եթե գիծը պարունակում է 4 կանալ:

268. Կապի  $A$  կետը պետք է միացնել 10 աբոնենտ ունեցող  $B$  կետի հետ: Յուրաքանչյուր աբոնենտ զբաղեցնում է գիծը՝ ժամում 12 րոպե: Ցանկացած երու աբոնենտների կանչերն անկախ են: Գտնել անխափան սպասարկման հավանականությունը, եթե գիծը պարունակում է 5 կանալ:

269. Երեք բանվոր իրենց հասարցների վրա արտադրում են միայն գերազանց և լավորակ մասեր, ընդ որում, նրանցից առաջինը և երկրորդը արտադրում են գերազանց որակի մասեր՝ 0,9 հավանականությամբ, իսկ երրորդը՝ 0,8 հավանականությամբ: Բանվորներից մեկը արտադրել է 8 մաս, որոնցից երկուսը լավորակ են: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ նույն բանվորի արտադրած հաջորդ 8 մասերից երկուսը կլինեն լավ, իսկ 6-ը՝ գերազանց որակի:

270. Կատարում են 4 անկախ փորձ, որոնցից յուրաքանչյուրում  $A$  պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է 0,3-ի:

$B$  պատահույթը փեղի է ունենում 1 հավանականությամբ, երբ  $A$  պատահույթը հանդես է եկել ոչ պակաս, քան 2 անգամ, չի կարող փեղի ունենալ, երբ  $A$  պատահույթը հանդես չի եկել և փեղի է ունենում 0,6 հավանականությամբ, երբ  $A$  պատահույթը հանդես է եկել մեկ անգամ: Գտնել  $B$  պատահույթի փեղի ունենալու հավանականությունը:

271. Թիրախի առավելագույն միավորը 10-ն է: Գտնել թիրախին երեք կրակոցով 28-ից ոչ պակաս միավոր ստանալու հավանականությունը, եթե 30 միավոր ստանալու հավանականությունը հավասար է 0,008-ի: Նայրնի է նաև, որ մեկ կրակոցով 8 միավոր ստանալու հավանականությունը հավասար է 0,15-ի, իսկ 8-ից պակաս միավոր՝ 0,4-ի:

272. Երկու խաղացողներից յուրաքանչյուրը նետում է դրամը 4 անգամ: Նաղթում է այն խաղացողը, որի մոտ բացված գերբերի թիվը ավելի մեծ է: Գտնել շահելու հավանականությունը յուրաքանչյուր խաղացողի համար:

273. Երկու բասկետբոլիստներից յուրաքանչյուրը երեք անգամ նետում է գնդակը դեպի զամբյուղ: Յուրաքանչյուր նետման ժամանակ գնդակը զամբյուղի մեջ ընկնելու հավանականությունը հավասար է համապատասխանաբար է 0,6-ի և 0,7-ի: Գտնել հեփսյալ պատահույթների հավանականությունները.

ա) բասկետբոլիստները կատարել են հավասար թվով հաջող նետումներ,

բ) առաջին բասկետբոլիստը կատարել է ավելի շատ հաջող նետումներ, քան երկրորդը:

274. Երկու խաղընկերներից յուրաքանչյուրը  $n$  անգամ նետում է մետաղադրամը: Գտնել նրանց մոտ միևնույն թվով «գերբ» բացվելու հավանականությունը:

275. Երկուսը խաղում են մինչև հաղթանակը, ընդ որում անհրաժեշտ է, որ առաջինը հաղթանակը փանի  $m$  հերթախաղերում, իսկ երկրորդը՝  $n$  հերթախաղերում: Ցանկացած հերթախաղում շահելու հավանականությունը առաջին խաղացողի համար հավասար է  $p$ -ի, իսկ երկրորդի

համար՝  $q = 1 - p$ : Գտնել առաջին խաղացողի հաղթանակ փանելու հավանականությունը:

276. Երկու խաղացող պայմանավորվում են, որ շահումը կստանան, ով կշահի հերթախաղերի որոշակի քանակ: Խաղը ընդհատվել է, երբ առաջին խաղացողին մինչև հաղթանակը մնացել է հաղթել  $m$ , իսկ երկրորդին՝  $n$  հերթախաղերում: Ինչպես բաժանել խաղագումարը, եթե ցանկացած հերթախաղում շահելու հավանականությունը երկու խաղացողի համար էլ հավասար է  $\frac{1}{2}$ -ի:

277. Յուրաքանչյուր փորձում  $A$  պայտահույթի հանդես գալու հավանականությունը հավասար է  $p$ -ի: Գտնել  $n$  անկախ փորձերում  $A$  պայտահույթի զույգ թվով հանդես գալու հավանականությունը:

278. Միջաբի  $k$  ձու ածելու հավանականությունը հավասար է  $p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , իսկ ձվից միջաբ զարգանալու հավանականությունը՝  $p$ : Գտնել միջաբի  $l$  սերունդ ունենալու հավանականությունը:

279. Մեկ կրակոցով նպատակակետին դիպչելու հավանականությունը հավասար է  $p$ , իսկ  $k \geq 1$  դիպումներով նպատակակետը խոցելու հավանականությունը՝  $1 - q^k$ : Ինչի՞ տեսքով է հավասար  $n$  կրակոցով նպատակակետը խոցելու հավանականությունը:

280.  $m$  վնասվածքների դեպքում սարքը նորոգման կանգնեցնելու անհրաժեշտության հավանականությունը որոշվում է  $Q(m) = 1 - (1 - \frac{1}{\omega})^m$  բանաձևով, որտեղ  $\omega$ -ն մինչև սարքը նորոգման կանգնեցնելը վնասվածքների միջին թիվն է: Ապացուցել, որ  $n$  արտադրական ցիկլերից հետո նորոգման անհրաժեշտության հավանականությունը որոշվում է  $W_n = 1 - (1 - \frac{p}{\omega})^n$  բանաձևով, որտեղ  $p$ -ն մեկ արտադրական ցիկլի ընթացքում վնասվածք ստանալու հավանականությունն է:

281. Սուզանավը գրոհում է նավը, արձակելով հաջորդաբար և մեկը մյուսից անկախ  $n$  փորպեղ: Յուրաքանչյուր փորպեղ դիպչում է նավին  $p$  հավանականությամբ: Տորպեղը դիպչելու դեպքում  $\frac{1}{m}$  հավանականությամբ ջրասուզվում է նավի  $m$  մեկուսամասերից մեկը: Գտնել նավի



խորպակման հավանականությունը, եթե դրա համար անհրաժեշտ է ջրասույգ անել երկուսից ոչ պակաս մեկուսամաս:

282. Ինքնաթիռը գնդակոծվում է  $n$  անկախ կրակոցներով: Նրանցից յուրաքանչյուրը  $p_1$  հավանականությամբ դիպչում է այն մասին, որտեղ այն անմիջապես խոցում է ինքնաթիռը,  $p_2$  հավանականությամբ դիպչում է վառելիքի բաքին և  $p_3$  հավանականությամբ ընդհանրապես չի դիպչում ինքնաթիռին: Վառելիքի բաքին դիպած արկը ճեղք է բացում նրա մեջ, որտեղից մեկ ժամում արտահոսում է  $k$  լիտր վառելանյութ: Կորցնելով  $M$  լիտր վառելանյութ, ինքնաթիռը դառնում է անմարտունակ: Գտնել գնդակոծությունից մեկ ժամ անց ինքնաթիռի անմարտունակ լինելու հավանականությունը:

283. Մրցության մեջ են մտել  $k$  հրաձիգներ, որոնցից յուրաքանչյուրը  $n$  անգամ կրակում է թիրախին: Մեկ կրակոցով թիրախին դիպչելու հավանականությունը  $i$ -րդ հրաձիգի համար հավասար է  $p_i$ -ի ( $i = 1, 2, \dots, k$ ): Մրցությունը շահում է առավել շատ դիպումներ կատարող հրաձիգը: Ինչ՞ հավանականությամբ մրցումը կհաղթի հրաձիգներից մեկը:

284. Բեռնուլիի սխեմայում յուրաքանչյուր փորձի հաջողության հավանականությունը հավասար է  $p$ -ի: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ  $k$ -րդ հաջողությունը տեղի կունենա  $l$ -րդ փորձում:

285. Բեռնուլիի սխեմայում հաջողության հավանականությունը  $p$  է: Գտնել  $2n$  այդպիսի փորձերում  $m + n$  հաջողություններ և բոլոր զույգ համարներ ունեցող փորձերում այն սրանալու հավանականությունը:

286. Բեռնուլիի սխեմայում  $p = \frac{1}{2}$ : Ապացուցել, որ

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \leq P_{2n}(n) < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} :$$

287. Մասնիկի շարժումը առանցքի ամբողջ կետերով դեկավարվում է Բեռնուլիի սխեմայով, որտեղ «1» ելքի երևալու հավանականությունը  $p$  է: Մասնակիցը իր դիրքից տեղափոխվում է հարևան աջ կետը, եթե փվյալ փորձում երևացել է «1»-ը, հակառակ դեպքում՝ ձախ կետը: Գտնել

0 կերպից մասնիկի  $n$  քայլերից հետո  $m$  կերպ փեղափոխվելու հավանականությունը:

288.  $p$  հավանականությամբ յուրաքանչյուր վայրկյան անկախ ժամանակի մյուս պահերից ճանապարհով անցնում է ավտոմեքենա: Ներհոտնին ճանապարհը անցնելու համար անհրաժեշտ է 3 վայրկյան: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ ճանապարհին մոտեցող հեղուկորնը անցումը կապարելու համար սրիպված կլինի սպասել՝ ա) 3 վրկ., բ) 4 վրկ., գ) 5 վրկ.:

289. Բեռնուկիի սխեմայում  $p$ -ն «1» ելքի հավանականությունն է,  $q = 1 - p$ -ն՝ «0» ելքի հավանականությունը: Գտնել 00 (երկու հաջորդական զրո) շղթայի ավելի շուր քան 01 շղթան իրականանալու հավանականությունը: Նաշվել այդ հավանականությունը այն մասնավոր դեպքում, երբ  $p = \frac{1}{2}$  :

290. 289-րդ խնդրի պայմաններում գտնել 00 (երկու հաջորդական զրո) շղթայի ավելի շուր քան 10 շղթան իրականանալու հավանականությունը: Նաշվել այդ հավանականությունը  $p = \frac{1}{2}$  դեպքում:

291. Դիփարկենք անկախ փորձերի հաջորդականություն, որտեղ յուրաքանչյուր փորձը զառի ներումն է: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ «6»-ի երեք հաջորդական իրականացումը փեղի կունենա ավելի շուր, քան «1»-ի երկու հաջորդական իրականացումը:

292. Դիփարկենք անկախ փորձերի հաջորդականությունը, որոնցից յուրաքանչյուրում որևէ պարահույթ («հաջողություն») փեղի է ունենում  $p$  հավանականությամբ, իսկ հակադիր պարահույթը՝ («անհաջողություն»)  $q = 1 - p$  հավանականությամբ: Ի՞նչ հավանականությամբ  $a$  հաջորդական «հաջողությունները» կիրականանան  $b$  հաջորդական «անհաջողություններից» ավելի շուր:

293.  $S = \{1, 2, \dots, N\}$  բազմությունից պարահականորեն և միմյանցից անկախ վերցվում են երկու  $A_1$  և  $A_2$  ենթաբազմություններ

այնպես, որ  $S$ -ին պարկանող փարրը անկախ մյուս փարրերից  $p$  հավանականությամբ մտնում է  $A_i$  բազմության մեջ և  $q = 1 - p$  հավանականությամբ մնում է այդ բազմությունից դուրս: Ինչի՞ է հավասար  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  պարահույթի հավանականությունը:

294.  $S = \{1, 2, \dots, N\}$  բազմությունից ենթաբազմությունների ընտրության նույն սխեմայով, որը բերված է խնդիր 293-ում, իրարից անկախ ընտրվում են  $A_1, A_2, \dots, A_r$ ,  $r \geq 2$  ենթաբազմություններ: Գտնել ընտրված ենթաբազմությունների զույգ առ զույգ չհատվելու հավանականությունը:

295. Դիցուք  $P$ -ն և  $P'$ -ը  $n$  և  $n + 1$  անկախ փորձերում համապարասխանաբար  $A$  պարահույթի երևալու ամենահավանական թվի հավանականություններն են (յուրաքանչյուր փորձում  $P(A) = p$ ): Ապացուցել, որ  $P' \leq P$ , ընդ որում, եթե  $(n + 1) \cdot p$ -ն ամբողջ թիվ չէ, ապա հավասարության նշանը բացառվում է:

296. Կապի գծով հաղորդում են 100 նշան: Նաղորդման ընթացքում յուրաքանչյուր նշան կարող է աղավաղվել անկախ մյուսներից 0,005 հավանականությամբ: Գտնել երեքից ոչ ավել նշանների աղավաղված լինելու հավանականության մոտավոր արժեքը:

297. 130 կանաչ ունեցող կապի գիծը միացնում է  $A$  կետը 1000 արճեննար ունեցող  $B$  կետի հետ: Արճեննարներից յուրաքանչյուրը օգտվում է հեռախոսից միջինը ժամում 6 րոպե: Գտնել արճեննարների անխափան սպասարկման հավանականությունը:

298. 2100 անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում պարահույթի երեվալու հավանականությունը հավասար է 0,7-ի: Ինչպիսի՞ հավանականությամբ պարահույթը կերևա ա) ոչ պակաս քան 1470 և ոչ ավելի քան 1500 անգամ, բ) ոչ պակաս քան 1470 անգամ, գ) 1469-ից ոչ ավելի անգամ:

299. Անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում պարահույթի երևալու հավանականությունը հավասար է 0,8-ի: Զանի՞ անգամ պետք է կրկնել

փորձը, որպեսզի 0,9 հավանականությամբ հնարավոր լինի պնդել, որ պարահույթը կերևա ոչ պակաս, քան 75 անգամ:

300. Թռիչքի մեկ ժամվա ընթացքում ասուպի հետ փիեզերանավի բախման հավանականությունը հավասար է 0,001-ի: Գտնել թռիչքի երեք ամսվա ընթացքում (հունիսի 1-ից մինչև օգոստոսի 31-ը) այդպիսի ասուպի հետ բախումների թվի վարահեղի սահմանները, եթե գործնականապես վարահույթյան հավանականությունը րվյալ դեպքում հավասար է 0,995-ի:

301. 1000 փեղանոց թափրոնը ունի երկու փարբեր մուրքեր: Յուրաքանչյուր մուրքի մոտ կա հանդերձարան: Քանի՞ փեղ է անհրաժեշտ յուրաքանչյուր հանդերձարանում, որպեսզի միջինում 100-ից 99 դեպքում բոլոր հանդիսատեսները կարողանան օգտվել այն մուրքի հանդերձարանի ծառայությունից, որպեղից ներս են մտել:

302. Գտնել այնպիսի  $\varepsilon > 0$  թիվ, որի դեպքում 0,99 հավանականությամբ պարահույթի հարաբերական հաճախականության և դրա երևալու հավանականության շեղման բացարձակ արժեքը չգերազանցի  $\varepsilon$ -ին:

303. Ավանում կա 2800 բնակիչ: Նրանցից յուրաքանչյուրը ամսական մոտ 6 անգամ գնացքով մեկնում է քաղաք, ուղևորության օրերը մեկը մյուսից անկախ ընտրելով պարահականորեն: Գտնել գնացքի այն փոքրագույն փարողությունը, որի դեպքում այն ամբողջությամբ կլցվի միջին հաշվով 100 օրում ոչ ավելի, քան մեկ անգամ (գնացքը գնում է օրական մեկ անգամ):

## Պարահական մեծություն և բաշխման ֆունկցիա

Դիցուք փրված է  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  հավանականային փարածությունը:  $\Omega$ -ի վրա որոշված և իրական արժեքներ ընդունող չափելի  $\xi = \xi(\omega)$  ֆունկցիան անվանում են պարահական մեծություն: Այսինքն՝

$$\xi : \Omega \rightarrow R^1, \quad \xi^{-1}(B) = \{\omega : \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F},$$

$\forall B \in \mathcal{B}(R^1)$ :  $P\{\omega : \xi(\omega) \in B\}$  հավանականությունը, որպես ֆունկցիա  $B$ -ից,  $B \in \mathcal{B}(R^1)$ , կոչվում է  $\xi$  պարահական մեծության հավանականությունների բաշխում կամ  $\xi$  պարահական մեծության բաշխում և նշանակվում է  $\mathcal{P}_\xi(B)$ -ով՝

$$\mathcal{P}_\xi(B) = P(\omega : \xi(\omega) \in B), \quad B \in \mathcal{B}(R^1) :$$

Մասնավոր դեպքում, երբ  $B = (-\infty, x)$ ,  $P(\omega : \xi(\omega) \in (-\infty, x)) = P(\omega : \xi(\omega) < x)$  հավանականությունը, որպես ֆունկցիա  $x$ -ից,  $x \in R^1$ , անվանում են  $\xi$  պարահական մեծության բաշխման ֆունկցիա և նշանակում են  $F_\xi(x)$ -ով՝

$$F_\xi(x) = P(\omega : \xi(\omega) < x) = P(\xi < x) :$$

Բաշխման ֆունկցիան օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

1.  $F_\xi(x_1) \leq F_\xi(x_2)$ , երբ  $x_1 < x_2$ ,
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\xi(x) = F_\xi(-\infty) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_\xi(x) = F_\xi(+\infty) = 1$ ,
3.  $F_\xi(x - 0) = F_\xi(x)$ :

Նշենք նաև  $F_\xi(x)$ -ի մյուս կարևոր հատկությունները, որոնք բխում են 1.-3. հիմնական հատկություններից՝

- ա)  $0 \leq F_\xi(x) \leq 1$ ,
- բ)  $P(a \leq \xi < b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$
- գ)  $P(\xi = x) = F_\xi(x + 0) - F_\xi(x)$ ,

դ)  $F_\xi(x)$ -ը կարող է ունենալ ոչ ավելի քան հաշվելի թվով խզման կետեր:

1.-3. պայմաններին բավարարող ցանկացած  $F(x)$ ,  $x \in R^1$  ֆունկցիա հանդիսանում է որևէ  $\xi$  պարահական մեծության բաշխման ֆունկցիա՝  $F_\xi(x) = F(x)$ :

$\xi$  պարահական մեծությունն ունի դիսկրետ բաշխում, եթե այն ընդունում է վերջավոր կամ հաշվելի թվով արժեքներ՝  $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$  համապարախանաբար  $p_k = P(\xi = x_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , հավանականություններով,  $\sum_k p_k = 1$ : Դիսկրետ  $\xi$  պարահական մեծությունը բնութագրվում է հետևյալ աղյուսակով՝

$\xi$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_k$	$\dots$
$P$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_k$	$\dots$

$$p_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \sum_k p_k = 1,$$

որը կոչվում է  $\xi$ -ի բաշխման օրենք:

Այս դեպքում  $F_\xi(x)$ -ը աստիճանաձև է, նրա խզման կետերն են  $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ , իսկ յուրաքանչյուր  $x_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , խզման կետում խզման մեծությունը հավասար է

$$F_\xi(x_k + 0) - F_\xi(x_k) = p_k :$$

Դիսկրետ  $\xi$  պարահական մեծության բաշխման ֆունկցիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$F_\xi(x) = \sum_{k: x_k < x} p_k :$$

$\xi$  պարահական մեծությունն ունի բացարձակ անընդհատ բաշխում, եթե գոյություն ունի ոչ բացասական բորելյան  $f_\xi(x)$  ֆունկցիա այնպիսին, որ ցանկացած բորելյան  $B \in \mathcal{B}(R^1)$  բազմության համար

$$P_\xi(B) = P(\xi \in B) = \int_B f_\xi(x) dx,$$

որպեսզ  $\int_{R^1} f_\xi(x) dx = 1$ :  $f_\xi(x)$ -ը անվանում են  $\xi$  պարահական մեծության խտության ֆունկցիա կամ  $\xi$  պարահական մեծության խտություն:

Մասնավոր դեպքում, երբ  $B = (-\infty, x)$

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^x f_\xi(u) du,$$

որպեսզ  $\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x) dx = 1$ :

Ցանկացած  $f(x)$ ,  $x \in R^1$ , ֆունկցիա, որն օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

1.  $f(x) \geq 0$ ,
2.  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

հանդիսանում է որևէ  $\xi$  պարահական մեծության խտություն՝  $f_\xi(x) = f(x)$ : Բերենք մի քանի հայրնի բաշխումների օրինակներ:

### Դիսկրետ բաշխումներ

1. Բինոմական բաշխում  $p, n$  պարամետրերով ( $n$ -ը բնական թիվ է,  $0 \leq p \leq 1$ )՝

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n :$$

2. Պուասոնի բաշխում  $\lambda > 0$  պարամետրով ( $\xi \sim \Pi(\lambda)$ )՝

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

3. Երկրաչափական բաշխում  $p$  պարամետրով ( $0 \leq p \leq 1$ )՝

$$P(\xi = k) = (1-p)^{k-1} \cdot p, \quad k = 1, 2, \dots$$

4. Տիպերերկրաչափական բաշխում  $n, M, N$  պարամետրերով ( $n$ -ը,  $M$ -ը,  $N$ -ը բնական թվեր են)՝

$$P(\xi = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \quad k = \max(0, n - N + M), \dots, \min(M, n) :$$

### Բացարձակ անընդհատ բաշխումներ

1. Նավասարաչափ բաշխում  $[a, b]$  միջակայքում՝

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$$

2. Ցուցային բաշխում  $\lambda > 0$  պարամետրով՝

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} :$$

3. Նորմալ (Գաուսի) բաշխում  $(a, \sigma)$  պարամետրերով՝  $-\infty < a < +\infty$ ,  $\sigma^2 > 0$ ,  $(\xi \sim N(a, \sigma^2))$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad -\infty < x < +\infty :$$

$\xi \sim N(0, 1)$  պարահական մեծությունն անվանում են սրանդարդ նորմալ պարահական մեծություն:

4. Կոշիի բաշխում  $(a, \sigma)$  պարամետրերով՝  $-\infty < a < +\infty$ ,  $\sigma > 0$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sigma}{\sigma^2 + (x-a)^2}, \quad -\infty < x < \infty :$$

Սրանդարդ Կոշիի բաշխում՝

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < \infty :$$

5. Գամմա բաշխում  $(\alpha, \lambda)$  պարամետրերով՝  $\alpha > 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $(\xi \sim \Gamma(\alpha, \lambda))$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

որպես  $\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-x} dx$ -ը Էյլերի գամմա ֆունկցիան է,  $n$  բնական թվերի համար  $\Gamma(n) = (n-1)!$  և  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ :

## Ա

304. Մեքադարամը ներվում է երկու անգամ: Կառուցել գերի հանդես գալու թվի բաշխման օրենքը: Գտնել բաշխման ֆունկցիան և կառուցել դրա գրաֆիկը:



305. Դիցուք 10 մանրակներից 8-ը սրանդարտ են: Պարահականորեն վերցնում են երկու մանրակ: Կազմել վերցված մանրակների մեջ սրանդարտ մանրակների թվի բաշխման օրենքը: Գտնել բաշխման ֆունկցիան և կառուցել դրա գրաֆիկը:

306. Արտադրանքի 10%-ը խտրան է: Պարահականորեն վերցնում են չորս մանրակ: Գտնել դրանց մեջ խտրան մանրակների թվի բաշխման օրենքը:

307. Տինգ սարքերի հուսալիությունը սպուգելու համար կապարում են հաջորդական անկախ փորձարկումներ: Յուրաքանչյուր հաջորդ սարքը սպուգման է ենթարկվում միայն այն դեպքում, երբ նախորդը հուսալի է: Կազմել սպուգված սարքերի թվի բաշխման օրենքը, եթե փորձարկումը անցնելու հավանականությունը դրանցից յուրաքանչյուրի համար հավասար է 0,9-ի:

308. Մեքադադրամը նետում են մինչև գերբի առաջին անգամ երեկավար: Դիցուք  $\xi$ -ն նետումների թիվն է: Կազմել  $\xi$  պարահական մեծության բաշխման օրենքը, գտնել  $P(\xi > 1)$  հավանականությունը:

309. Տրած գի մեկ կրակոցով թիրախին դիպչելու հավանականությունը հավասար է 0,8-ի: Տրած ձիգը կրակում է մինչև առաջին վրիպումը: Կազմել կրակոցների թվի բաշխման օրենքը:

310. Երկու բասկետբոլիստի հաջորդաբար նետում են գնդակը դեպի զամբյուղ մինչև առաջին հաջողությունը: Կառուցել նետումների թվի բաշխման օրենքը յուրաքանչյուր բասկետբոլիստի համար, եթե հաջողության հավանականությունը առաջին բասկետբոլիստի համար հավասար է 0,4-ի, իսկ երկրորդի համար՝ 0,6-ի:

311. Դիցուք  $F(x)$ -ը անընդհատ բաշխման ֆունկցիա է: Ապացուցել, որ

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dF(x) = \frac{1}{2} :$$

312. Ապացուցել, որ ցանկացած անընդհար  $F(x)$  բաշխման ֆունկցիայի համար և ցանկացած բնական  $n$  և  $k$  թվերի համար փրեդի ունի հետևյալ առնչությունը՝

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^k(x) dF^n(x) = \frac{n}{n+k} :$$

313.  $\xi$  պարահական մեծության բաշխման ֆունկցիան հավասար է

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1 : \end{cases}$$

Գտնել չորս անկախ փորձերից երեքում  $\xi$  պարահական մեծության ընդունած արժեքների  $[0, 25; 0, 75]$  միջակայքում գտնվելու հավանականությունը:

314. Տրված է ինչ-որ պարահական մեծության բաշխման ֆունկցիան

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1/2, & 0 < x \leq 1 \\ 3/5, & 1 < x \leq 2 \\ 4/5, & 2 < x \leq 3 \\ 9/10, & 3 < x \leq 3,5 \\ 1, & x > 3,5 : \end{cases}$$

Գտնել այդ պարահական մեծության բաշխման աղյուսակը:

315. Դիցուք տրված է  $\xi$  պարահական մեծության խտության ֆունկցիան

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2), & -1 < x < 1 \\ 0, & \text{մնացած դեպքերում:} \end{cases}$$

ա) Գտնել  $c$  գործակիցը:

բ) Գտնել  $F(x)$  բաշխման ֆունկցիան:

316. Ննարավոր է արդյոք ընտրել  $c$  հաստատունն այնպես, որ  $cx^{-3}$  ֆունկցիան իրենից ներկայացնի հավանականությունների բաշխման խտություն հետևյալ բազմությունների վրա՝ ա)  $[1, \infty)$  ճառագայթի բ)  $[0, \infty)$  ճառագայթի, գ)  $[-2, -1]$  հատվածի վրա:

317.  $\xi$  պարահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունն է՝

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2} :$$

Գտնել ա)  $a$  գործակիցը, բ)  $F(x)$  բաշխման ֆունկցիան, գ)  $P(-1 \leq \xi < 1)$  հավանականությունը:

318.  $\xi$  պարահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունն է՝

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} :$$

Նշվել ա)  $P(\xi \geq 1)$ , բ)  $P(|\xi| \geq 1)$ :

319.  $\xi$  պարահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունն է՝

$$f(x) = \frac{a}{e^{-x} + e^x} :$$

Գտնել  $a$  գործակիցը և երկու անկախ փորձերում  $\xi$  պարահական մեծության մեկից փոքր արժեք ընդունելու հավանականությունը:

320.  $\xi$  պարահական մեծությունը բաշխված է «ուղղանկյուն եռանկյան օրենքով»  $[0, a]$  միջակայքում՝

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0, a) \\ c(1 - \frac{x}{a}), & x \in (0, a) \end{cases} :$$

Գտնել ա)  $c$  հաստատունը, բ)  $F(x)$  բաշխման ֆունկցիան, գ)  $P(a/2 \leq \xi \leq a)$  հավանականությունը:

321.  $\xi$  պարահական մեծությունը բաշխված է Միմպսոնի օրենքով «հավասարապարուն եռանկյան օրենքով»  $[-a, a]$  միջակայքում՝

$$f(x) = \begin{cases} c \left(1 + \frac{x}{a}\right), & x \in (-a, 0) \\ c \left(1 - \frac{x}{a}\right), & x \in (0, a) \\ 0, & x \notin (-a, a), \end{cases}$$

Գտնել ա)  $c$  հաստատությունը, բ)  $F(x)$  բաշխման ֆունկցիան, գ)  $P(a/2 \leq \xi < a)$  հավանականությունը:

322.  $\xi$  պարահական մեծությունն ընդունում է ոչ բացասական ամբողջ արժեքներ: Ապացուցել հետևյալ պնդումների համարժեքությունը՝ ա)  $\xi$ -ն ունի հավանականությունների երկրաչափական բաշխում, բ)  $P(\xi = n + k/\xi \geq k) = P(\xi = n)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ :

323.  $\xi$  պարահական մեծությունն ունի  $\lambda = 1/3$  պարամետրով հավանականությունների ցուցցային բաշխում: Գտնել ա)  $P(\xi > 3)$ , բ)  $P(\xi > 6/\xi > 3)$  գ)  $P(\xi > t + 3/\xi > t)$ , որպեսզի  $t > 0$  իրական թիվ է:

324. Դիցուք  $\xi$ -ն ցուցցային բաշխում ունեցող պարահական մեծություն է, իսկ  $t > 0$  իրական թիվ է: Գտնել  $(\xi - t)$ -ի բաշխման ֆունկցիան  $\xi \geq t$  պայմանի դեպքում:

325. Դիսկրետ  $\xi$  պարահական մեծությունն ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝

$\xi$	-2	-1	0	1	2
$P$	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Գտնել ա)  $\eta_1 = \xi^2 + 1$ , բ)  $\eta_2 = |\xi|$  պարահական մեծությունների բաշխման օրենքները:

326.  $\xi$  պարահական մեծության  $F(x)$  բաշխման ֆունկցիան անընդհար է 0 կետում: Ինչպե՞ս է բաշխված

$$\eta = \begin{cases} \frac{\xi}{|\xi|}, & \text{եթե } \xi \neq 0 \\ 1, & \text{եթե } \xi = 0 \end{cases}$$

պարահական մեծությունը:

327.  $\xi$  պարահական մեծությունը հավասարաչափ է բաշխված  $[0, 1]$  միջակայքում: Գտնել ա)  $\eta = \xi^2$ , բ)  $\eta = 1/\xi$ , գ)  $\eta = e^\xi$  պարահական մեծությունների հավանականությունների բաշխման խտությունները:

328.  $\xi$  պարահական մեծությունը հավասարաչափ է բաշխված  $[0, 1]$  միջակայքում: Գտնել ա)  $\eta = \ln \xi^{-1}$ , բ)  $\eta = \ln(\frac{\xi}{1-\xi})$ , գ)  $\eta = -\frac{1}{\lambda} \ln(1-\xi)$  (որտեղ  $\lambda > 0$ ) պարահական մեծությունների հավանականությունների բաշխման խտությունները:

329.  $\xi$  պարահական մեծությունը հավասարաչափ է բաշխված  $[-\pi/2, \pi/2]$  միջակայքում: Գտնել ա)  $\eta = \sin \xi$ , բ)  $\eta = |\sin \xi|$  պարահական մեծությունների հավանականությունների բաշխման խտությունները:

330.  $\xi$  պարահական մեծությունը հավասարաչափ է բաշխված  $[-1, 1]$  միջակայքում: Գտնել  $\eta = |\xi|$  պարահական մեծության բաշխման ֆունկցիան:

331.  $\xi$  պարահական մեծությունը հավասարաչափ է բաշխված  $[0, 2]$  միջակայքում: Գտնել  $\eta = |\xi - 1|$  պարահական մեծության բաշխման ֆունկցիան:

332.  $\xi$  պարահական մեծությունն ունի սրանդարպ Կոշիի բաշխում՝

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad (-\infty < x < +\infty)$$

խտության ֆունկցիայով: Գտնել  $\eta = 1/\xi$  պարահական մեծության խտությունը:

333.  $l$  երկարություն ունեցող ձողը պարահական կետով բաժանված է երկու մասի: Գտնել այն ուղղանկյան մակերեսի բաշխման ֆունկցիան, որի համար կողմեր են հանդիսանում ձողից սրացված մասերը:

334.  $[0, a]$  միջակայքի վրա պարահականորեն նշում են երկու կետ՝ աշխինքն, այդ կետերի արացիսները հավասարաչափ են բաշխված  $[0, a]$

միջակայքում: Գտնել այդ կետերի միջև եղած հեռավորության բաշխման ֆունկցիան և հավանականությունների բաշխման խտությունը:

335.  $[0, a]$  միջակայքի վրա պարահականորեն նշում են  $n$  կետ: Գտնել ձախից  $k$ -րդ կետի արսցիսի հավանականությունների բաշխման խտությունը:

336.  $(0, a)$  կետից  $OY$  առանցքին  $\varphi$  անկյան փակ փարված է ուղիղ գիծ: Գտնել այդ ուղղի  $OX$  առանցքի հետ հարման կետի արսցիսի բաշխման ֆունկցիան և բաշխման խտությունը, եթե  $\varphi$  անկյունը հավասարաչափ է բաշխված ա)  $[0, \pi/2]$  միջակայքում, բ)  $[-\pi/2, \pi/2]$  միջակայքում:

337. Օրդինատների առանցքի  $(0, 0)$  և  $(0, R)$  կետերի միջև պարահականորեն նշված է մի կետ: Այդ կետով  $OY$  առանցքին ուղղահայաց փարված է  $x^2 + y^2 = R^2$  շրջանագծի լար: Գտնել լարի երկարության հավանականությունների բաշխման խտությունը:

338.  $R$  շառավղով և  $(0, 0)$  կենտրոնով շրջանագծի վրա պարահականորեն նշում են մի կետ, այդ կետի բևեռային անկյունը հավասարաչափ է բաշխված  $[-\pi, \pi]$ -ում: Գտնել նշված կետի արսցիսի հավանականությունների բաշխման խտությունը:

339. Դիցուք  $\xi$  պարահական մեծության բաշխման ֆունկցիան հավասար է՝

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x/4, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2} + \frac{x-1}{4}, & 1 < x \leq 2 \\ 11/12, & 2 < x \leq 3 \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Գտնել  $P(\xi = i)$ ,  $i = 1, 2, 3$  և  $P(1/2 \leq \xi < 3/2)$ :

340. Ավտոբուսները, որոնց աշխատանքային ժամը սկսվում է առավոտյան ժամը 7-ին, կանգառին են մոտենում 15 րոպե ընդմիջումով:

Այսինքն նրանք շարժվում են ժամը 7-ին, 7:15, 7:30, 7:45 և այլն: Ենթադրելով կանգառին մոտենալու պահի հավասարաչափ բաշխվածությունը ժամը 7-ից 7:30 միջակայքում, հաշվել հավանականությունը, որ նա կսպասի ա) ոչ ավելի քան 5 րոպե, բ) 10 րոպեից ավելի:

341. Դիցուք  $\xi$  պարահական մեծությունը հավասարաչափ է բաշխված  $(0, 10)$  միջակայքում: Նաշվել  $\xi < 3$ ,  $\xi > 6$ ,  $3 < \xi < 8$  պարահույթների հավանականությունը:

342. Դիցուք  $\xi$ -ն  $a = 3$ ,  $\sigma^2 = 9$  պարամետրերով նորմալ բաշխված պարահական մեծություն է: Նաշվել  $P(|\xi - 3| > 6)$ :

343. Դիցուք  $\xi$ -ն  $a = 10$ ,  $\sigma^2 = 36$  պարամետրերով նորմալ բաշխված պարահական մեծություն է: Նաշվել ա)  $P(\xi > 5)$ ; բ)  $P(4 < \xi < 16)$ ; գ)  $P(\xi < 8)$ ; դ)  $P(\xi < 20)$ ; ե)  $P(\xi > 16)$ :

## Բ

344. Դիցուք  $\xi$ -ն և  $\eta$ -ն միևնույն  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  հավանականային փարածության վրա որոշված պարահական մեծություններ են: Ապացուցել, որ  $A = \{\omega : \xi(\omega) < \eta(\omega)\}$ -ն,  $B = \{\omega : \xi(\omega) = \eta(\omega)\}$ -ն,  $C = \{\omega : \xi(\omega) \leq \eta(\omega)\}$ -ն պարահույթներ են:

345.  $\xi$  և  $\eta$  պարահական մեծությունները որոշված են միևնույն  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  հավանականային փարածության վրա: Ապացուցել, որ ա)  $\xi + \eta$ , բ)  $\xi - \eta$ , գ)  $\xi \cdot \eta$ , դ)  $\max(\xi, \eta)$ , ե)  $\min(\xi, \eta)$  պարահական մեծություններ են:

346. Դիցուք  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  պարահական մեծությունները որոշված են միևնույն  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  հավանականային փարածության վրա: Ապացուցել, որ

$$\inf_n \xi_n, \quad \sup_n \xi_n, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n$$

պարահական մեծություններ են:

347. Դիցուք  $\xi$ -ն պարահական մեծություն է, իսկ  $f(x)$ -ը բորելյան ֆունկցիա է: Ապացուցել, որ  $\eta = f(\xi)$ -ն պարահական մեծություն է:

348. Կարարված փորձերի  $\xi$  թիվը Պուասոնի բաշխում ունեցող պարահական մեծություն է՝

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots :$$

Յուրաքանչյուր փորձ  $p$  հավանականությամբ կարող է լինել հաջող և  $(1-p)$  հավանականությամբ՝ անհաջող: Կառուցել հաջող փորձերի թվի բաշխման օրենքը:

349. Դիցուք  $F(x)$ -ը բաշխման ֆունկցիա է: Ապացուցել, որ

$$G_1(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} F(u) du, \quad G_2(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} F(u) du$$

ֆունկցիաները ցանկացած  $h > 0$  դեպքում հանդիսանում են բաշխման ֆունկցիաներ:

350. Դիցուք  $F(x)$ -ը բաշխման ֆունկցիա է, ընդ որում  $F(0) = 0$ : Ապացուցել, որ

$$G(x) = \begin{cases} F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right), & x \geq 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

ֆունկցիան հանդիսանում է բաշխման ֆունկցիա:

351. Ապացուցել, որ եթե բաշխման ֆունկցիան անընդհապ է ուղղի յուրաքանչյուր կետում, ապա այն հավասարաչափ անընդհապ է ամբողջ ուղղի վրա:

352. Ապացուցել, որ ցանկացած բաշխման ֆունկցիա կարող է ունենալ ոչ ավելի, քան հաշվելի թվով խզման կետեր:



353. Կարճող է արդյոք բաշխման ֆունկցիայի խզման կետերի բազմությունը լինել ամենուրեք խիստ ուղղի վրա:

354. Դիցուք  $F(x)$ -ը  $\xi$  պարահական մեծության բաշխման ֆունկցիան է: Գտնել  $\frac{1}{2}(\xi + |\xi|)$  պարահական մեծության բաշխման ֆունկցիան:

355. Դիցուք  $F(x)$ -ը  $\xi$  պարահական մեծության բաշխման ֆունկցիան է: Գտնել  $\eta = a\xi + b$  պարահական մեծության բաշխման ֆունկցիան:

356. Դիցուք  $\xi$  պարահական մեծության  $F(x)$  բաշխման ֆունկցիան անընդհատ է: Գտնել  $\eta = F(\xi)$  պարահական մեծության բաշխման ֆունկցիան:

357. Շրջանի շառավիղը չափված է մոտավորապես: Գտնել շրջանի մակերեսի բաշխման ֆունկցիան, համարելով շառավիղը հավասարաչափ բաշխված  $[a, b]$  միջակայքում:

358. Ապացուցել, որ նորմալ բաշխում ունեցող պարահական մեծությունից գծային ֆունկցիան ևս նորմալ է:

359.  $\xi$  պարահական մեծությունն ունի նորմալ բաշխում  $(a, \sigma^2)$  պարամետրերով: Գտնել  $\text{sign}\xi$  պարահական մեծության բաշխման ֆունկցիան:

360. Դիցուք  $\xi \sim N(0, 1)$  սրանդարտ նորմալ պարահական մեծություն է: Գտնել  $\eta = \xi^2$  պարահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը:

361.  $\xi$  պարահական մեծությունն ունի նորմալ բաշխում  $(a, \sigma^2)$  պարամետրերով: Գտնել ա)  $\eta = \xi^2$ , բ)  $\eta = \xi^3$  պարահական մեծությունների հավանականությունների բաշխման խտությունները:

362.  $\xi$  պարահական մեծությունն ունի ցուցչային բաշխում  $\lambda = 1$  պարամետրով: Գտնել  $\eta = e^{-\xi}$  պարահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը:

363. Դիցուք  $\xi$  պարահական մեծության հավանականությունների  $f(x)$  բաշխման խտությունն է՝

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (-1, 1) \\ \frac{c}{2}(x+1), & x \in (-1, 1) : \end{cases}$$

Գտնել  $c$  հաստատունը և  $\eta = 1 - \xi^2$  պարահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը:

### Բազմաչափ պարահական մեծություն և բաշխման ֆունկցիա

Միևնույն  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  հավանականային տարածության վրա որոշված  $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$  պարահական մեծությունների  $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$  համախմբությունը կոչվում է  $n$  չափանի պարահական մեծություն կամ պարահական վեկտոր:

$\mathcal{P}_\xi(B) = P(\omega : \xi(\omega) \in B) = P(\omega : (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)) \in B) -$  ն  $B \in \mathcal{B}(R^n)$ , անվանում են  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  պարահական վեկտորի բաշխում:

Մասնավոր դեպքում, երբ  $B = (-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2) \times \dots \times (-\infty, x_n)$

$F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(\omega : \xi_1(\omega) < x_1, \xi_2(\omega) < x_2, \dots, \xi_n(\omega) < x_n) = P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n)$ -ը  $x_k \in R, k = 1, 2, \dots, n$ , անվանում են  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  պարահական վեկտորի բաշխման ֆունկցիա կամ  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  պարահական մեծությունների համարեղ բաշխման ֆունկցիա:

Բազմաչափ բաշխման ֆունկցիան օժտված է հետևյալ հատկություններով՝

$$1. F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-1}, \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \leq F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-1}, \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x'_k, x_{k+1}, \dots, x_n),$$

երբ  $x_k < x'_k, k = 1, 2, \dots, n$  :

2.  $\lim F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ , երբ  $x_i$ -ից գոնե մեկը ձգվում է  $-\infty$  և

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow +\infty \\ x_2 \rightarrow +\infty \\ \dots \\ x_n \rightarrow +\infty}} F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 :$$

$$\begin{aligned}
& 3. F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-1}, \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k - 0, x_{k+1}, \dots, x_n) = \\
& = F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-1}, \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n), \\
& k = 1, 2, \dots, n :
\end{aligned}$$

4. Ցանկացած  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ -ի և  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ -ի համար՝  
 $a_k \leq b_k, k = 1, 2, \dots, n$

$$\Delta_{a_1 b_1} \dots \Delta_{a_n b_n} F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0,$$

որպեղ

$$\begin{aligned}
& \Delta_{a_k b_k} F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-1}, \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \\
& = F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-1}, \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, b_k, x_{k+1}, \dots, x_n) - \\
& - F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-1}, \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, a_k, x_{k+1}, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

կոչվում է Կրարբերական օպերատոր:

Նշենք նաև  $F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ֆունկցիայի մյուս կարևոր հատկությունները՝

ա)  $F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots, \xi_j, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) =$   
 $= F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_j, \dots, \xi_i, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$  (համաչափության հատկություն)

բ)  $F_{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, +\infty) = F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$   
(համաձայնեցվածության հատկություն):

1 - 4 պայմաններին բավարարող ցանկացած  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ֆունկցիա,  $x_k \in R, k = 1, 2, \dots, n$  հանդիսանում է որևէ  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  պարահական վեկտորի բաշխման ֆունկցիա՝

$$F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) :$$

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  պարահական վեկտորը դիսկրետ է, եթե յուրաքանչյուր  $\xi_k$ -ն,  $k = 1, 2, \dots, n$  դիսկրետ պարահական մեծություն է:

Եթե  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ -ն դիսկրետ է, ապա ցանկացած  $B \in \mathcal{B}(R^n)$  համար

$$\mathcal{P}_\xi(B) = P(\xi \in B) = \sum_{(k_{i_1}, k_{i_2}, \dots, k_{i_n}) \in B}^{i_1, i_2, \dots, i_n} p_{i_1, i_2, \dots, i_n},$$

որպեղ

$$p_{i_1, i_2, \dots, i_n} = P(\xi_1 = k_{i_1}, \xi_2 = k_{i_2}, \dots, \xi_n = k_{i_n}),$$

իսկ  $k_{ij}$ -ն  $\xi_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  պարահական մեծության հնարավոր արժեքներից մեկն է:

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  պարահական վեկտորը բացարձակ անընդհատ է, եթե գոյություն ունի ոչ բացասական բորելյան  $f_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ֆունկցիա այնպիսին, որ ցանկացած  $B \in \mathcal{B}(R^n)$  համար

$$P_{\xi}(B) = P(\xi \in B) = \int_B f_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n,$$

այսպես

$$\int_{R^n} f_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1 :$$

Մասնավոր դեպքում, երբ  $B = (-\infty, x_1) \times (-\infty, x_2) \times \dots \times (-\infty, x_n)$

$$F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n,$$

$$\text{այսպես } \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n = 1:$$

$f_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ֆունկցիան կոչվում է  $n$ -չափանի  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  պարահական մեծության խտություն:

Ցանկացած  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $x_k \in R$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  ֆունկցիա, որը բավարարում է հետևյալ հատկություններին՝

1.  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ ,
2.  $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1$

հանդիսանում է որևէ պարահական վեկտորի խտություն:

Նշենք, որ

$$f_{\xi_k}(x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_{k-1} dx_{k+1} dx_n :$$

Բերենք հայրնի բազմաչափ բաշխման օրինակ.

Երկչափ նորմալ (Պաուսի) բաշխում  $a_1, a_2, \sigma_1, \sigma_2, r$  ( $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, |r| < 1$ ) պարամետրերով՝

$$f_{\xi_1, \xi_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x_1-a_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x_1-a_1)(x_2-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right):$$

### Պատահական մեծությունների անկախություն

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  պատահական մեծությունները կոչվում են անկախ, եթե  $B_1 \in \mathcal{B}(R), B_2 \in \mathcal{B}(R), \dots, B_n \in \mathcal{B}(R)$  համար

$$P(\xi_1 \in B_1, \dots, \xi_n \in B_n) = P(\xi_1 \in B_1)P(\xi_2 \in B_2) \cdots P(\xi_n \in B_n):$$

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  պատահական մեծություններն անկախ են այն և միայն այն դեպքում, երբ

$$F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\xi_1}(x_1)F_{\xi_2}(x_2) \cdots F_{\xi_n}(x_n):$$

Դիսկրետ պատահական մեծությունների անկախության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի

$$P(\xi_1 = k_{i_1}, \dots, \xi_n = k_{i_n}) = P(\xi_1 = k_{i_1})P(\xi_2 = k_{i_2}) \cdots P(\xi_n = k_{i_n}):$$

Բացարձակ անընդհատ պատահական մեծությունների անկախության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի

$$f_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{\xi_1}(x_1)f_{\xi_2}(x_2) \cdots f_{\xi_n}(x_n),$$

$$x_k \in R, \quad k = 1, 2, \dots, n:$$

### Պայմանական բաշխումներ

**Դիսկրետ դեպք.** Եթե  $\xi$ -ն և  $\eta$ -ն դիսկրետ պատահական մեծություններ են, ապա  $\xi$  պատահական մեծության բաշխում  $\eta = y$  պայմանի դեպքում սահմանվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$p_{\xi/\eta}(x, y) = P(\xi = x/\eta = y) = \frac{P(\xi = x, \eta = y)}{P(\eta = y)} = \frac{p(x, y)}{p_\eta(y)},$$

$y$ -ի բոլոր այն արժեքների համար, որտեղ  $p_\eta(y) > 0$ :  $\xi$  պարահական մեծության պայմանական բաշխման ֆունկցիան  $\eta = y$  պայմանի դեպքում սահմանվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$F_{\xi/\eta}(x, y) = P(\xi < x/\eta = y) = \sum_{a < x} p_{\xi/\eta}(a/y)$$

$y$ -ի բոլոր այն արժեքների համար, որտեղ  $p_\eta(y) > 0$ :

**Անընդհար դեպք.** Դիցուք  $\xi$  և  $\eta$  պարահական մեծություններն ունեն համարելի  $f(x, y)$  խտության ֆունկցիա:  $\xi$  պարահական մեծության պայմանական խտություն  $\eta = y$  պայմանի դեպքում սահմանվում է հետևյալ բանաձևով՝

$$f_{\xi/\eta}(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_\eta(y)},$$

$y$ -ի բոլոր այն արժեքների համար, որտեղ  $f_\eta(y) > 0$ : Մասնավորապես,

$$F_{\xi/\eta}(a, y) = \int_{-\infty}^a f_{\xi/\eta}(x/y) dx :$$

## Ա

364.  $(\xi, \eta)$  պարահական վեկտորի բաշխման խտությունը հավասար է

$$f(x, y) = \frac{c}{(16 + x^2)(25 + y^2)} :$$

Գտնել  $c$ -ն և  $F(x, y)$  բաշխման ֆունկցիան:

365.  $(\xi, \eta)$  պարահական վեկտորի բաշխման ֆունկցիան հավասար է

$$F(x, y) = \begin{cases} 1 - 2^{-x} - 2^{-y} + 2^{-x-y}, & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0, & \text{մնացած դեպքերում:} \end{cases}$$

1) Գտնել  $(\xi, \eta)$  պարահական կերի  $x = 1, x = 2, y = 3, y = 5$  ուղիղներով սահմանափակված ուղղանկյանը պարկանելու հավանականությունը:

2) Գտնել երկչափ բաշխման  $f(x, y)$  խտությունը:

3) Գտնել  $(\xi, \eta)$  պարահական կետի  $A(1; 3)$ ,  $B(3; 3)$ ,  $C(2; 8)$  գագաթներով եռանկյանը պարկանելու հավանականությունը:

366.  $(\xi, \eta)$  պարահական վեկտորի հավանականությունների բաշխման խտությունը հավասար է

$$f(x, y) = \frac{a}{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2} :$$

Գտնել  $a$  գործակիցը: Գտնել  $\xi$  և  $\eta$  պարահական մեծությունների մեկ չափանի բաշխման խտությունները: Անկախ են արդյոք  $\xi$ -ն և  $\eta$ -ն:

367.  $(\xi, \eta)$  պարահական վեկտորի հավանականությունների բաշխման խտությունը հավասար է

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{մնացած դեպքերում:} \end{cases}$$

Նաշվել ա)  $\xi$  պարահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը, բ)  $\eta$  պարահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը:

368.  $(\xi, \eta)$  պարահական վեկտորի հավանականությունների բաշխման խտությունը հավասար է

$$f(x, y) = \begin{cases} 24xy(1-x)^2, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{մնացած դեպքերում:} \end{cases}$$

Ապացուցել, որ  $\xi$ -ն և  $\eta$ -ն անկախ են:

369.  $(\xi, \eta)$  պարահական վեկտորի հավանականությունների բաշխման խտությունը հավասար է

$$f(x, y) = \begin{cases} 24x^2y(1-x), & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{մնացած դեպքերում:} \end{cases}$$

Ապացուցել, որ  $\xi$ -ն և  $\eta$ -ն անկախ են:

370. Ներում են 2 կանոնավոր զառ: Գտնել  $\xi$  և  $\eta$  պարահական մեծությունների համարել հավանականությունների բաշխումը, եթե՝

ա)  $\xi$ -ն երկու զառերի վրա բացված միավորներից մեծագույնն է, իսկ  $\eta$ -ն երկու զառերի վրա բացված միավորների գումարն է:

բ)  $\xi$ -ն առաջին զառի վրա բացված միավորն է, իսկ  $\eta$ -ն երկու զառերի վրա բացված միավորներից մեծագույնն է:

371. Սափորից, որը պարունակում է 5 սպիտակ և 8 կարմիր գնդիկներ, առանց վերադարձման հանում են 2 գնդիկ: Դիցուք  $\xi_i$ -ն ընդունում է 1 արժեքը, եթե ընկրված  $i$ -րդ գնդիկը սպիտակ է, և 0 արժեքը՝ հակառակ դեպքում: Գտնել  $\xi_1$  և  $\xi_2$ -ի համարել հավանականության բաշխումը:

372. Դիցուք  $\xi$ ,  $\eta$  և  $\zeta$ -ն անկախ պարահական մեծություններ են, ընդ որում  $\zeta$ -ն ընդունում է 1 կամ 0 արժեքներ համապարասխանաբար  $p$  և  $q$  հավանականություններով,  $p + q = 1$ ,  $\xi$ -ն և  $\eta$ -ն ունեն համապարասխանաբար  $F(x)$  և  $G(x)$  բաշխման ֆունկցիաներ: Գտնել հետևյալ պարահական մեծությունների բաշխման ֆունկցիաները՝

ա)  $\zeta\xi + (1 - \zeta)\eta$ ,

բ)  $\zeta\xi + (1 - \zeta)\max\{\xi, \eta\}$ ,

գ)  $\zeta\xi + (1 - \zeta)\min\{\xi, \eta\}$  :

## Բ

373. Ապացուցել, որ պարահական մեծությունն անկախ է ինքն իրենից այն և միայն այն դեպքում, երբ այն 1 հավանականությամբ հասարարում է:

374. Դիցուք  $\xi$ -ն և  $\eta$ -ն միարեսակ բաշխված անկախ պարահական մեծություններ են և  $P(\xi > 0) = P(\eta > 0) \geq 1/2$ : Ճիշտ է արդյոք, որ  $P(\xi + \eta > 0) \geq 1/2$ :

375. Դիցուք  $\xi$ -ն և  $\eta$ -ն պարահական մեծություններ են, ընդ որում  $P(\xi > 0) = P(\eta > 0) = 3/4$  և  $P(\xi + \eta > 0) = 1/2$ : Ապացուցել, որ  $\xi$ -ն և  $\eta$ -ն անկախ չեն:



376. Դիցուք  $\xi$  և  $\eta$  պարահական մեծությունները 1 հավանականությամբ հավասար չեն հասարակությունների, ընդ որում  $P(\xi < \eta) = 1$ : Կարող են  $\xi$ -ն և  $\eta$ -ն լինել անկախ:

377. Դիցուք  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  պարահական մեծություններն այնպիսին են, որ  $\xi$ -ն անկախ է  $(\eta + \zeta)$ -ից: Անկախ է՞ արդյոք  $\xi$ -ն  $\eta$ -ից և  $\zeta$ -ից:

378. Դիցուք  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  պարահական մեծություններն այնպիսին են, որ  $\xi$ -ն անկախ է  $\eta$ -ից և  $\zeta$ -ից: Անկախ է՞ արդյոք  $\xi$ -ն  $(\eta + \zeta)$ -ից:

379. Գոյություն ունե՞ն արդյոք այնպիսի  $\xi$  և  $\eta$  պարահական մեծություններ, որ 1 հավանականությամբ  $\xi$ -ն և  $\eta$ -ն հասարակություններ չեն և ա)  $\xi$ -ն և  $(\xi + \eta)$ -ն անկախ են, բ)  $\xi$ -ն և  $(\xi \cdot \eta)$ -ն անկախ են, գ)  $\xi$ -ն,  $(\xi + \eta)$ -ն և  $(\xi \cdot \eta)$ -ն ըստ համախմբության անկախ են:

380. Դիցուք փրված է հեփևյալ հավանականային փարածությունը՝  $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $\mathcal{F}$ -ը  $\Omega$ -ի բոլոր ենթաբազմությունների դասն է,  $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = 1/4$ : Կառուցել այդ փարածության վրա երկու անկախ պարահական մեծություններ, որոնք 1 հավանականությամբ հավասար չլինեն հասարակությունների:

381. Դիցուք  $\xi$ -ն և  $\eta$ -ն անկախ պարահական մեծություններ են,  $f(x)$ -ը և  $g(x)$ -ը բորելյան ֆունկցիաներ են: Ապացուցել, որ  $f(\xi)$ -ն և  $g(\xi)$ -ն նույնպես անկախ են:

382. Դիցուք  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  պարահական մեծություններն ըստ համախմբության անկախ են: Անկախ կլինե՞ն արդյոք  $\xi$  և  $(\eta + \zeta)$  պարահական մեծությունները: Կփոխվի՞ պարասխանը, եթե  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  լինեն զույգ առ զույգ անկախ:

383. Դիցուք  $\xi_1$  և  $\xi_2$ -ը միևնույն երկրաչափական բաշխում ունեցող անկախ պարահական մեծություններ են: Ապացուցել, որ

$$P(\xi_1 = k / \xi_1 + \xi_2 = n) = \frac{1}{n+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n :$$

384. Դիցուք  $\xi_1$  և  $\xi_2$ -ը համապարասխանաբար  $\lambda_1$  և  $\lambda_2$  պարամետրերով Պուասոնի բաշխում ունեցող անկախ պարահական մեծություններ են: Ցույց փայ, որ

$$P(\xi_1 = k/\xi_1 + \xi_2 = n) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

որպեսզ  $p = \lambda_1/(\lambda_1 + \lambda_2)$ ,  $q = 1 - p$ :

385. Դիցուք  $\xi$  և  $\eta$ -ն  $n$  և  $p$  պարամետրերով անկախ բինոմական պարահական մեծություններ են: Գտնել  $\xi + \eta = m$  պայմանի դեպքում  $\xi$  պարահական մեծության բաշխումը:

386. Ներում են երկու գառ: Նկարագրել փարրական պարահույթների փարածությունը: Դիցուք  $\xi$ -ն առաջին գառի վրա «6» բացվելու թիվն է,  $\eta$ -ն՝ «6» բացվելու թիվն է երկրորդ գառի վրա: Գտնել  $\xi$  և  $\eta$ -ի համաբեղ բաշխումը: Ապացուցել  $\xi$  և  $\eta$  պարահական մեծությունների անկախությունը:

387. Ներում են երկու գառ: Նկարագրել փարրական պարահույթների փարածությունը: Դիցուք  $\xi$ -ն առաջին գառի վրա բացված միավորների թիվն է,  $\eta$ -ն՝ երկրորդ գառի վրա բացված միավորների թիվը: Գտնել  $(\xi; \eta)$  վեկտորի բաշխման օրենքը: Ապացուցել  $\xi$  և  $\eta$  պարահական մեծությունների անկախությունը:

388.  $(\xi, \eta)$  պարահական վեկտորը հավասարաչափ է բաշխված  $A(-1, 0)$ ,  $B(1, 0)$ ,  $C(0, 1)$ ,  $D(0, -1)$  գագաթներով քառակուսու ներսում: Գտնել  $f_{\xi, \eta}(x, y)$ ,  $f_{\xi}(x)$  և  $f_{\eta}(x)$  խտությունները: Անկախ ե՞ն արդյոք  $\xi$  և  $\eta$  պարահական մեծությունները:

389.  $(\xi, \eta, \zeta)$  պարահական վեկտորը հավասարաչափ է բաշխված զլանում, որի բարձրությունը հավասար է  $2H$ , հիմքի շառավիղը՝  $R$ , կենտրոնը գտնվում է կորդինատների սկզբնակետում, իսկ ծնորդը գուգահեռ է  $OZ$  առանցքին: Գտնել այդ վեկտորի յուրաքանչյուր պրոյեկցիայի բաշխման խտությունը: Անկախ ե՞ն արդյոք այդ պրոյեկցիաները:

390.  $(\xi, \eta, \zeta)$  պարահական վեկտորը հավասարաչափ է բաշխված  $r$  շառավղով  $S$  գնդի մեջ: ա) Գտնել այդ վեկտորի յուրաքանչյուր կոմպոնենտի բաշխման խտությունը, բ) ի՞նչ հավանականությամբ  $(\xi, \eta, \zeta)$  պարահական կետը կգտնվի  $S$ -ի հետ համակենտրոն  $r/2$  շառավղով գնդի ներսում:

391. Ապացուցել, որ եթե  $F_\xi(x)$  և  $F_\eta(y)$  բաշխման ֆունկցիաները անընդհատ են համապարասխանաբար  $x_0$  և  $y_0$  կետերում, ապա երկչափ  $F_{\xi, \eta}(x, y)$  բաշխման ֆունկցիան անընդհատ է  $(x_0, y_0)$  կետում:

392. Կառուցել այնպիսի երկչափ բաշխման ֆունկցիայի օրինակ, որը լինի անընդհատ  $(x_0, y_0)$  կետում, սակայն մեկ չափանի  $F_\xi(x)$  և  $F_\eta(y)$  բաշխման ֆունկցիաները համապարասխանաբար  $x_0$  և  $y_0$  կետերում լինեն խզվող:

393. Դիցուք  $F(x)$ -ը  $\xi$  պարահական մեծության բաշխման ֆունկցիան է: Գտնել ա)  $(\xi, \xi)$ , բ)  $(\xi, |\xi|)$  պարահական վեկտորի  $F(x, y)$  բաշխման ֆունկցիան:

394. Դիցուք  $\xi$  և  $\eta$  պարահական մեծությունների համապետ խտության ֆունկցիան է՝

$$f(x, y) = \frac{6}{7} \left( x^2 + \frac{xy}{2} \right), \quad 0 < x < 1, 0 < y < 2:$$

- ա) Համոզվել, որ այն իսկապես խտության ֆունկցիա է:
- բ) Հաշվել  $\xi$  պարահական մեծության խտության ֆունկցիան:
- գ) Գտնել  $P(\xi > \eta)$ :
- դ) Գտնել  $P(\eta > \frac{1}{2}/\xi < \frac{1}{2})$ :

395. Դիցուք  $\xi_1$ -ը և  $\xi_2$ -ը Կոշիի սրանդարտ բաշխում ունեցող անկախ պարահական մեծություններ են: Ապացուցել, որ  $\eta = \frac{\xi_1 + \xi_2}{1 - \xi_1 \xi_2}$  պարահական մեծությունը նույնպես ունի Կոշիի բաշխում:

396. Դիցուք  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  անկախ միաբեասկ բաշխված պարահական մեծություններ են, որոնք  $1/2$  հավանականություններով ընդունում են 0 կամ 1 արժեքներ: Գտնել  $\eta = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{2^k}$  պարահական մեծության բաշխումը:

397. Դիցուք  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  անկախ, միաբետակ բաշխված պարահական մեծություններ են, ընդ որում

$$P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n :$$

Գտնել  $\eta_n = \prod_{i=1}^n \xi_i$  պարահական մեծության բաշխումը:

398. Դիցուք տրված է  $(\xi, \eta)$  երկչափ պարահական մեծության համարեղ բաշխումը՝

$$p(1, 1) = 0, 5, \quad p(2, 1) = 0, 1, \quad p(1, 2) = 0, 1, \quad p(2, 2) = 0, 3 :$$

Գտնել  $\xi$  պարահական մեծության բաշխումը  $\eta = 1$  պայմանի դեպքում:

399. Դիցուք տրված է  $(\xi, \eta)$  երկչափ պարահական մեծության համարեղ խտության ֆունկցիան

$$f(x, y) = \begin{cases} c(y^2 - x^2)e^{-y}, & -y \leq x \leq y, \quad 0 < y < \infty \\ 0, & \text{մնացած դեպքերում:} \end{cases}$$

ա) Գտնել  $c$  գործակիցը:

բ) Գտնել  $\xi$  և  $\eta$  պարահական մեծությունների խտության ֆունկցիաները:

400. Դիցուք տրված է  $(\xi, \eta)$  երկչափ պարահական մեծության համարեղ խտության ֆունկցիան

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)}, & 0 \leq x < \infty, \quad 0 \leq y < \infty \\ 0, & \text{մնացած դեպքերում:} \end{cases}$$

Գտնել  $P(\xi < \eta)$  և  $P(\xi < a)$ , որտեղ  $a > 0$  հասարարուն թիվ է:

401. Դիցուք տրված է  $(\xi, \eta)$  երկչափ պարահական մեծության համարեղ խտության ֆունկցիան

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & x > 0, \quad y > 0 \\ 0, & \text{մնացած դեպքերում:} \end{cases}$$

ա) Գտնել  $\xi$ -ի խտության ֆունկցիան  $\eta = y$  պայմանի դեպքում և  $\eta$ -ի խտության ֆունկցիան  $\xi = x$  պայմանի դեպքում:

բ) Գտնել  $\zeta = \xi\eta$ -ի խտության ֆունկցիան:

402. Դիցուք տրված է  $(\xi, \eta)$  երկչափ պարահական մեծության համարեղ բաշխումը՝

$$p(1, 1) = 1/8, \quad p(2, 1) = 1/4, \quad p(1, 2) = 1/8, \quad p(2, 2) = 1/2 :$$

ա) Գտնել  $\eta = i, i = 1, 2$  պայմանի դեպքում  $\xi$  պարահական մեծության բաշխումը:

բ) Անկախ ե՞ն արդյոք  $\xi$ -ն և  $\eta$ -ն:

գ) Նաշվել  $P(\xi\eta \leq 3), P(\xi + \eta > 2), P(\xi/\eta > 1)$ :

403. Դիցուք տրված է  $(\xi, \eta)$  երկչափ պարահական մեծության համարեղ խտության ֆունկցիան

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x^2 - y^2)e^{-x}, & 0 \leq x < \infty, \quad -x \leq y \leq x \\ 0, & \text{մնացած դեպքերում:} \end{cases}$$

Գտնել  $\xi = x$  պայմանի դեպքում  $\eta$  պարահական մեծության բաշխումը:

### Պարահական մեծություններից ֆունկցիայի բաշխումը

Դիցուք  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ -ն  $n$ -չափանի պարահական մեծություն է,  $F_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -ը նրա բաշխման ֆունկցիան է, իսկ  $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$ -ն  $m$  -չափանի պարահական մեծություն է, որտեղ  $\eta_k = f_k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), k = 1, 2, \dots, m$  և  $\Phi_{\eta_1, \dots, \eta_m}(y_1, y_2, \dots, y_m)$ -ն նրա բաշխման ֆունկցիան է: Այդ դեպքում տեղի ունի ներկայացում՝

$$\Phi_{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m}(y_1, y_2, \dots, y_m) = \int \dots \int_D dF_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

որտեղ

$$D = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : f_j(x_1, x_2, \dots, x_n) < y_j, j = 1, 2, \dots, m\} :$$

Եթե  $n$ -չափանի  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  պարահական մեծությունն ունի  $f_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  բաշխման խտություն, ապա

$$\Phi_{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m}(y_1, y_2, \dots, y_m) =$$

$$= \int \dots \int_D f_{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n :$$

Եթե  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ -ը  $n$ -զափանի դիսկրետ պարահական մեծություն է, ապա

$$\Phi_{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m}(y_1, y_2, \dots, y_m) = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_n, \\ f_j(k_{i_1}, k_{i_2}, \dots, k_{i_n}) < y_j, \\ j=1, 2, \dots, m}} p_{i_1, i_2, \dots, i_n},$$

որպեղ

$$p_{i_1, i_2, \dots, i_n} = P(\xi_1 = k_{i_1}, \xi_2 = k_{i_2}, \dots, \xi_n = k_{i_n}) :$$

## Ա

404. Դիցուք  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  անկախ պարահական մեծություններն ունեն միևնույն  $F(x)$  բաշխման ֆունկցիա: Գտնել

$$\xi = \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad \text{և} \quad \eta = \max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

պարահական մեծությունների բաշխման ֆունկցիաները:

405. Դիցուք  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  պարահական մեծություններն անկախ են և ունեն համապարասխանաբար  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  պարամետրերով ցուց-չալին բաշխում: Գտնել  $\eta = \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  պարահական մեծության բաշխման ֆունկցիան:

406. Դիցուք հայրնի են  $\xi$  և  $\eta$  անկախ պարահական մեծությունների բաշխման օրենքները՝

$\xi$	-1	0	1
$P$	0, 2	0, 3	0, 5

$\eta$	0	1
$P$	0, 4	0, 6

Գտնել  $\xi + \eta$ ,  $\xi - \eta$ ,  $\xi \cdot \eta$  պարահական մեծությունների բաշխման օրենքները:

407. Դիցուք  $\xi$  և  $\eta$  անկախ պարահական մեծություններն ունեն հերկյալ բաշխման օրենքները՝

$\xi$	0	1	2
$P$	0,2	0,4	0,4

$\eta$	0	1	2
$P$	0,3	0,3	0,4

Գտնել  $\xi + \eta$ ,  $\xi - \eta$ ,  $\xi \cdot \eta$  պարահական մեծությունների բաշխման օրենքները:

## Բ

408.  $\xi_1$  և  $\xi_2$  անկախ պարահական մեծությունները բաշխված են միևնույն երկրաչափական օրենքով ( $P(\xi = k) = q^k p, k = 0, 1, 2, \dots$ ): Դիցուք  $\eta = \max(\xi_1, \xi_2)$ : Գտնել  $\eta$ -ի բաշխումը և  $(\eta, \xi_1)$ -ի բաշխումը:

409. Դիցուք  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ -ը միևնույն  $F(x)$  բաշխման ֆունկցիայով անկախ պարահական մեծություններ են: Նշանակենք

$$\xi = \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \quad \text{և} \quad \eta = \max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) :$$

Գտնել  $(\xi, \eta)$  պարահական վեկտորի բաշխման ֆունկցիան և օգրագործելով համարել բաշխման ֆունկցիան, գտնել  $\xi$  և  $\eta$ -ի միաչափ բաշխման ֆունկցիաները:

410. Դիցուք  $\xi_1$  և  $\xi_2$  անկախ պարահական մեծություններն ունեն համապարասխանաբար  $\lambda_1$  և  $\lambda_2$  պարամետրերով ցուցչային բաշխում: Ապացուցել  $\eta_1 = \xi_1 - \xi_2$  և  $\eta_2 = \min(\xi_1, \xi_2)$  պարահական մեծությունների անկախությունը:

411. Դիցուք  $(\xi_1, \xi_2)$  պարահական կերպն ունի հավանականությունների հավասարաչափ բաշխում  $\{(x, y); 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a\}$  քառակուսու ներսում: Ցույց տալ, որ  $\xi_1 - \xi_2$  և  $\min(\xi_1, \xi_2)$  պարահական մեծությունները ունեն միևնույն բաշխում, այսինքն, ցանկացած  $t$ -ի համար  $P(\xi_1 - \xi_2 < t) = P(\min(\xi_1, \xi_2) < t)$ :

412. Դիցուք  $\xi_1$  և  $\xi_2$ -ը անընդհար բաշխման ֆունկցիաներով անկախ պարահական մեծություններ են և  $\eta = \xi_1 + \xi_2$ : Ապացուցել, որ

$$\text{ա) } F_\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\xi_2}(x-u) dF_{\xi_1}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\xi_1}(x-v) dF_{\xi_2}(v);$$

բ) եթե  $\xi_1$  և  $\xi_2$  պարահական մեծություններից մեկն ունի հավանականությունների բաշխման խտություն, ապա

$$f_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x-v) dF_{\xi_2}(v) \quad \text{կամ} \quad f_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_2}(x-u) dF_{\xi_1}(u);$$

գ) եթե  $\xi_1$ -ը,  $\xi_2$ -ը ունեն հավանականությունների բաշխման խտություններ, ապա

$$f_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x-v) f_{\xi_2}(v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_2}(x-u) f_{\xi_1}(u) du :$$

413. Դիցուք  $\xi_1$  և  $\xi_2$ -ը անընդհար բաշխման Փունկցիաներով անկախ պարահական մեծություններ են և  $\eta = \xi_1 - \xi_2$ : Ապացուցել, որ

$$\text{ա) } F_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\xi_1}(x+v) dF_{\xi_2}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_{\xi_2}(u-x)] dF_{\xi_1}(u);$$

բ) եթե  $\xi_1$  և  $\xi_2$  պարահական մեծություններից մեկն ունի բաշխման խտություն, ապա  $\eta$ -ն ևս ունի խտություն և

$$f_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x+v) dF_{\xi_2}(v) \quad \text{կամ} \quad f_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_2}(u-x) dF_{\xi_1}(u);$$

գ) եթե  $\xi_1$ -ը,  $\xi_2$ -ը ունեն բաշխման խտություններ, ապա

$$f_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1}(x+v) f_{\xi_2}(v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_2}(u-x) f_{\xi_1}(u) du :$$

414. Դիցուք  $\xi_1$  և  $\xi_2$  անկախ պարահական մեծություններն ունեն անընդհար բաշխման Փունկցիաներ և  $\eta = \xi_1 \cdot \xi_2$ : Ապացուցել, որ

$$\text{ա) } F_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^0 \left[ 1 - F_{\xi_2} \left( \frac{x}{u} \right) \right] dF_{\xi_1}(u) + \int_0^{\infty} F_{\xi_2} \left( \frac{x}{u} \right) dF_{\xi_1}(u),$$



բ) եթե  $\xi_1$  և  $\xi_2$  պարահական մեծություններից մեկն ունի հավանականությունների բաշխման խտություն, ապա  $\eta$ -ն ևս կունենա հավանականությունների բաշխման խտություն և

$$f_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|v|} f_{\xi_1}\left(\frac{x}{v}\right) dF_{\xi_2}(v) \text{ կամ } f_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|u|} f_{\xi_2}\left(\frac{x}{u}\right) dF_{\xi_1}(u) :$$

գ) եթե  $\xi_1$  և  $\xi_2$  պարահական մեծություններն ունեն խտություններ, ապա

$$f_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|u|} f_{\xi_1}\left(\frac{x}{u}\right) f_{\xi_2}(u) du :$$

415. Դիցուք  $\xi_1$  և  $\xi_2$  անկախ պարահական մեծություններն ունեն անընդհար բաշխման ֆունկցիաներ և  $\eta = \frac{\xi_1}{\xi_2}$ : Ապացուցել, որ

$$\text{ա) } F_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^0 [1 - F_{\xi_1}(vx)] dF_{\xi_2}(v) + \int_0^{\infty} F_{\xi_1}(vx) dF_{\xi_2}(v),$$

բ) եթե  $\xi_1$ -ն ունի խտություն, ապա  $\eta$ -ն ևս կունենա խտություն և

$$f_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |v| \cdot f_{\xi_1}(vx) dF_{\xi_2}(v),$$

գ) եթե  $\xi_1$ -ը և  $\xi_2$ -ը ունեն խտություններ, ապա

$$f_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |v| f_{\xi_1}(vx) f_{\xi_2}(v) dv :$$

416. Դիցուք  $f_{\xi_1, \xi_2}(x, y)$ -ը  $(\xi_1, \xi_2)$  պարահական վեկտորի հավանականությունների բաշխման խտությունն է: Ապացուցել, որ  $\xi_1 + \xi_2$  և  $\xi_1 - \xi_2$  պարահական մեծություններն ունեն հեքրյալ հավանականությունների բաշխման խտություններ՝

$$\text{ա) } f_{\xi_1 + \xi_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1, \xi_2}(x, z - x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1, \xi_2}(z - y, y) dy,$$

$$բ) f_{\xi_1 - \xi_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1, \xi_2}(z + y, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1, \xi_2}(x, x - z) dx :$$

417. Դիցուք  $f_{\xi_1, \xi_2}(x, y)$ -ը  $(\xi_1, \xi_2)$  պարահական վեկտորի հավանականությունների բաշխման խտությունն է: Ապացուցել, որ  $\xi_1 \cdot \xi_2$  և  $\frac{\xi_1}{\xi_2}$  պարահական մեծություններն ունեն հեքրևյալ հավանականությունների բաշխման խտություններ՝

$$ա) f_{\xi_1 \cdot \xi_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1, \xi_2}\left(\frac{z}{y}, y\right) \frac{dy}{|y|} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1, \xi_2}\left(x, \frac{z}{x}\right) \frac{dx}{|x|},$$

$$բ) f_{\xi_1/\xi_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi_1, \xi_2}(zy, y) \cdot |y| dy :$$

418. Դիցուք  $\xi$  և  $\eta$  անկախ պարահական մեծություններն ընդունում են  $0, 1, \dots, n$  արժեքները, ընդ որում  $P(\xi = i) = P(\eta = i) = \frac{1}{n+1}$ ,  $i = 0, \dots, n$ : Գտնել  $\xi + \eta$  պարահական մեծության բաշխման օրենքը:

419.  $\xi_1$  և  $\xi_2$  անկախ պարահական մեծություններն ունեն Պուասոնի բաշխում համապարասխանաբար  $\lambda_1$  և  $\lambda_2$  պարամետրերով: Ապացուցել, որ  $\eta = \xi_1 + \xi_2$  պարահական մեծությունը ունի Պուասոնի բաշխում  $\lambda_1 + \lambda_2$  պարամետրով:

420. Դիցուք  $\xi$  և  $\eta$ -ն անկախ, միաբեասկ բաշխված ամբողջ արժեքներ ընդունող պարահական մեծություններ են,  $p_i = P(\xi = i)$ ,  $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ : Ապացուցել, որ

$$P(\xi - \eta = 0) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} p_i^2 :$$

421. Դիցուք  $\xi$  և  $\eta$ -ն անկախ պարահական մեծություններ են միևնույն  $f(x)$  խտության ֆունկցիայով: Ապացուցել, որ

$$f_{\xi - \eta}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) dx :$$

422. Դիցուք  $\xi_1$  և  $\xi_2$ -ը  $[a, b]$  միջակայքում հավասարաչափ բաշխված պարահական մեծություններ են: Գտնել  $\eta = \xi_1 + \xi_2$  պարահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը:

423. Դիցուք  $\xi$ -ն և  $\eta$ -ն  $[-a/2, a/2]$  միջակայքում հավասարաչափ բաշխված անկախ պարահական մեծություններ են: Գտնել ա)  $\eta = \xi_1 + \xi_2$ , բ)  $\eta = \xi_1 - \xi_2$  պարահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը:

424. Դիցուք  $\xi_1$  և  $\xi_2$ -ը  $[0, 1]$  միջակայքում հավասարաչափ բաշխված պարահական մեծություններ են: Գտնել ա)  $\eta = \xi_1 + \xi_2$ , բ)  $\eta = \xi_1 - \xi_2$ , գ)  $\eta = |\xi_1 - \xi_2|$ , դ)  $\eta = \xi_1 \cdot \xi_2$ , ե)  $\eta = \xi_1/\xi_2$  պարահական մեծությունների հավանականությունների բաշխման խտությունը:

425. Գտնել  $\xi$  և  $\eta$  պարահական մեծությունների ( $\xi + \eta$ ) գումարի հավանականությունների բաշխման խտությունը, եթե  $\xi$ -ն  $[0, 2]$  հավասարաչափ բաշխված պարահական մեծություն է, իսկ  $\eta$ -ն հավասարաչափ է բաշխված  $[-1, 1]$  հավասարաչափ է:

426. Դիցուք  $\xi_1$ -ը և  $\xi_2$ -ը անկախ, միաբետակ բաշխված պարահական մեծություններ են, որոնց հավանականությունների բաշխման խտությունը հավասար է  $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ : Գտնել  $\eta = \xi_1 + \xi_2$  պարահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը:

427. Դիցուք  $\xi$  և  $\eta$  պարահական մեծություններն անկախ են, ընդ որում  $\xi$ -ն ունի ցուցային բաշխում  $\lambda$  պարամետրով, իսկ  $\eta$ -ն հավասարաչափ է բաշխված  $[0, a]$  միջակայքում: Գտնել  $\xi + \eta$  պարահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը:

428. Դիցուք  $\xi_1 \sim N(a_1, \sigma_1^2)$  և  $\xi_2 \sim N(a_2, \sigma_2^2)$  անկախ պարահական մեծություններն ունեն նորմալ բաշխումներ: Ապացուցել, որ  $\eta = \xi_1 + \xi_2$  պարահական մեծությունը ևս ունի  $N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$  նորմալ բաշխում:

429. Դիցուք  $\xi_1$  և  $\xi_2$  անկախ պարահական մեծություններն ունեն  $\Gamma$ -բաշխում համապարասխանաբար  $(\alpha, \beta_1)$  և  $(\alpha, \beta_2)$  պարամետրերով:

րով: Ապացուցել, որ  $\eta = \xi_1 + \xi_2$  պարահական մեծությունը ևս ունի  $\Gamma$ -բաշխում  $(\alpha, \beta_1 + \beta_2)$  պարամետրերով:

430. Դիցուք  $\xi_1$  և  $\xi_2$  անկախ պարահական մեծություններն ունեն ցուցային բաշխում  $\lambda$  պարամետրով: Որոշել ա)  $\eta = \xi_1 - \xi_2$ , բ)  $\eta = \xi_1/\xi_2$  պարահական մեծությունների բաշխման խտությունը:

431.  $\xi$  և  $\eta$  պարահական մեծություններն անկախ են, ընդ որում  $f_\xi(x) = 12x^2(1-x)$ ,  $x \in (0, 1)$ , իսկ  $f_\eta(y) = 2y$ ,  $y \in (0, 1)$ : Գտնել  $\xi \cdot \eta$  պարահական մեծության խտության ֆունկցիան:

432. Դիցուք  $\xi$ -ն և  $\eta$ -ն անկախ,  $N(0, \sigma)$  նորմալ բաշխում ունեցող պարահական մեծություններ են: Ապացուցել, որ  $\zeta = \xi/\eta$  պարահական մեծությունը բաշխված է Կոշիի օրենքով:

433.  $(\xi_1, \xi_2)$  պարահական կեփը հավասարաչափ է բաշխված  $r = 1$  շառավղով շրջանի մեջ: Գտնել  $\eta = \xi_2/\xi_1$  պարահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը:

434.  $\xi$  պարահական մեծությունն ունի Կոշիի բաշխում: Ապացուցել, որ ա)  $1/\xi$ , բ)  $\frac{2\xi}{1-\xi^2}$ , գ)  $\frac{3\xi-\xi^3}{1-3\xi^2}$  պարահական մեծությունը ևս ունի Կոշիի բաշխում:

435. Գտնել  $\eta = \frac{\xi_1+\xi_2}{\xi_1}$  պարահական մեծության բաշխման ֆունկցիան, եթե  $\xi_1$  և  $\xi_2$  պարահական մեծություններն անկախ են և ունեն հավանականությունների ցուցային բաշխում՝  $f(x) = e^{-x}$ ,  $x \geq 0$ :

436. Գտնել  $\eta = \frac{\xi_1}{\xi_1+\xi_2}$  պարահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը, եթե  $\xi_1$  և  $\xi_2$  պարահական մեծություններն անկախ են և ունեն հավանականությունների ցուցային բաշխում՝  $f(x) = e^{-x}$ ,  $x \geq 0$ :

437. Գտնել  $\eta = \frac{\xi_1}{\xi_1+\xi_2}$  պարահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը, եթե  $\xi_1$  և  $\xi_2$  պարահական մեծություններն անկախ են և հավասարաչափ բաշխված  $[0, 1]$  միջակայքում:

438.  $(\xi_1, \xi_2)$  պարահական վեկտորն ունի

$$f_{\xi_1, \xi_2}(x, y) = \begin{cases} x + y, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

հավանականությունների բաշխման խտությունը: Գտնել  $\eta = \xi_1 + \xi_2$  պարահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը:

439.  $(\xi, \eta)$  պարահական վեկտորն ունի

$$f(x, y) = \begin{cases} 24xy(1-x)^2, & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

հավանականությունների բաշխման խտությունը: Գտնել  $(\xi \cdot \eta)$  պարահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը:

440.  $(\xi, \eta)$  պարահական վեկտորի հավանականությունների բաշխման խտությունը հավասար է

$$f(x, y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{մնացած դեպքերում:} \end{cases}$$

Որոշել  $(\xi \cdot \eta)$  պարահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը:

441. Դիցուք  $\xi_1$  և  $\xi_2$ -ը սահմանափակ նորմալ  $N(0, 1)$  բաշխում ունեցող, անկախ պարահական մեծություններ են: Ապացուցել, որ  $\xi_1 - \xi_2$  և  $\xi_1 + \xi_2$  պարահական մեծություններն անկախ են:

442.  $\xi$  և  $\eta$  պարահական մեծություններն անկախ են և ունեն ցուցադրված բաշխում  $\lambda = 1$  պարամետրով: Ապացուցել  $(\xi + \eta)$  և  $\xi/\eta$  պարահական մեծությունների անկախությունը:

443. Դիցուք  $\xi_1$ -ը և  $\xi_2$ -ը անկախ սահմանափակ նորմալ  $N(0, 1)$  բաշխում ունեցող պարահական մեծություններ են: Վաշվել  $P(\xi_1^2 + \xi_2^2 < R^2)$ :

444. Դիցուք  $\xi_1$  և  $\xi_2$ -ը սպանդարդ նորմալ՝  $N(0, 1)$  բաշխված, անկախ պարահական մեծություններ են, իսկ  $\theta$ -ն հավասարաչափ է բաշխված  $[0, 2\pi]$  միջակայքում: Գտնել  $\xi_1 \cos \theta + \xi_2 \sin \theta$  պարահական մեծության բաշխումը:

445. Դիցուք  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  անկախ, միաբեասակ բաշխված պարահական մեծություններն ունեն ցուցային բաշխում  $\lambda > 0$  պարամետրով: Ապացուցել, որ  $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$  պարահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունն ունի հետևյալ տեսքը՝

$$f_{S_n}(x) = \begin{cases} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0: \end{cases}$$

446. Դիցուք  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ -ը սպանդարդ նորմալ՝  $N(0, 1)$  բաշխված, անկախ պարահական մեծություններն են: Ապացուցել, որ  $\chi^2 = \sum_{k=1}^n \xi_k^2$  պարահական մեծությունը ունի

$$f_{\chi^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

հավանականությունների բաշխման խտություն:

447. Դիցուք  $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  պարահական մեծություններն անկախ են և ունեն սպանդարդ նորմալ՝  $N(0, 1)$  բաշխում: Ապացուցել, որ

$$\eta = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2}}$$

պարահական մեծության հավանականությունների բաշխման խտությունը հավասար է

$$f_{\eta}(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{n}{2})} (1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}} :$$

### Պարահական մեծության թվային բնութագրիչները

$\xi = \xi(\omega)$  պարահական մեծության մաթեմատիկական սպասում կամ միջին արժեք անվանում են հետևյալ թիվը՝

$$E\xi = \int_{\Omega} \xi(\omega)P(d\omega),$$

եթե աջ մասում գրված Լեբեգի ինտեգրալը գոյություն ունի: Այն համընկնում է  $x$ -ի Ստիվյեսի ինտեգրալի հետ

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_{\xi}(x),$$

եթե ինտեգրալը բացարձակ զուգամետ է:

Դիսկրետ  $\xi$  պարահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը հավասար է՝

$$E\xi = \sum_k x_k p_k, \quad \text{եթե} \quad \sum_k |x_k| p_k < \infty :$$

Բացարձակ անընդհար  $\xi$  պարահական մեծության մաթեմատիկական սպասումը հավասար է՝

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{\xi}(x) dx, \quad \text{եթե} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x| f_{\xi}(x) dx < \infty :$$

$g(x)$  անընդհար ֆունկցիայի համար

$$Eg(\xi) = \int_{\Omega} g(\xi(\omega))P(d\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF_{\xi}(x) :$$

Դիսկրետ  $\xi$  պարահական մեծության դեպքում

$$Eg(\xi) = \sum_k g(x_k) p_k, \quad \text{եթե} \quad \sum_k |g(x_k)| p_k < \infty :$$

Բացարձակ անընդհար  $\xi$  պարահական մեծության դեպքում

$$Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_{\xi}(x)dx, \quad \text{եթե} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|f_{\xi}(x)dx < \infty :$$

$\nu_k = E\xi^k$  թիվը անվանում են  $\xi$  պարահական մեծության  $k$ -րդ կարգի սկզբնական մոմենտ ( $k$ -ն իրական թիվ է),  $\mu_k = E(\xi - E\xi)^k$  թիվը անվանում են  $\xi$ -ի  $k$ -րդ կարգի կենտրոնական մոմենտ ( $k$ -ն իրական թիվ է):

Երկրորդ կարգի կենտրոնական մոմենտը անվանում են դիսպերսիա և նշանակում են  $D\xi = E(\xi - E\xi)^2$ :  $\sigma = \sqrt{D\xi}$  մեծությունը անվանում են միջին քառակուսային շեղում:

$\xi$  և  $\eta$  պարահական մեծությունների կորելյացիայի գործակից անվանում են հետևյալ մեծությունը՝

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)}{\sqrt{D\xi D\eta}}, \quad D\xi \neq 0, D\eta \neq 0 :$$

$E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)$  մեծությունը անվանում են կովարիացիա և նշանակում՝

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) :$$

Նշենք պարահական մեծությունների թվային բնութագրիչների հարկությունները:

1.  $EC = C$ ,  $C$ -ն հասարարուն է:
2.  $EC\xi = CE\xi$ ,  $C$ -ն հասարարուն է:
3.  $E\xi \geq 0$ , եթե  $P(\xi \geq 0) = 1$ :
4. Եթե  $\xi \geq 0$  և  $E\xi = 0$ , ապա  $P(\xi = 0) = 1$ :
5.  $E\xi \geq E\eta$ , եթե  $P(\xi \geq \eta) = 1$ :
6.  $E I_A(\omega) = P(A)$ , որտեղ  $I_A(\omega)$ -ն  $A$  բազմության ինդիկատորն է՝
$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$
7.  $E(\xi \pm \eta) = E\xi \pm E\eta$ , եթե գոյություն ունեն նշված երեք մաթ. սպասումներից զոնե երկուսը:
8.  $E\xi\eta = E\xi E\eta$ , եթե  $\xi$  և  $\eta$ -ն անկախ պարահական մեծություններ են:



9.  $DC = 0$ , որպես  $C$ -ն հասարարուն թիվ է:
10. Եթե  $D\xi = 0$ , ապա  $P(\xi = C) = 1$ , որպես  $C = E\xi$ :
11.  $D(a\xi + b) = a^2 D\xi$ ,  $a$ -ն և  $b$ -ն հասարարուններ են:
12.  $D(\xi \pm \eta) = D\xi + D\eta$ , եթե  $\xi$ -ն և  $\eta$ -ն անկախ պարահական մեծություններ են:
13.  $D\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right) = \sum_{k=1}^n D\xi_k + 2 \sum_{k < j} cov(\xi_k, \xi_j)$ :
14.  $|\rho(\xi, \eta)| \leq 1$  :
15.  $|\rho(\xi, \eta)| = 1$  այն և միայն այն դեպքում, երբ  $P(a\xi + b\eta = c) = 1$ , որպես  $a$ -ն,  $b$ -ն,  $c$ -ն հասարարուններ են:
16. Եթե  $\xi$ -ն և  $\eta$ -ն անկախ են, ապա  $\rho(\xi, \eta) = 0$ : Նակառակը ճիշտ չէ: Եթե  $\rho(\xi, \eta) = 0$ , ապա  $\xi$ -ն և  $\eta$ -ն կոչվում են չկորելացված:

### Պարահական վեկտորի թվային բնութագրիչները

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  պահարական վեկտորի մաթեմարիկական սպասում անվանում են  $E\xi = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  վեկտորը, որպես  $a_k = E\xi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  :

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  պահարական վեկտորի դիսպերսիոն (կովարիահցիոն) մարրից կամ դիսպերսիա անվանում են հետևյալ մարրիցը`

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

որպես  $b_{ij} = cov(\xi_i, \xi_j) = E(\xi_i - E\xi_i)(\xi_j - E\xi_j)$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, n$  :

Նշենք  $B$  մարրիցի հարկությունները`

- $b_{ij} = b_{ji}$ ;  $i, j = 1, 2, \dots, n$  մարրիցը համաչափ է:
- $b_{ii} = D\xi_i$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$  :
- Ցանկացած  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  իրական թվերի համար րեղի ունի

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \alpha_i \alpha_j \geq 0,$$

այսինքն  $B$  մարրիցը ոչ բացասական որոշված է:

Նշենք որոշ կարևոր անհավասարություններ, որպեսզի մասնակցում են պարահական մեծությունների մոմենտները:

**Կոշու-Բունյակովսկու անհավասարությունը՝** եթե  $\xi$  և  $\eta$  պարահական մեծություններն այնպիսին են, որ  $E\xi^2 < \infty$ ,  $E\eta^2 < \infty$ , ապա

$$E|\xi\eta| \leq \sqrt{E\xi^2}\sqrt{E\eta^2} :$$

**Լյապունովի անհավասարությունը՝**  $0 < s < r$  դեպքում

$$(E|\xi|^s)^{1/s} \leq (E|\xi|^r)^{1/r} :$$

**Գյոլդերի անհավասարությունը՝** եթե  $p > 1$ ,  $q > 1$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $E|\xi|^p < \infty$ ,  $E|\eta|^q < \infty$ , ապա

$$E|\xi\eta| \leq (E|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} (E|\eta|^q)^{\frac{1}{q}} :$$

**Միրնովսկու անհավասարությունը՝** եթե  $E|\xi|^r < \infty$ ,  $E|\eta|^r < \infty$ ,  $r \geq 1$ , ապա

$$(E|\xi + \eta|^r)^{\frac{1}{r}} \leq (E|\xi|^r)^{\frac{1}{r}} + (E|\eta|^r)^{\frac{1}{r}} :$$

### Պայմանական մաթեմատիկական սպասում

Դիցուք  $\xi$  և  $\eta$ -ն դիսկրետ պարահական մեծություններ են:  $\xi$  պարահական մեծության պայմանական մաթեմատիկական սպասում  $\eta = y$  պայմանի դեպքում կոչվում է

$$E(\xi/\eta = y) = \sum_x xP(\xi = x/\eta = y) = \sum_x xp_{\xi/\eta}(x/y)$$

մեծությունը, որպեսզի

$$p_{\xi/\eta}(x/y) = \frac{P(\xi = x, \eta = y)}{P_\eta(y)}, \quad P_\eta(y) = P(\eta = y) > 0 :$$

Եթե  $\xi$  և  $\eta$ -ն բացարձակ անընդհար պարահական մեծություններ են, ապա

$$E(\xi/\eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_{\xi/\eta}(x/y) dx,$$

որպեղ

$$f_{\xi/\eta}(x/y) = \frac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_{\eta}(y)}, \quad f_{\eta}(y) > 0$$

պայմանական հավանականային բաշխման խտությունն է:

## Ա

448.  $\xi$  պարահական մեծությունը ընդունում է  $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$  արժեքներ  $P(\xi = i) = \frac{1}{2n+1}$  հավանականություններով: Գտնել  $E\xi$ -ն և  $D\xi$ -ն:

449. Նշանակեքին կրակում են 20 անգամ: Մեկ կրակոցով դիպչելու հավանականությունը հավասար է 0,7-ի: Գտնել դիպումների թվի մաթ. սպասումը և դիսպերսիան:

450.  $\xi$  պարահական մեծությունը ունի բինոմական բաշխում  $n, p$  պարամետրերով: Նայքնի, որ  $E\xi = 12$ ,  $D\xi = 4$ : Գտնել  $n$ -ը և  $p$ -ն:

451. Խաղացողը շահում է 30\$, եթե ներված երեք զառերից յուրաքանչյուրի վրա բացվում է «6»-ը, շահում է 20\$, եթե դրանցից երկուսի վրա բացվում է «6»-ը, և 10\$, եթե միայն մեկի վրա է բացվում «6»-ը: Գտնել խաղացողի շահած գումարի մաթ. սպասումը:

452. 10 արտադրանքներից 3-ը խտրան են: Պարահականորեն վերցնում են երկու արտադրանք: Գտնել դրանց մեջ գրավող խտրան արտադրանքների թվի միջինը և դիսպերսիան:

453. 2 սպիտակ և 3 սև գնդիկ պարունակող սափորից պարահականորեն հանում են 2 գնդիկ: Գտնել դրանց մեջ սպիտակ գնդիկների թվի մաթ. սպասումը և դիսպերսիան:

454.  $A$  պարահույթի ի հայր գալու հավանականությունը  $n$  անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում հավասար է  $p$ -ի: Գտնել  $A$  պարահույթի ի հայր գալու և ի հայր չգալու թվերի փարբերության մաթ. սպասումը:

455.  $\xi$  պարահական մեծությունն ընդունում է ոչ բացասական ամբողջ արժեքներ, ընդ որում  $E\xi < +\infty$ : Ապացուցել, որ

$$E\xi = \sum_{i=1}^n P(\xi \geq i) :$$

456.  $\xi$  պարահական մեծությունը ընդունում է ոչ բացասական ամբողջ  $n \geq 0$  արժեքներ

$$p_n = A \frac{k^n}{n!}$$

հավանականություններով: Գտնել  $A$  և  $k$ -ն, եթե հայտնի է, որ  $E\xi = a$ :

457.  $\xi$  պարահական մեծությունն ընդունում է ոչ բացասական ամբողջ արժեքներ

$$P(\xi = n) = \frac{a^n}{(1+a)^{n+1}}, \quad a > 0$$

հավանականություններով (Պասկալի բաշխում): Նաշվել  $E\xi$ -ն և  $D\xi$ -ն:

458.  $\xi$  պարահական մեծությունն ընդունում է դրական ամբողջ արժեքներ նվազող երկրաչափական պրոգրեսիա կազմող հավանականություններով: Գտնել այդ պրոգրեսիայի առաջին  $a$  անդամը և  $q$  հայտարարն այնպես, որ  $E\xi = 10$ :

459.  $\xi$  պարահական մեծությունն ընդունում է  $0, 1, \dots$  արժեքները նվազող երկրաչափական պրոգրեսիա կազմող հավանականություններով: ա) Գտնել  $E\xi$ -ի և  $D\xi$ -ի միջև եղած կախվածությունը: բ) Գտնել  $P(\xi = n)$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , եթե հայտնի է, որ  $E\xi = a$ :

460. Մերադադրամը նետում են մինչև «գերբի» առաջին անգամ ի հայտ գալը: Գտնել նետումների թվի մաթ. սպասումը և դիսպերսիան:

461. Անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում  $A$  պարահույթի ի հայտ գալու հավանականությունը հավասար է  $p$ -ի ( $0 < p < 1$ ): Փորձերը կարարում են մինչև  $A$  պարահույթի առաջին անգամ ի հայտ գալը: Գտնել կարարվող փորձերի  $\xi$  թվի մաթ. սպասումը և դիսպերսիան:

462.  $[a, b]$  միջակայքում հավասարաչափ բաշխված  $\xi$  պարահական մեծության մաթ. սպասումը հավասար է  $E\xi = 4$ , իսկ դիսպերսիան՝  $D\xi = 3$ : Գտնել  $\xi$  պարահական մեծության բաշխման խտությունը:

463.  $\xi$  պարահական մեծությունը բաշխված է Լապլասի օրենքով  $f(x) = ae^{-\lambda|x|}$ ,  $\lambda > 0$ : Գտնել  $a$ ,  $E\xi$ ,  $D\xi$ -ն:

464.  $\xi$  պարահական մեծությունը բաշխված է Ռելեի օրենքով՝

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ Axe^{-\lambda^2 x^2}, & x > 0: \end{cases}$$

Գտնել  $A$ ,  $E\xi$ ,  $D\xi$ -ն:

465.  $\xi$  պարահական մեծությունն ունի

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{n!} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

հավանականությունների բաշխման խտություն: Գտնել  $E\xi$  և  $D\xi$ -ն:

466.  $\xi$  պարահական մեծությունն ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝

$\xi$	-1	0	1
$P$	1/3	1/3	1/3

Գտնել ա)  $\eta = |\xi|$  պարահական մեծության բաշխումը, բ)  $E\eta$  և  $D\eta$ -ն:

467.  $\xi$  պարահական մեծությունն ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝

$\xi$	-1	0	1	2
$P$	0,2	0,1	0,3	0,4

Գտնել  $\eta = 2^\xi$  պարահական մեծության մաթ. սպասումը և դիսպերսիան:

468. Դիցուք  $\xi$  պարահական մեծությունն ունի ցուցային բաշխում  $\lambda$  պարամետրով: Գտնել  $\eta = e^{-\xi}$  պարահական մեծության մաթ. սպասումը և դիսպերսիան:

469.  $\xi$  պարահական մեծությունը հավասարաչափ է բաշխված  $[0, 1]$  միջակայքում: Գտնել ա)  $E \sin^2 \pi \xi$ , բ)  $E e^\xi$ :

470.  $\xi$  պարահական մեծությունն ունի հետևյալ բաշխման խտությունը՝

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} :$$

Գտնել ա)  $\eta = \sin \xi$ , բ)  $\eta = |\sin \xi|$  պարահական մեծության մաթ. սպասումը և դիսպերսիան:

471. Դիցուք  $E\xi = 0$  և  $E|\xi| = 1$ : Գտնել ա)  $E \max(0, \xi)$ , բ)  $E \min(0, \xi)$ :

472. Դիցուք  $\xi$  պարահական մեծության բաշխման խտությունը հավասար է

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} :$$

Նաշվել  $E \min(|\xi|, 1)$ :

473.  $l$  երկարություն ունեցող ձողը պարահականորեն կտրել են 2 մասի: Գտնել փոքր մասի  $\eta$  երկարության բաշխման ֆունկցիան,  $E\eta$ -ն և  $D\eta$ -ն:

474. Երկչափ  $(\xi, \eta)$  պարահական մեծության հավանականությունների բաշխման օրենքն է՝

$\eta \setminus \xi$	0	1
-1	0,1	0,2
0	0,2	0,3
1	0	0,2

Գտնել  $\eta = 2\xi + \eta^2$  պարահական մեծության մաթ. սպասումը և դիսպերսիան:

475. Տրված է երկչափ պարահական մեծության հավանականությունների բաշխման աղյուսակը՝

$\eta \backslash \xi$	0	1	2	3	4	5
0	0,01	0,05	0,12	0,02	0	0,01
1	0,02	0	0,01	0,05	0,02	0,02
2	0	0,05	0,1	0	0,3	0,05
3	0,01	0	0,02	0,01	0,03	0,1

Գտնել՝

- $P(\xi = 2/\eta = 3)$ ,    3.  $E(\xi + \eta)$ ,    5.  $P(\xi + \eta < 5/\eta \leq 2)$ ,
- $E(\xi/\eta = 1)$ ,    4.  $E(\xi^2/\eta \leq 1)$ ,    6.  $E(\xi\eta/\eta \leq 1)$ :

476. Ներում են երկու զառ: Դիցուք  $\xi$ -ն բացված միավորների թիվն է առաջին զառի վրա, իսկ  $\eta$ -ն բացված երկու միավորներից մեծագույնն է: ա) Գտնել  $\xi$  և  $\eta$  պարահական մեծությունների համարեղ բաշխումը, բ) հաշվել  $E\xi$ ,  $D\xi$ ,  $E\eta$ ,  $D\eta$  և  $cov(\xi, \eta)$ -ն:

477. Գտնել  $\zeta = 2\xi - 3\eta$  պարահական մեծության մաթ. սպասումը և դիսպերսիան, եթե

$$E\xi = 0, E\eta = 2, D\xi = 2, D\eta = 1, \rho(\xi, \eta) = -\frac{1}{\sqrt{2}}:$$

478. Նշանակենք երկու զառերի վրա բացված միավորների գումարը և արբերությունը համապարասխանաբար  $\xi$ -ով և  $\eta$ -ով: Ապացուցել, որ  $\xi$  և  $\eta$  պարահական մեծությունները անկախ չեն:

479.  $\xi$  և  $\eta$  պարահական մեծություններն անկախ են և նորմալ բաշխված միևնույն  $(a, \sigma^2)$  պարամետրերով: Գտնել  $v_1 = \alpha\xi + \beta\eta$  և  $v_2 = \alpha\xi - \beta\eta$  պարահական մեծությունների կորելյացիայի գործակիցը:

480. Դիցուք  $\xi_1$  և  $\xi_2$ -ը անկախ և միևնույն վերջավոր դիսպերսիա ունեցող պարահական մեծություններ են: Ապացուցել, որ  $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$  և  $\eta_1 = \xi_1 - \xi_2$  պարահական մեծությունները չկորելացված են:

481.  $\xi$  պարահական մեծությունը հավասարաչափ է բաշխված  $[0, 1]$  հարվածում: Գտնել հերևյալ պարահական մեծությունների կորելյացիայի գործակիցը՝

- ա)  $\xi$  և  $\xi^2$ ,

բ)  $\xi$  և  $\xi^3$ :

482.  $\xi$  պարահական մեծությունը հավասարաչափ է բաշխված  $[-1, 1]$  հարվածում: Գտնել հետևյալ պարահական մեծությունների կորելյացիայի գործակիցը՝

ա)  $\xi$  և  $\sin \frac{\pi\xi}{2}$ ,

բ)  $\sin \frac{\pi\xi}{2}$  և  $\cos \frac{\pi\xi}{2}$ :

483. Դիցուք  $\xi$  և  $\eta$ -ն անկախ պարահական մեծություններ են, ընդ որում  $E\xi = 1, E\eta = 2, D\xi = 1, D\eta = 4$ : Գտնել հետևյալ պարահական մեծությունների մաթ. սպասումները՝

ա)  $\xi^2 + 2\eta^2 - \xi\eta - 4\xi + \eta + 4$ ,

բ)  $(\xi + \eta + 1)^2$ :

484. Դիցուք  $\xi$  պարահական մեծությունն ունի հետևյալ խտության ֆունկցիան՝

$$\text{ա) } f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ ke^{-k(x-a)}, & x \geq a, \end{cases}$$

$$\text{բ) } f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, 2] \\ 1 - |x - 1|, & x \in [0, 2] : \end{cases}$$

Նաշվել այդ պարահական մեծությունների մաթ. սպասումը և դիսպերսիան:

485. Դիցուք  $\xi$  և  $\eta$ -ն ընդունում են  $-1$  կամ  $1$  արժեքները հետևյալ հավանականություններով՝

$$p(i, j) = P(\xi = i, \eta = j), \quad i = -1, 1, j = -1, 1 :$$

Ենթադրենք  $E\xi = E\eta = 0$ : Ապացուցել, որ  $p(1, 1) = p(-1, -1)$  և  $p(-1, 1) = p(1, -1)$  և գտնել  $D\xi, D\eta, \text{cov}(\xi, \eta)$ :

486. Դիցուք փրված է  $(\xi, \eta)$  երկչափ պարահական մեծության բաշխումը

$$p(1, 1) = 1/9, \quad p(2, 1) = 1/3, \quad p(3, 1) = 1/9$$



$$p(1, 2) = 1/9, \quad p(2, 2) = 0, \quad p(3, 2) = 1/18$$

$$p(1, 3) = 0, \quad p(2, 3) = 1/6, \quad p(3, 3) = 1/9:$$

ա) Գտնել  $E(\xi/\eta = i) \quad i = 1, 2, 3$  :

բ) Անկախ են արդյոք  $\xi$ -ն և  $\eta$ -ն:

## Բ

487. Սափորը պարունակում է  $N$  գնդիկ, որոնցից  $n$ -ը սպիտակ է: Նանել են  $m$  գնդիկ ( $m \leq \min(n, N - n)$ ): Դիցուք  $\xi$ -ն հանված գնդիկների մեջ սպիտակ գնդիկների քանակն է: Գտնել ա)  $\xi$  պարահական մեծության բաշխումը (այն անվանում են հիպերերկրաչափական), բ) գտնել  $E\xi$ -ն և  $D\xi$ -ն:

488. 2 սպիտակ և 4 սև գնդիկ պարունակող սափորից հանում են 3 գնդիկ և փեղափոխում են երկրորդ սափոր, որտեղ կար 5 սպիտակ գնդիկ: Այնուհետև երկրորդ սափորից փեղափոխում են առաջին սափոր 4 գնդիկ: Որոշել երկու սափորներում սպիտակ գնդիկների  $\xi_1$  և  $\xi_2$  թվերի մաթ. սպասումները:

489. Դիցուք  $n$  անկախ փորձերում, որոնցից յուրաքանչյուրում  $A$  պարահայտի ի հայտ գալու թիվը հավասար է  $\mu$ -ի,  $P(A) = p$ :  $\xi$ -ն պարահական մեծություն է, որն ընդունում է 0 կամ 1 արժեքներ՝ կախված  $\mu$ -ի զույգ կամ կենտ լինելուց: Գտնել  $E\xi$ -ն:

490.  $m$  սպիտակ և  $n$  սև գնդիկ պարունակող սափորից հանում են մեկական գնդիկ, յուրաքանչյուր անգամ վերադարձնելով այն սափոր, մինչև սպիտակ գնդիկի առաջին անգամ ի հայտ գալը: Գտնել հանված սև գնդիկների թվի մաթ. սպասումը:

491. Դիցուք  $\xi$ -ն Բեռնուլիի անկախ փորձերի հաջորդականության առաջին փորձից սկսված «սերիայի» (հաջողությունների կամ անհաջողությունների) երկարությունն է: Գտնել  $\xi$  պարահական մեծության բաշխումը,  $E\xi$  և  $D\xi$ -ն:

492.  $\xi$  պարահական մեծությունն ունի  $(\alpha, \beta)$  պարամետրերով  $\Gamma$ -բաշխում, այսինքն նրա բաշխման խտությունը հավասար է

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} x^{\beta-1} e^{-\alpha x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 : \end{cases}$$

Գտնել  $E\xi$  և  $D\xi$ -ն:

493.  $\xi$  պարահական մեծությունն ունի Պուասոնի բաշխում  $\lambda$  պարամետրով: Նաշվել  $E\frac{1}{1+\xi}$ :

494. Դիցուք  $F(x)$  բաշխման ֆունկցիա ունեցող  $\xi$  պարահական մեծությունն ունի մաթ. սպասում: Ապացուցել, որ

$$E\xi = - \int_{-\infty}^0 F(x) dx + \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx :$$

495. Դիցուք  $\xi$  պարահական մեծությունն ունի  $F(x)$  բաշխման ֆունկցիա և զոյություն ունի նրա մաթ. սպասումը: Ապացուցել, որ փրեդի ունեն հետևյալ առնչությունները՝

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F(x)) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x F(x) = 0 :$$

496.  $\xi$  պարահական մեծությունն ունի հետևյալ բաշխման խտությունը՝

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0, 1) \\ cx, & x \in (0, 1) : \end{cases}$$

Գտնել  $c$  հաստատունը և  $\eta = \xi^2$  պարահական մեծության մաթ. սպասումը և դիսպերսիան:

497. ա) Գտնել  $E|\xi|$ -ն, եթե  $\xi$  պարահական մեծությունն ունի  $(0, \sigma^2)$  պարամետրերով նորմալ բաշխում,

բ) Գտնել  $E|\xi - a|$ , եթե  $\xi$ -ն  $(a, \sigma^2)$  պարամետրերով նորմալ բաշխված պարահական մեծություն է:

498.  $[0, a]$  հավավածի վրա պարահականորեն նշում են երկու կետ: Դիցուք  $\eta$ -ն նրանց միջև եղած հեռավորությունն է: Որոշել  $E\eta$ -ն և  $D\eta$ -ն:

499.  $P$  կետը հավասարաչափ է բաշխված  $(0, 0)$  կենտրոնով և  $R$  շառավիղ ունեցող շրջանի մեջ: Դիցուք  $P$  կետի հեռավորությունը շրջանի կենտրոնից հավասար է  $\eta$ -ի: Գտնել  $E\eta$ -ն և  $D\eta$ -ն:

500.  $P$  կետը հավասարաչափ է բաշխված  $(0, 0)$  կենտրոնով և  $R$  շառավիղ ունեցող շրջանագծի վրա:  $P$  կետից շրջանին փարված է շոշափող: Գտնել շոշափողի այն հավավածի  $\xi$  երկարության բաշխման ֆունկցիան և խտությունը, որը միացնում է  $P$  կետը  $OX$  առանցքի նրա հարման կետի հետ: Գոյություն ունի՞ արդյոք  $E\xi$ -ն:

501.  $R$  շառավիղ ունեցող շրջանագծի վրա պարահականորեն վերցնում են երկու կետ: Գտնել դրանց միջև եղած  $\xi$  հեռավորության բաշխման ֆունկցիան և հաշվել  $E\xi$ -ն:

502. Դիցուք  $\xi$  և  $\eta$ -ն ոչ բացասական ամբողջ արժեքներ ընդունող անկախ պարահական մեծություններ են, ընդ որում  $E\xi < +\infty$ : Ապացուցել, որ

$$E \min(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\xi \geq i) P(\eta \geq i) :$$

503. Դիցուք  $\xi$  և  $\eta$ -ն  $[0, 1]$  միջակայքում հավասարաչափ բաշխված պարահական մեծություններ են: Ապացուցել, որ  $\xi$ -ի և  $\eta$ -ի ցանկացած կախվածության դեպքում  $E|\xi - \eta| \leq 1/2$ : (Ցուցում՝ հաշվել  $E|\xi - 1/2|$  և  $E|\eta - 1/2|$  և օգտագործել  $|x - y| \leq |x| + |y|$  անհավասարությունը:)

504. Դիցուք  $\xi$  պարահական մեծությունը նորմալ է բաշխված  $(0, 1)$  պարամետրերով: Նաշվել  $\eta = \cos \xi$  պարահական մեծության մաթ. սպասումը և դիսպերսիան:

505. Դիցուք  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  դրական, միաբեասկ բաշխված, անկախ պարահական մեծություններ են: Ապացուցել, որ եթե  $k \leq n$ , ապա

$$E \left( \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k}{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n} \right) = \frac{k}{n} :$$

506. 1, 2, ..., 29, 30 թվերից անվերադարձ նմուշահանման սխեմայով վերցնում են փասք թիվ: Պարնել նշված թվերի գումարի մաթեմատիկական սպասումը: (Ցուցում՝ դիցուք  $\xi_k$ -ն,  $k = 1, 2, \dots, 10$ ,  $k$ -րդ նշված թիվն է: Ապացուցել, որ  $\xi_k$ -երը միապետակ են բաշխված):

507. Պրված են  $n$  նամակներ, սակայն ծրարները հասցեագրված են պարահական կարգով: Դիցուք  $\xi$ -ն այն նամակների թիվն է, որոնք հասել են իրենց հասցեատերերին: Պարնել  $E\xi$ -ն և  $D\xi$ -ն:

508. Ապացուցել, որ  $E\xi\eta = E\xi E\eta$  հավասարությունից ընդհանուր դեպքում չի բխում  $\xi$ -ի և  $\eta$ -ի անկախությունը:

509. Ապացուցել, որ  $E\xi\eta = E\xi E\eta$  հավասարությունից բխում է  $\xi$ -ի և  $\eta$ -ի անկախությունը, եթե  $\xi$ -ն և  $\eta$ -ն յուրաքանչյուրն ընդունում են երկու արժեք:

510. Դիցուք  $\xi$  պարահական մեծությունն ունի ցուցչային բաշխում  $\lambda$  պարամետրով, իսկ  $\varphi$ -ն հավասարաչափ է բաշխված  $[0, 2\pi]$  միջակայքում: Պարնել  $\eta = \sin(\xi + \varphi)$  պարահական մեծության մաթ. սպասումը, եթե  $\xi$ -ն և  $\varphi$ -ն անկախ են:

511. Դիցուք  $\xi_1$  և  $\xi_2$ -ը  $(a, \sigma^2)$  պարամետրերով անկախ, նորմալ բաշխված պարահական մեծություններ են: Ապացուցել, որ

$$E \max(\xi_1, \xi_2) = a + \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}, \quad E \min(\xi_1, \xi_2) = a - \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}} :$$

512. Դիցուք  $(\xi, \eta)$  վեկտորն ունի նորմալ բաշխում, ընդ որում  $E\xi = E\eta = 0$ ,  $E\xi^2 = E\eta^2 = 1$ ,  $E\xi\eta = \rho$ : Ապացուցել, որ

$$E \max(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{1 - \rho}{\pi}} :$$

513. Դիցուք  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ -ը վերջավոր մաթ. սպասումներ ունեցող պարահական մեծություններ են: Ապացուցել, որ

$$E \max\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} \geq \max\{E\xi_1, E\xi_2, \dots, E\xi_n\},$$

$$E \min\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\} \leq \min\{E\xi_1, E\xi_2, \dots, E\xi_n\} :$$

514.  $\xi$  և  $\eta$  պարահական մեծություններն ունեն վերջավոր դիսպերսիաներ՝  $D\xi = \sigma_1^2$ ,  $D\eta = \sigma_2^2$ : Գտնել  $D(\xi+\eta)$ -ի փոփոխման միջակայքը:

515. Ապացուցել, որ եթե  $\xi$  և  $\eta$  պարահական մեծություններն անկախ են, ապա

$$D\xi\eta = D\xi D\eta + (E\xi)^2 D\eta + (E\eta)^2 D\xi, \quad \text{այսինքն} \quad D\xi\eta \geq D\xi D\eta :$$

516. Գտնել համապարասխանաբար  $[0, 1]$  և  $[1, 3]$  միջակայքերում հավասարաչափ բաշխված  $\xi$  և  $\eta$  անկախ պարահական մեծությունների  $\xi \cdot \eta$  արտադրյալի մաթ. սպասումը:

517.  $(\xi, \eta)$  պարահական կեպը հավասարաչափ է բաշխված  $R = [0, 1] \times [0, 1]$  քառակուսու ներսում: Գտնել  $\zeta = \xi \cdot \eta$  պարահական մեծության մաթ. սպասումը և դիսպերսիան:

518.  $(\xi, \eta)$  պարահական կեպը հավասարաչափ է բաշխված  $(0, 0)$  կենտրոն և  $r = 1$  շառավիղ ունեցող շրջանի ներսում: Գտնել  $\zeta = \xi \cdot \eta$  պարահական մեծության մաթ. սպասումը և դիսպերսիան:

519.  $\xi$  պարահական մեծությունը հավասարաչափ է բաշխված  $[a, b]$  միջակայքում: Գտնել  $a$  և  $b$ -ն, եթե  $E\xi^2 = 1$ ,  $E\xi = -E\xi^3$ :

520. Դիցուք  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  պարահական մեծություններն անկախ են, ունեն  $0$ -ին հավասար մաթ. սպասումներ և վերջավոր երրորդ կարգի մոմենտներ: Ապացուցել, որ

$$E \left( \sum_{k=1}^n \xi_k \right)^3 = \sum_{k=1}^n E\xi_k^3 :$$

521. Նաշվել  $\lambda$  պարամետրով ցուցչային բաշխում ունեցող  $\xi$  պարահական մեծության սկզբնական մոմենտները:

522. Նաշվել  $(a, \sigma^2)$  պարամետրերով նորմալ բաշխված  $\xi$  պարահական մեծության կենտրոնական մոմենտները:

523. Դիցուք  $\xi$  պարահական մեծությունն ընդունում է վերջավոր թվով ոչ բացասական  $x_1, x_2, \dots, x_n$  արժեքներ: Ապացուցել, որ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E\xi^{n+1}}{E\xi^n} = \max_{1 \leq i \leq k} x_i, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{E\xi^n} = \max_{1 \leq i \leq k} x_i :$$

524. Ապացուցել, որ եթե  $E\xi^2 = E\xi^3 = E\xi^4$ , ապա  $\xi$  պարահական մեծությունը դիսկրետ է և կարող է ընդունել միայն երկու՝ 0 և 1 արժեքներ:

525. Ապացուցել, որ եթե  $E\xi^{2n}, E\xi^{2n+1}, E\xi^{2n+2}$  թվերը հանդիսանում են թվաբանական պրոգրեսիայի հաջորդական անդամներ, ապա նրանք իրար հավասար են, իսկ  $\xi$  մեծությունը դիսկրետ է և կարող է ընդունել միայն 0 և 1 արժեքները:

526.  $\xi$  պարահական մեծությունն ընդունում է  $\pm 1, \pm 2$  արժեքները յուրաքանչյուրը  $1/4$  հավանականությամբ, իսկ  $\eta = \xi^2$ : ա) Գտնել  $\xi$ -ի և  $\eta$ -ի համադրեղ բաշխումը: բ) Ապացուցել, որ  $\rho(\xi, \eta) = 0$ : գ) Ապացուցել, որ  $\xi$ -ն և  $\eta$ -ն անկախ չեն:

527.  $(\xi, \eta)$  պարահական վեկտորն ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝

$\eta \setminus \xi$	-1	0	1
0	1/12	1/12	1/12
1	0	1/4	1/4
2	1/8	0	1/8

Գտնել նրա դիսպերսիոն մաթրիցը:

528. Բերել երկու պարահական մեծությունների օրինակ, որոնց կորելյացիայի գործակիցը հավասար է 0-ի, սակայն դրանք անկախ չեն:

529.  $\xi$  և  $\eta$  պարահական մեծություններն անկախ են և  $P(\xi = 1) = P(\xi = -1) = 1/2, P(\eta = 1) = P(\eta = -1) = 1/4, P(\eta = 0) = 1/2$ : Կլինե՞ն արդյոք  $\xi \cdot \eta$  և  $\eta$  պարահական մեծությունները ա) անկախ, բ) չկորելացված:

530.  $(\xi, \eta)$  պարահական վեկտորը հավասարաչափ է բաշխված  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  գագաթներ ունեցող եռանկյան ներսում: Գտնել  $\xi$ -ի և  $\eta$ -ի կորելյացիայի գործակիցը:

531. Դիցուք  $\xi \sim N(0, \sigma)$ : Գտնել  $(\xi, \xi^3)$  պարահական վեկտորի դիսպերսիոն մասրիցը:

532.  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  պարահական մեծություններից յուրաքանչյուր երկուսի կորելյացիայի գործակիցը հավասար է  $\rho$ -ի: Ապացուցել, որ

$$\rho \geq \frac{-1}{n-1} :$$

533.  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+m}$ ,  $(n \geq m)$  պարահական մեծություններն անկախ են, միաբետակ բաշխված և ունեն վերջավոր դիսպերսիաներ: Գտնել  $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$  և  $\eta_2 = \xi_{m+1} + \xi_{m+2} + \dots + \xi_{m+n}$  պարահական մեծությունների կորելյացիայի գործակիցը:

534. Դիցուք  $\xi$  և  $\eta$  պարահական մեծությունները նորմալ են բաշխված, ընդ որում  $E\xi = E\eta = 0$  և դրանց կորելյացիայի գործակիցը հավասար է  $\rho$ -ի: Գտնել  $\xi^2$  և  $\eta^2$  պարահական մեծությունների կորելյացիայի գործակիցը:

535. Դիցուք  $E\xi = E\eta = 0$ ,  $D\xi = D\eta = 1$  պայմաններին բավարարող  $\xi$  և  $\eta$  պարահական մեծությունների կորելյացիայի գործակիցը հավասար է  $\rho$ -ի: Ապացուցել, որ

$$E \max\{\xi^2, \eta^2\} \leq 1 + \sqrt{1 - \rho^2} :$$

536. Դիցուք

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2 - x^2}{8} e^{-x}, & 0 < y < \infty, \quad -y \leq x \leq y \\ 0, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

$(\xi, \eta)$  երկչափ պարահական մեծության համարեղ խտության ֆունկցիան է: Ցույց տալ, որ  $E(\xi/\eta = y) = 0$ :

537. Դիցուք

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{x}{y}} e^{-y}}{y}, & 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty \\ 0, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

$(\xi, \eta)$  երկչափ պարահական մեծության համարեղ խորության ֆունկցիան է: Ցույց տալ, որ  $E(\xi/\eta = y) = y$ :

538. Դիցուք

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-y}}{y}, & 0 < x < y, \quad 0 < y < \infty \\ 0, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

$(\xi, \eta)$  երկչափ պարահական մեծության համարեղ խորության ֆունկցիան է: Գտնել  $E(\xi^2/\eta = y)$ :

539. Դիցուք  $\xi$  և  $\eta$ -ն համապարասխանաբար  $\lambda_1$  և  $\lambda_2$  պարամետրերով Պուասոնի բաշխում ունեցող անկախ պարահական մեծություններ են: Գտնել  $E(\xi/\xi + \eta = n)$ :

540. Դիցուք

$$f(x, y) = \begin{cases} 6xy(2 - x - y), & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ 0, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

$(\xi, \eta)$  երկչափ պարահական մեծության համարեղ խորության ֆունկցիան է: Գտնել  $E(\xi/\eta = y)$ , որտեղ  $0 < y < 1$ :

541. Դիցուք

$$f(x, y) = \begin{cases} 4y(x - y)e^{-(x+y)}, & 0 < x < \infty, \quad 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

$(\xi, \eta)$  երկչափ պարահական մեծության համարեղ խորության ֆունկցիան է: Գտնել  $E(\xi/\eta = y)$ :



542. Դիցուք

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}ye^{-xy}, & 0 < x < \infty, \quad 0 < y < 2 \\ 0, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

$(\xi, \eta)$  երկչափ պարահական մեծության համարեղ խորության ֆունկցիան է: Գտնել  $E(e^{\xi/2}/\eta = 1)$ :

543. Դիցուք

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2e^{-2x}}{x}, & 0 \leq x < \infty, \quad 0 \leq y \leq x \\ 0, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

$(\xi, \eta)$  երկչափ պարահական մեծության համարեղ խորության ֆունկցիան է: Գտնել  $cov(\xi, \eta)$ :

544. Դիցուք տրված է  $(\xi, \eta)$  երկչափ պարահական մեծության համարեղ խորության ֆունկցիան

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y}e^{-(y+x/y)}, & x > 0, \quad y > 0 \\ 0, & \text{մնացած դեպքերում:} \end{cases}$$

Գտնել  $E\xi, E\eta, cov(\xi, \eta)$ :

545. Զառը նետում են 3 անգամ: Դիցուք  $\xi$ -ն «1»-երի ի հայտ գալու թիվն է, իսկ  $\eta$ -ն «2»-երի: Գտնել  $cov(\xi, \eta)$ :

546. Զրավազանում կա 100 ձուկ, որոնցից 30-ը կարպ են: Գտնել պարահականորեն վերցված 20 ձկների մեջ կարպերի թվի մաթ. սպասումը և դիսպերսիան:

547. Դիցուք  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  անկախ միարեսակ բաշխված պարահական մեծություններն ունեն հավասարաչափ բաշխում  $[0, 1]$  միջակայքում: Գտնել  $E(\min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n))$  և  $E(\max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n))$ :

548.  $N$  մարդ իրենց գլխարկները դնում են սենյակում: Գլխարկները խառնվում են և յուրաքանչյուրը պարահականորեն վերցնում է մեկը:

Գտնել այն մարդկանց թվի մաթ. սպասումը և դիսպերսիան, որոնք ընկրել են իրենց սեփական գլխարկները:

549. Ենթադրենք արկղում կա  $2N$  քար, որոնցից երկուսի վրա նշված է 1, երկուսի վրա նշված է 2 և այլն: Պատահականորեն վերցնում են  $m$  քար: Նաշվել այն զույգ քարերի թվի մաթ. սպասումը, որոնք դեռևս մնում են արկղի մեջ:

550. Դիցուք  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ -ը  $\sigma^2$  դիսպերսիայով անկախ, միապեսակ բաշխված պատահական մեծություններ են: Ապացուցել, որ

$$\text{cov}(\xi_i - \xi, \xi) = 0, \text{ որպեսզի } \xi = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i :$$

551. Դիցուք  $\xi$ -ն  $N(0, 1)$  սպանդարտ նորմալ բաշխված պատահական մեծություն է և  $\eta = a + b\xi + c\xi^2$ : Ցույց փակ, որ

$$\rho(\xi, \eta) = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 2c^2}} :$$

### Մեծ թվերի օրենք

#### Չեքիշևի անհավասարություն

ա) Եթե  $\xi \geq 0$  վերջավոր  $E\xi$  մաթեմատիկական սպասում ունեցող պատահական մեծություն է, ապա

$$P(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E\xi}{\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0 :$$

բ) Եթե  $\xi$  պատահական մեծությունն ունի վերջավոր  $D\xi$  դիսպերսիա, ապա

$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}, \quad \varepsilon > 0 :$$

Ասում են, որ  $\{\xi_n\}_{n=1,2,\dots}$  հաջորդականությունը ենթարկվում է մեծ թվերի օրենքին, եթե  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  պատահական մեծությունների

հաջորդականության համար րեդի ունի

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E\xi_k \right| < \varepsilon \right) = 1 :$$

**Չերիշևսի թեորեմ:** Անկախ և սահմանափակ դիսպերսիաներ ունեցող պարահական մեծությունների  $\{\xi_n\}_{n=1,2,\dots}$  հաջորդականությունը ենթարկվում է մեծ թվերի օրենքին:

**Չերիշևսի թեորեմի հեղևանքները:**

ա) Բեռնուլիի թեորեմ՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right) = 1,$$

որրեդ  $\varepsilon > 0$  ցանկացած թիվ է,  $m$ -ը  $n$  անկախ փորձերի ընթացքում  $A$  պարահույթի հանդես գալու թիվն է,  $p$ -ն  $A$  պարահույթի հավանականությունն է յուրաքանչյուր փորձում:

բ)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - a \right| < \varepsilon \right) = 1,$$

որրեդ  $\varepsilon > 0$  ցանկացած թիվ է,  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  միարեսակ բաշխված վերջավոր դիսպերսիա ունեցող պարահական մեծություններ են,  $E\xi_k = a$  ( $n = 1, 2, \dots$ )

գ) Պուասոնի թեորեմ՝

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left( \left| \frac{m}{n} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k \right| < \varepsilon \right) = 1,$$

որրեդ  $\varepsilon > 0$ ,  $p_k$ -ն ( $k = 1, 2, \dots$ )  $A$  պարահույթի հավանականությունն է  $k$ -րդ փորձում:  $m$ -ը  $n$  անկախ փորձերում  $A$  պարահույթի երևումների թիվն է:

**Մարկովի թեորեմ:**  $\{\xi_n\}_{n=1,2,\dots}$  հաջորդականությունը ենթարկվում է մեծ թվերի օրենքին, եթե

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} D \left( \sum_{k=1}^n \xi_k \right) = 0 :$$

Կասենք, որ  $\eta_n$  պատահական մեծությունների հաջորդականությունը ըստ բաշխման զուգամիպում է  $\eta$  պատահական մեծությանը, եթե նրանց  $F_n(x)$  բաշխման ֆունկցիաները զուգամիպում են  $F(x)$  բաշխման ֆունկցիային  $F(x)$  դունկցիայի բոլոր անընդհատության կետերում: Կարճ գրում են՝  $\eta_n \xrightarrow{D} \eta$ :

Կասենք, որ  $\eta_n$  պատահական մեծությունների հաջորդականությունը ըստ հավանականության զուգամիպում է  $\eta$  պատահական մեծությանը, եթե կամայական  $\varepsilon > 0$  թվի համար

$$P\{\omega : |\eta_n(\omega) - \eta(\omega)| \geq \varepsilon\} \rightarrow 0, \quad \text{երբ } n \rightarrow \infty :$$

Կարճ գրում են՝  $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$ :

Կասենք, որ  $\eta_n$  պատահական մեծությունների հաջորդականությունը համարյա հավասարի զուգամիպում է  $\eta$  պատահական մեծությանը, եթե

$$P\{\omega : \eta(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \eta(\omega)\} = 1 :$$

Կարճ գրում են՝  $\eta_n \xrightarrow{h.h.} \eta$ :

Կասենք, որ  $\eta_n$  պատահական մեծությունների հաջորդականությունը  $r$ -րդ կարգի միջին իմաստով ( $r \in (0, +\infty)$ ) զուգամիպում է  $\eta$  պատահական մեծությանը, եթե  $E|\eta_n|^r < \infty$  բոլոր  $n$ -երի համար և

$$E|\eta_n - \eta|^r \rightarrow 0, \quad \text{երբ } n \rightarrow \infty :$$

Կարճ գրում են՝  $\eta_n \xrightarrow{(r)} \eta$ :

$\{\xi_n\}_{n=1,2,\dots}$  պատահական մեծությունների հաջորդականությունը ( $E\xi_k = 0, k = 1, 2, \dots$ ) ենթարկվում է մեծ թվերի ուժեղացված օրենքին, եթե

$$P\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow 0\right) = 1 :$$

## Ա

552. Օգտվելով Չեբիշևի անհավասարությունից, գնահատել հետևյալ հավանականությունը՝  $P(|\xi - E\xi| \geq 2\sigma)$ , որտեղ  $\sigma^2 = D\xi$ :

553. Օգտվելով Չեբիշևի անհավասարությունից, գնահատել հետևյալ հավանականությունը՝  $P(|\xi - E\xi| < 3\sigma)$ , որտեղ  $\sigma^2 = D\xi$ :

554. Տրված է  $\xi$  պարահական մեծության հավանականությունների բաշխման օրենքը՝

$\xi$	0,3	0,6	:
$P$	0,2	0,8	

Գնահատել հետևյալ հավանականությունը՝  $P(|\xi - E\xi| < 0,2)$ :

555. Տրված է  $\xi$  պարահական մեծության հավանականությունների բաշխման օրենքը՝

$\xi$	0,1	0,4	0,6	:
$P$	0,2	0,3	0,5	

Գնահատել հետևյալ հավանականությունը՝  $P(|\xi - E\xi| < \sqrt{0,4})$ :

556. Տրված է  $\xi$  պարահական մեծության հավանականությունների բաշխման օրենքը՝

$\xi$	-3	-2	-1	0	1	2	3	:
$P$	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1	

Գտնել  $P(|\xi| \geq 1)$  հավանականության ճշգրիտ արժեքը և այն համեմատել Չեբիշևի անհավասարությունից սրացված գնահատականի հետ:

557. Մեկ փունկ կարփոֆիլի միջին քաշը 100 գ է: Գնահատել պարահական փունկ կարփոֆիլի կշիռը 300 գրամից ոչ ավելի լինելու հավանականությունը:

558. Մեծ թվով կշռումների դեպքում մարմնի միջին կշիռը սրացվել է 5,25 կգ: Կշռի միջին քառակուսային շեղումը հավասար է 0,02 կգ:

Գնահատել մեկ պարահական կշռման արդյունքի 5,2 կգ-ից 5,3 կգ-ի սահմաններում գրնվելու հավանականությունը:

559. Տվյալ փեղամասի մեկ փարվա ընթացքում փեղումների քանակի մաթեմատիկական սպասումը 55 սմ է: Գնահատել այդ փեղամասում 155 սմ-ից ոչ պակաս քանակությամբ փեղումներ լինելու հավանականությունը:

560. Դիցուք  $\xi$  պարահական մեծության մաթ. սպասումը և դիսպերսիան հավասար են 20-ի: Գնահատել  $P(0 \leq \xi \leq 40)$ :

561. Օգրվելով Չեբիշևի անհավասարությունից, գրնել դրամի 100 նետումների դեպքում գերքի երևումների հաճախության մեկ փորձում ի հայտ գալու հավանականությունից ունեցած շեղման 0,1-ին չգերազանցելու հավանականությունը:

562. Որոշել  $|\frac{m}{n} - \frac{1}{2}| < \frac{1}{100}$  պարահույթի հավանականության ստորին եզրը, որպեղ  $m$ -ը  $n$  անկախ փորձերում  $A$  պարահույթի երևումների թիվն է և  $A$  պարահույթի հավանականությունը անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում հավասար է  $\frac{1}{2}$ , եթե  $n = 10000$ ;  $n = 100000$ :

563.  $A$  պարահույթի հավանականությունը անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում հավասար է 0,25: Օգրվելով Չեբիշևի անհավասարությունից, գնահատել հեփույալ հավանականությունը՝  $P(150 \leq m \leq 250)$ , որպեղ  $m$ -ը 800 անկախ փորձերում  $A$  պարահույթի երևումների թիվն է:

564. Օգրվելով Չեբիշևի անհավասարությունից, գնահատել հեփույալ հավանականությունը՝  $P(40 \leq m \leq 60)$ , որպեղ  $m$ -ը 100 անկախ փորձերում  $A$  պարահույթի երևումների թիվն է:  $A$  պարահույթի հավանականությունը անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում հավասար է 0,5-ի:

565. 0,99-ից ոչ պակաս հավանականությամբ, ինչպիսի վերին եզր կարելի է նշել  $|\frac{m}{n} - \frac{1}{3}|$  արփահայության համար, որպեղ  $m$ -ը  $n$  անկախ

փորձերում  $A$  պարահույթի երևումների թիվն է և  $A$  պարահույթի հավանականությունը անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում հավասար է  $\frac{1}{3}$ , եթե  $n = 10000$ :

566. Օգտվելով Չեբիշևի անհավասարությունից գտնել  $\varepsilon$ -ը, եթե  $P(|\xi - E\xi| < \varepsilon) > 0,9$  և  $D\xi = 0,009$ :

567. Ուսանողը հանձնում է քննություն, որի արդյունքը 75 միջինով և 25 դիսպերսիայով պարահական մեծություն է: ա) Գտնել քննությունը 85 միավորից բարձր ստանալու հավանականության վերին արժեքը: բ) Գնահատել ուսանողի սրացած միավորի 65-ից 85 միավորի միջև լինելու հավանականությունը: գ) Քանի՞ ուսանող պետք է հանձնի քննություն, որպեսզի 0,9-ից ոչ պակաս հավանականությամբ նրանց սրացած միավորի միջին շեղումը 75 արժեքից լինի 5-ից ոչ ավելի:

568. Դիցուք  $\xi$ -ն  $(0, 10)$  միջակայքում հավասարաչափ բաշխված պարահական մեծություն է: Գնահատել  $P(|\xi - 5| > 4)$  հավանականությունը և համեմատել այն ճշգրիտ արժեքի հետ:

569. Տրված է  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  անկախ պարահական մեծությունների հաջորդականությունը, ընդ որում յուրաքանչյուր  $\xi_n$  ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝

$\xi_n$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$
$p_n$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

 $(n = 1, 2, \dots) :$ 

Ապացուցել, որ այդ հաջորդականությունը ենթարկվում է մեծ թվերի օրենքին:

570. Տրված է  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  անկախ պարահական մեծությունների հաջորդականությունը, ընդ որում յուրաքանչյուր  $\xi_n$  ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝

$\xi_n$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$
$p_n$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

 $(n = 1, 2, \dots) :$

Ապացուցել, որ այդ հաջորդականությունը ենթարկվում է մեծ թվերի օրենքին:

571. Տրված է  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  անկախ պարահական մեծությունների հաջորդականությունը, ընդ որում յուրաքանչյուր  $\xi_n$  ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝

$\xi_n$	$-n\alpha$	0	$n\alpha$	$(n = 1, 2, \dots) :$
$p_n$	$\frac{1}{2^n}$	$1 - \frac{1}{2^{n-1}}$	$\frac{1}{2^n}$	

Ապացուցել, որ այդ հաջորդականությունը ենթարկվում է մեծ թվերի օրենքին:

572. Տրված է  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  անկախ պարահական մեծությունների հաջորդականությունը, ընդ որում յուրաքանչյուր  $\xi_n$  ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝

$\xi_n$	$-\alpha$	$\alpha$	$(n = 1, 2, \dots) :$
$p_n$	$\frac{n}{2n+1}$	$\frac{n+1}{2n+1}$	

Ապացուցել, որ այդ հաջորդականությունը ենթարկվում է մեծ թվերի օրենքին:

573. Տրված է  $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \dots$  անկախ պարահական մեծությունների հաջորդականությունը, ընդ որում յուրաքանչյուր  $\xi_n$  ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝

$\xi_n$	$-\sqrt{n}$	0	$\sqrt{n}$	$(n = 2, 3, \dots) :$
$p_n$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	$1 - \frac{2}{\sqrt{n}}$	$\frac{1}{\sqrt{n}}$	

Այդ հաջորդականությունը ենթարկվում է մեծ թվերի օրենքին, թե ոչ (օգտվել Մարկովի թեորեմից):

574. Տրված է  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  անկախ պարահական մեծությունների հաջորդականությունը, ընդ որում յուրաքանչյուր  $\xi_n$  ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝

$\xi_n$	$-n\alpha$	0	$n\alpha$	$(n = 1, 2, \dots) :$
$p_n$	$\frac{1}{2n^2}$	$1 - \frac{1}{n^2}$	$\frac{1}{2n^2}$	



Այդ հաջորդականության նկարմամբ կարելի է կիրառել Չեբիշևի թեորեմը:

575. Տրված է  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  անկախ պարահական մեծությունների հաջորդականությունը, ընդ որում յուրաքանչյուր  $\xi_n$  ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝

$\xi_n$	$-\sqrt{\ln n}$	$\sqrt{\ln n}$	$(n = 1, 2, \dots) :$
$p_n$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

Այդ հաջորդականությունը ենթարկվում է՝ մեծ թվերի օրենքին, թե՛ ոչ (օգտվել Մարկովի թեորեմից):

## Բ

576. Ապացուցել, որ եթե  $\xi$  պարահական մեծությունը ունի վերջավոր չորրորդ կարգի  $\mu_4$  կենտրոնական մոմենտ, ապա

$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mu_4}{\varepsilon^4} :$$

577. Դիցուք  $f(x) > 0$  չնվազող ֆունկցիա է: Ապացուցել, որ եթե գոյություն ունի  $Ef(|\xi - E\xi|)$  մաթ. սպասումը, ապա

$$P(|\xi - E\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{Ef(|\xi - E\xi|)}{f(\varepsilon)} :$$

578. Ապացուցել, որ ցանկացած  $\xi$  պարահական մեծության համար փրեդի ունի հետևյալ անհավասարությունը

$$P(\xi > t^2 + \ln(Ee^\xi)) < e^{-t^2} :$$

579. Որոշել Բեռնուլիի մոդելում անկախ փորձերի  $n$  թիվը, որի դեպքում

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{100}\right) > 0,99 :$$

580. Զառը ներելիս խաղացողը շահում է 8\$, եթե բացվում է «6»-ը և վճարում 1\$՝ հակառակ դեպքում: Գնահատել զառի  $n = 1000$  նետումների դեպքում խաղացողի շահած գումարը 250\$-ից մեծ լինելու հավանականությունը:

581. Զառը ներելիս խաղացողը շահում է 4 \$, եթե բացվում է «6»-ը և վճարում 1\$ հակառակ դեպքում: Գնահատել գառի  $n = 10000$  ներումների դեպքում խաղացողի պարտված գումարը 200\$-ից ոչ պակաս լինելու հավանականությունը:

582. Երկու զառ ներելիս խաղացողը շահում է այնքան դրամ, որքան զառերի վրա բացված թվերի փարբերությունն է, եթե դրանք միմյանց հավասար չեն, հակառակ դեպքում խաղացողը վճարում է այնքան դրամ, որքան զառերի վրա բացված թվերի գումարն է: 0,99 հավանականությամբ ինչպիսի շահում կարելի է երաշխավորել խաղացողին, եթե խաղը կրկնվում է  $n = 3000$  անգամ:

583. Ապացուցել

$$P \left( \sum_{i=1}^n p_i - m \geq 2t \sqrt{\sum_{i=1}^n p_i q_i} \right) < e^{-t^2},$$

անհավասարությունը, որտեղ  $p_i$ -ն  $i$ -րդ փորձում  $A$  պատահույթի հավանականությունն է ( $q_i = 1 - p_i$ ),  $m$ -ը՝  $n$  անկախ փորձերում  $A$  պատահույթի հանդես գալու թիվն է:

584. 2500 անկախ պատահական մեծություններից յուրաքանչյուրի դիսպերսիան չի գերազանցում 5-ին: Գնահատել այդ պատահական մեծությունների միջին թվաբանականի՝ նրանց մաթեմատիկական սպասումների միջին թվաբանականից ունեցած շեղման 0,4-ին չգերազանցելու հավանականությունը:

585. Տրված է  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  անկախ պատահական մեծությունների հաջորդականությունը, ընդ որում յուրաքանչյուր  $\xi_n$  ունի հետևյալ բաշխման օրենքը՝

$\xi_n$	$n^s$	$n^{-s}$	$(n = 1, 2, \dots) :$
$p_n$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$s$ -ի նր արժեքի դեպքում հաջորդականությունը կենթարկվի մեծ թվերի օրենքին (օգտվել Մարկովի թեորեմից):

586. Անկախ փորձերից յուրաքանչյուրում  $A$  պատահույթի հանդես գալու հավանականությունը՝  $P(A) = p$ , ( $P(\bar{A}) = 1 - p$ ): Նշանակենք  $\xi_i$ -ով ( $i = 1, 2, \dots$ )  $i$ -րդ փորձում  $A$  պատահույթի հանդես գալու թիվը: Ապացուցել, որ այդ պատահական մեծությունների հաջորդականությունը ենթարկվում է մեծ թվերի օրենքին (օգտվել Մարկովի թեորեմից):

587. Ապացուցել, որ եթե պատահական մեծությունների դիսպերսիաների հաջորդականությունը սահմանափակ է, ընդ որում յուրաքանչյուր պատահական մեծություն կախված է միայն հարևան պատահական մեծություններից, ենթարկվում է մեծ թվերի օրենքին:

588. Տրված է  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  պատահական մեծությունների հաջորդականությունը, ընդ որում  $D\xi_n \leq C$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) և  $r_{ij} \rightarrow 0$ , երբ  $|i - j| \rightarrow \infty$  ( $r_{ij}$ -ն  $\xi_i$  և  $\xi_j$  պատահական մեծությունների կորելյացիայի գործակիցն է): Ապացուցել, որ այդ հաջորդականությունը ենթարկվում է մեծ թվերի օրենքին (Բեռնշտեյնի թեորեմ):

589. Ապացուցել, որ  $\frac{D\xi_n}{n} \rightarrow 0$ , երբ  $n \rightarrow \infty$  պայմանին բավարարող  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  անկախ պատահական մեծությունների հաջորդականությունը ենթարկվում է մեծ թվերի օրենքին (Խինչինի թեորեմ):

590. Ապացուցել, որ եթե  $|\xi_n| \leq k$  և  $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \stackrel{p}{=} a$ , ապա  $\lim_{n \rightarrow \infty} E\xi_n = a$ : Ցույց փայլ, որ  $|\xi_n| \leq k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) պայմանը կարևոր է: Ինչպես կարելի է թուլացնել այդ պայմանը:

## Բնութագրիչ ֆունկցիա

$\xi$  պարահական մեծության բնութագրիչ ֆունկցիա կոչվում է

$$\varphi_{\xi}(t) = Ee^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_{\xi}(x)$$

ֆունկցիան, որտեղ  $F_{\xi}(x)$ -ը  $\xi$ -ի բաշխման ֆունկցիան է: Դիսկրետ պարահական մեծության համար բնութագրիչ ֆունկցիան կլինի՝

$$\varphi_{\xi}(t) = \sum_k e^{itx_k} p_k,$$

որտեղ  $p_k = P(\xi = x_k)$ : Բացարձակ անընդհատ պարահական մեծության համար՝

$$\varphi_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_{\xi}(x) dx,$$

որտեղ  $f_{\xi}(x)$ -ը  $\xi$  պարահական մեծության խտության ֆունկցիան է:

Բնութագրիչ ֆունկցիան հավասարաչափ անընդհատ է  $t$ -ի նկատմամբ ամբողջ առանցքի վրա, ընդ որում

$$\varphi(0) = 1, \quad |\varphi(t)| \leq 1, \quad -\infty < t < \infty :$$

Եթե  $\eta = a\xi + b$ , ապա

$$\varphi_{\eta}(t) = \varphi_{\xi}(at)e^{itb} :$$

Եթե  $\xi$  և  $\eta$ -ն անկախ պարահական մեծություններ են, ապա

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_{\xi}(t) \cdot \varphi_{\eta}(t) :$$

Եթե  $\xi$  պարահական մեծության  $n$ -րդ կարգի սկզբնական մոմենտը վերջավոր է, ապա բնութագրիչ ֆունկցիան  $n$  անգամ դիֆերենցելի է և

$$\varphi^{(k)}(0) = i^k \cdot E\xi^k, \quad k \leq n :$$

Եթե  $\varphi_\xi(t)$  բնութագրիչ ֆունկցիան բացարձակ ինտեգրելի է ամբողջ առանցքի վրա, ապա  $f_\xi(x)$  խտության ֆունկցիան արտահայտվում է  $\varphi_\xi(t)$  բնութագրիչ ֆունկցիայի միջոցով հետևյալ բանաձևով՝

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_\xi(t) dt :$$

Ընդհանուր դեպքում ճիշտ է հետևյալ շրջման բանաձևը՝

$$F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1) = \frac{1}{2\pi} \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c \frac{e^{itx_1} - e^{itx_2}}{it} \varphi_\xi(t) dt,$$

որտեղ  $F_\xi(x)$ -ը  $\xi$  պատահական մեծության բաշխման ֆունկցիան է, իսկ  $x_1$  և  $x_2$ -ը  $F_\xi(x)$  ֆունկցիայի անընդհատության կետեր են:

**Ուղիղ սահմանային թեորեմ.** Եթե  $F_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) բաշխման ֆունկցիաների հաջորդականությունը զուգամիտում է  $F(x)$  բաշխման ֆունկցիային, երբ  $n \rightarrow \infty$  վերջինի անընդհատության կետերում, ապա համապատասխան  $\varphi_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) բնութագրիչ ֆունկցիաների հաջորդականությունը, հավասարաչափ ըստ  $t$ -ի, յուրաքանչյուր վերջավոր միջակայքում զուգամիտում է, երբ  $n \rightarrow \infty$ ,  $F(x)$  բաշխման ֆունկցիային համապատասխանող  $\varphi(t)$  բնութագրիչ ֆունկցիային:

**Նակադարձ սահմանային թեորեմ.** Դիցուք  $\varphi_n(t)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) բնութագրիչ ֆունկցիաների հաջորդականությունը  $t = 0$  կետում զուգամիտում է  $\varphi(t)$  անընդհատ ֆունկցիային, երբ  $n \rightarrow \infty$ : Այդ դեպքում համապատասխան  $F_n(x)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) բաշխման ֆունկցիաների հաջորդականությունը, երբ  $n \rightarrow \infty$ , զուգամիտում է  $\varphi(t)$ -ին համապատասխանող  $F(x)$  բաշխման ֆունկցիային նրա անընդհատության կետերում:

Սահմանում. Կասենք, որ  $\varphi(t)$  կոմպլեքս արժեքանի ֆունկցիան ոչ բացասականորեն որոշված է, եթե ցանկացած  $n \in N$ ,  $\forall t_1, t_2, \dots, t_n \in R$ ,  $\forall \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in C$  համար

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi(t_i - t_j) \lambda_i \bar{\lambda}_j \geq 0,$$

որպես  $\overline{\lambda_j}$ -ն  $\lambda_j$ -ի համալուծն է:

**Բոխների թեորեմ.** Դիցուք  $\varphi(t)$ -ն անընդհար ֆունկցիա է և  $\varphi(0) = 1$ : Որպեսզի  $\varphi(t)$ -ն լինի բնութագրիչ ֆունկցիա անհրաժեշտ է և բավարար, որ նա լինի ոչ բացասականորեն որոշված:

**Նեպրևանք.** Եթե  $\varphi_k(t)$  բնութագրիչ ֆունկցիաներ են,  $k = 1, 2, \dots$ , ապա  $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(t)$  և բնութագրիչ ֆունկցիա է, որպեսզի  $c_k \geq 0$  և  $\sum_{k=1}^{\infty} c_k = 1$ :

### Կենտրոնական սահմանային թեորեմ

**Թեորեմ.** Եթե  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  անկախ պարահական մեծությունների հաջորդականությունը ցանկացած  $\tau > 0$  թվի համար բավարարում է

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x-a_k| > \tau B_n} (x-a_k)^2 dF_k(x) = 0,$$

պայմանին (Լինդբերգ), որպեսզի

$$a_k = E\xi_k, \quad B_n^2 = \sum_{k=1}^n D\xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$F_k(x) = P(\xi_k < x),$$

ապա

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - a_k) < x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad (*)$$

հավասարաչափ ըստ  $x$ -ի:

**Լյապունովի թեորեմ.** Եթե  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  անկախ պարահական մեծությունների հաջորդականության համար գոյություն ունի  $\delta > 0$  թիվ, այնպիսին որ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n E|\xi_k - a_k|^{2+\delta} = 0,$$

ապա ճիշտ է (\*)-ը:

**Նեփունսը.** Եթե  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  անկախ պարահական մեծությունները միաբեռակ են բաշխված և  $D\xi_n \neq 0$ , ապա ճիշտ է (\*)-ը:

## Ա

591.  $\xi$  պարահական մեծությունն ունի հավանականությունների բաշխման օրենքը՝

$\xi$	-1	1
$p$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Գտնել  $\xi$ -ի բնութագրիչ ֆունկցիան:

592.  $\xi$  պարահական մեծությունն ունի հավանականությունների բաշխման օրենքը՝

$\xi$	-2	0	2
$p$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Գտնել  $\xi$ -ի բնութագրիչ ֆունկցիան:

593. Գտնել  $n$  անկախ փորձերում  $A$  պարահույթի հանդես գալու թվի բնութագրիչ ֆունկցիան, եթե  $A$  պարահույթի  $k$ -րդ փորձում հանդես գալու հավանականությունը՝  $P(A) = p_k$   $k = 1, 2, \dots, n$ :

594.  $\xi$  պարահական մեծությունն ունի հետևյալ բաշխման ֆունկցիան՝

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ p, & a < x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases} :$$

( $0 < p < 1$ ): Գտնել  $\xi$ -ի բնութագրիչ ֆունկցիան:

595. Գտնել  $[-a, a]$  միջակայքում հավասարաչափ բաշխված պարահական մեծության բնութագրիչ ֆունկցիան:

596.  $\xi$  պարահական մեծությունն ունի հետևյալ խտության ֆունկցիան՝

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq a \\ \frac{a-|x|}{a^2}, & |x| \leq a \end{cases} :$$

Գտնել  $\xi$ -ի բնութագրիչ ֆունկցիան:

597. Գտնել

$$f(x) = \frac{a}{2} e^{-a|x|}, \quad a > 0$$

Լապլասի բաշխման բնութագրիչ ֆունկցիան:

598. Գտնել

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

խտություն ունեցող ցուցային բաշխման բնութագրիչ ֆունկցիան և սկզբնական մոմենտները:

599. Գտնել  $[a, b]$  միջակայքում հավասարաչափ բաշխված պարահական մեծության բնութագրիչ ֆունկցիան և սկզբնական մոմենտները:

600. Դիցուք փրված է  $\xi$  պարահական մեծության բնութագրիչ ֆունկցիան՝  $\varphi_{\xi}(t) = e^{3(e^{it}-1)}$ : Գտնել  $P(\xi = 0)$  հավանականությունը:

601. Դիցուք փրված է  $\xi$  պարահական մեծության  $\varphi_{\xi}(t)$  բնութագրիչ ֆունկցիան: Գտնել  $\xi$  պարահական մեծության բաշխումը, եթե

ա)  $\varphi_{\xi}(t) = \cos t$

բ)  $\varphi_{\xi}(t) = \cos^2 t$ :

## Բ

602. Գտնել  $[a, b]$  միջակայքում Սիմպսոնի բաշխման (եռանկյուն բաշխման) բնութագրիչ ֆունկցիան:

603. Գտնել

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$



խտությունը Կոշու բաշխման բնութագրիչ ֆունկցիան:

604. Գտնել բինոմական բաշխման բնութագրիչ ֆունկցիան և դրա միջոցով հաշվել մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան:

605. Գտնել

$$P(\xi = m) = \frac{a^m}{(1+a)^{m+1}}, \quad a > 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Պասկալի բաշխման բնութագրիչ ֆունկցիան և նրա միջոցով հաշվել մաթեմատիկական սպասումը և դիսպերսիան:

606.  $\xi$  պարահական մեծությունն ունի 0 և  $\sigma^2$  պարամետրերով նորմալ բաշխում: Բնութագրիչ ֆունկցիայի օգնությամբ գտնել նրա բոլոր կենտրոնական մոմենտները:

607. Գտնել

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{a^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-ax}, & x \geq 0, \quad a > 0, \quad \lambda > 0 \end{cases}$$

խտության ֆունկցիա ունեցող պարահական մեծության բնութագրիչ ֆունկցիան և սկզբնական մոմենտները:

608. Ապացուցել Պուասոնի և նորմալ բաշխումների կայունությունը:

609.  $\xi$  պարահական մեծության բնութագրիչ ֆունկցիան է՝

$$\varphi(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0 :$$

Գտնել այդ պարահական մեծության խտության ֆունկցիան:

610.  $\xi$  պարահական մեծության բնութագրիչ ֆունկցիան է՝

$$\varphi(t) = \frac{1}{1+t^2} :$$

Գտնել այդ պարահական մեծության խտության ֆունկցիան:

611. Ապացուցել, որ

$$\varphi_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kt \quad \text{և} \quad \varphi_2(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\lambda_k t}$$

ֆունկցիաները, որտեղ  $a_k \geq 0$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1$ , բնութագրիչ ֆունկցիաներ են և որոշել համապատասխան բաշխման ֆունկցիաները:

612. Ապացուցել, որ

1.  $e^{-i|t|}$

2.  $\frac{1}{1-i|t|}$

3.  $\varphi(t) = \begin{cases} 0, & |t| > 1 \\ 1 - t^2, & |t| \leq 1 \end{cases}$

4.  $e^{-t^2(\pi - \arctan t)}$

Ֆունկցիաները բնութագրիչ ֆունկցիաներ չեն:

613. Ապացուցել հետևյալ՝ որպեսզի պարահական մեծությունը լինի համաչափ սկզբնականի նկարմամբ՝ անհրաժեշտ է և բավարար, որ բնութագրիչ ֆունկցիան ընդունի միայն իրական արժեքներ:

614. Ապացուցել, որ ցանկացած իրական  $\varphi(t)$  բնութագրիչ ֆունկցիա բավարարում է հետևյալ անհավասարությանը՝

$$1 - \varphi(2t) \leq 4(1 - \varphi(t))$$

ցանկացած  $t \in R$ -ի համար:

615. Ապացուցել  $\varphi(t)$  բնութագրիչ ֆունկցիայի հետևյալ հատկությունը՝

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| \leq \sqrt{2[1 - \operatorname{Re}\varphi(h)]}$$

( $\operatorname{Re} z$ -ը  $z$ -ի իրական մասն է):

616. Ապացուցել, որ եթե  $\varphi(t)$  բնութագրիչ ֆունկցիան այնպիսին է, որ  $\varphi(h) = 1$  ( $h \neq 0$ ), ապա  $\varphi(t)$ -ն  $h$  պարբերությամբ պարբերական ֆունկցիա է:

617. Ապացուցել, որ եթե  $\varphi(t)$ -ն բնութագրիչ ֆունկցիա է, ապա

$$\psi(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(z) dz$$

ֆունկցիան նույնպես կլինի բնութագրիչ ֆունկցիա:

618. Դիցուք  $\xi$  և  $\eta$ -ն բինոմական բաշխում ունեցող անկախ պարահական մեծություններ են համապատասխանաբար  $(n, p)$  և  $(m, p)$  պարամետրերով: Ի՞նչ բաշխում կունենա  $\xi + \eta$  պարահական մեծությունը:

619. Դիցուք  $\xi$  և  $\eta$ -ն Պուասոնի բաշխում ունեցող անկախ պարահական մեծություններ են համապատասխանաբար  $\lambda_1$  և  $\lambda_2$  պարամետրերով: Ի՞նչ բաշխում կունենա  $\xi + \eta$  պարահական մեծությունը:

620. Ապացուցել, որ եթե  $\varphi(t)$ -ն բնութագրիչ ֆունկցիա է, ապա  $Re\varphi(t)$  ևս բնութագրիչ ֆունկցիա է:

621. Ապացուցել, որ եթե  $\varphi(t)$ -ն բնութագրիչ ֆունկցիա է, ապա  $\psi(t) = e^{\varphi(t)-1}$  ևս բնութագրիչ ֆունկցիա է:

622. Ապացուցել, որ եթե  $\varphi(t)$ -ն բնութագրիչ ֆունկցիա է, ապա  $\psi(t) = |\varphi(t)|^2$  ևս բնութագրիչ ֆունկցիա է:

623. Ապացուցել, որ եթե  $\varphi(t)$ -ն բնութագրիչ ֆունկցիա է, ապա  $\psi(t) = \frac{2}{2-\varphi(t)} - 1$  ևս բնութագրիչ ֆունկցիա է:

624. Ապացուցել, որ

$$\varphi(t) = \frac{1}{3}e^{-t^2/2} + \frac{2}{3}e^{7(e^{it}-1)}$$

բնութագրիչ ֆունկցիա է:

625. Դիցուք փրված է  $\xi$  պարահական մեծության  $\varphi_\xi(t)$  բնութագրիչ ֆունկցիան: Գտնել  $\xi$  պարահական մեծության խտության ֆունկցիան, եթե  $\varphi(t) = e^{-t^2}$ :

626. Դիցուք տրված է  $\xi$  պատահական մեծության

$$\varphi_{\xi}(t) = \frac{\sin t}{t}$$

բնութագրիչ ֆունկցիան: Գտնել  $\xi$  պատահական մեծության խտության ֆունկցիան:

627. Դիցուք տրված է  $\xi$  պատահական մեծության

$$\varphi_{\xi}(t) = e^{-|t|} \cos t$$

բնութագրիչ ֆունկցիան: Գտնել  $\xi$  պատահական մեծության խտության ֆունկցիան:

628. Դիցուք տրված է  $\xi$  պատահական մեծության

$$\varphi_{\xi}(t) = \frac{1}{1 - it}$$

բնութագրիչ ֆունկցիան: Գտնել  $\xi$  պատահական մեծության խտության ֆունկցիան:

629. Դիցուք  $\varphi(t)$ -ն բնութագրիչ ֆունկցիա է: Ապացուցել, որ ցանկացած  $t \in R$  համար ճիշտ է

ա)  $1 - |\varphi(2t)|^2 \leq 4(1 - |\varphi(t)|)$

բ)  $1 - \operatorname{Re}\varphi(2t) \leq 2(1 - (\operatorname{Re}\varphi(t))^2)$

գ)  $1 - |\varphi(2t)| \leq 2(1 - |\varphi(t)|^2)$

դ)  $1 - |\varphi(2t)| \leq 4(1 - |\varphi(t)|)$  :

630. Լուծել 567 խնդրի գ) կետը՝ օգտվելով կենտրոնական սահմանային թեորեմից:

631.  $\xi$  պատահական մեծությունն ունի հետևյալ խտության ֆունկցիան՝

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{a^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-ax}, & x > 0, \quad a > 0, \quad \lambda > 0 : \end{cases}$$

Ապացուցել, որ երբ  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\frac{a\xi - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$  պարահական մեծությունը ըստ բաշխման ձգվում է  $a = 0, \sigma = 1$  պարամետրերով նորմալ բաշխմանը:

632.  $\xi$  պարահական մեծությունն ունի Պուասոնի բաշխում  $\lambda$  պարամետրով: Ապացուցել, որ  $\lambda \rightarrow \infty$  դեպքում  $\frac{\xi - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$  պարահական մեծությունը ըստ բաշխման ձգվում է  $a = 0, \sigma = 1$  պարամետրերով նորմալ բաշխմանը:

633. 4500 անկախ, միաբեասկ բաշխված պարահական մեծություններից յուրաքանչյուրի դիսպերսիան հավասար է 5-ի: Գտնել այդ պարահական մեծությունների միջին թվաբանականի՝ նրանց մաթեմատիկական սպասումից ունեցած շեղման 0,04-ին չգերազանցելու հավանականությունը:

634.  $\eta$  պարահական մեծությունը իրենից ներկայացնում է 10000 անկախ միաբեասկ բաշխված  $\sigma = 2$  միջին քառակուսային շեղում ունեցող պարահական մեծությունների միջին թվաբանականը: 0,9544 հավանականությամբ ի՞նչ մեծագույն շեղում կարելի է ակնկալել  $\eta$  պարահական մեծության և նրա մաթեմատիկական սպասման համար:

635.  $\eta$  պարահական մեծությունը իրենից ներկայացնում է անկախ միաբեասկ բաշխված,  $\sigma^2 = 5$  դիսպերսիա ունեցող պարահական մեծությունների միջին թվաբանականը: Որքա՞ն պեք է լինի այդ պարահական մեծությունների թիվը, որպեսզի 0,9973 հավանականությամբ  $\eta$  պարահական մեծության և նրա մաթեմատիկական սպասման շեղումը չգերազանցի 0,01 արժեքը:

636.  $\eta$  պարահական մեծությունը իրենից ներկայացնում է 3200 անկախ միաբեասկ բաշխված,  $E\xi = 3$  միջինով և  $D\xi = 2$  դիսպերսիայով պարահական մեծությունների միջին թվաբանականը: Գնահատել  $P(2, 95 \leq \eta \leq 3)$  հավանականությունը:

637. Տեղի ու՞նեն արդյոք մեծ թվերի օրենքը և կենտրոնական սահմանային թեորեմը  
 ա)  $P(\xi_k = \pm 2^k) = \frac{1}{2}$ ,

բ)  $P(\xi_k = \pm 2^k) = 2^{-(2k+1)}, P(\xi_k = 0) = 1 - 2^{-2k},$

գ)  $P(\xi_k = \pm k) = \frac{1}{2}k^{-\frac{1}{2}}, P(\xi_k = 0) = 1 - k^{-\frac{1}{2}}, (k \geq 1)$

բաշխման օրենքներ ունեցող անկախ պարահական մեծությունների համար:

638. Ճշմարիտ է՞ արդյոք հետևյալ պնդումը՝

$$\eta_n \xrightarrow{D} \eta \Rightarrow \eta_n - \eta \xrightarrow{D} 0 :$$

639. Դիցուք  $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$  և  $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$ : Ապացուցել, որ  $P(\xi = \eta) = 1$ :

640. Դիցուք  $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$  և  $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$ : Ապացուցել, որ

ա)  $a\xi_n + b\eta_n \xrightarrow{P} a\xi + b\eta$ , որպեսզի  $a$  և  $b$ -ն հասարակարգված են,

բ)  $|\xi_n| \xrightarrow{P} |\xi|$ ,

գ)  $\xi_n \eta_n \xrightarrow{P} \xi \eta$ :

641. Դիցուք  $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$  և  $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$  և  $P(\xi = \eta) = 1$ : Ապացուցել, որ կամայական  $\varepsilon > 0$  թվի համար

$$P(|\xi_n - \eta_n| \geq \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \text{երբ } n \rightarrow \infty :$$

642. Դիցուք  $\xi_n \xrightarrow{h.h.} \xi$  և  $\eta_n \xrightarrow{h.h.} \eta$ : Ապացուցել, որ

ա)  $a\xi_n + b\eta_n \xrightarrow{h.h.} a\xi + b\eta$ ,  $a$  և  $b$ -ն հասարակարգված են,

բ)  $|\xi_n| \xrightarrow{h.h.} |\xi|$ ,

գ)  $\xi_n \eta_n \xrightarrow{h.h.} \xi \eta$ :

643. Դիցուք  $\xi_n \xrightarrow{D} a$ , որպեսզի  $a$ -ն հասարակարգված է: Ապացուցել, որ  $\xi_n \xrightarrow{P} a$ :

644. Դիցուք  $\eta_n \xrightarrow{D} \eta$  և  $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$ : Ճիշտ է՞ արդյոք, որ  $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{D} \xi + \eta$ :

645. Ապացուցել, որ եթե  $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$  և  $\eta_n \xrightarrow{P} 0$ , ապա

ա)  $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{D} \xi$ ,

բ)  $\xi_n \eta_n \xrightarrow{P} 0$ :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

## Աղյուսակ 1

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3984	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3935	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3580	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3202	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2631	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1986	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	1940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0386	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0256	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	01443	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0061	0050	0048	0047	0046

3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0024	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0016	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Աղյուսակ 2

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0039	0079	0119	0159	0199	0239	0279	0318	0358
0,1	0398	0438	0477	0517	0556	0596	0635	0674	0714	0753
0,2	0792	0831	0870	0909	0948	0987	1025	1064	1102	1140
0,3	1179	1217	1255	1293	1330	1368	1405	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1627	1664	1700	1736	1772	1808	1843	1879
0,5	1914	1949	1984	2019	2054	2088	2122	2156	2190	2224
0,6	2257	2290	2323	2356	2389	2421	2453	2485	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2703	2733	2763	2793	2823	2852
0,8	2881	2910	2938	2967	2995	3029	3051	3078	3105	3132
0,9	3159	3185	3212	3238	3263	3289	3314	3339	3364	3389
1,0	3413	3437	3461	3485	3508	3531	3554	3576	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3707	3728	3749	3769	3790	3810	3829
1,2	3849	3868	3887	3906	3925	3943	3961	3979	3997	4014
1,3	4032	4049	4065	4082	4098	4114	4130	4146	4162	4177
1,4	4192	4207	4220	4236	4250	4264	4278	4292	4305	4318
1,5	4331	4344	4357	4369	4382	4394	4406	4417	4429	4440
1,6	4452	4463	4473	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4544
1,7	4554	4563	4572	4581	4590	4599	4608	4616	4624	4632
1,8	4640	4648	4656	4663	4671	4678	4685	4692	4699	4706





**Պ Ա Տ Ա Ս Խ Ա Ն Ն Ե Ր**

11.  $x = \bar{B}$ : 19.  $A = \emptyset, B = (0, 1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$ : 27. 49, 42:
28.  $A_n^6 = 151200$ : 29. 1680: 30.  $\frac{n(n-3)}{2}$ : 31.  $8! = 40320$ :
32.  $(n-1)!(n-2)$ : 33. 6912: 34. 2520: 35.  $C_n^4$ : 36. 462, 252:
38.  $C_{N+n-1}^n, C_{n-1}^{N-1}$ : 39.  $C_{16}^{10} = 8008$ : 40. ա)  $C_{N+n-1}^n, \text{բ) } C_{n-1}^{N-1}$ :
41.  $C_{N+n-1}^m$ : 42. ա) 720, բ) 672, գ) 384, դ) 216, թ) 576: 43.  $\frac{3}{4}$ :
44. ա)  $\frac{1}{6}, \text{բ) } \frac{5}{6}$ : 45. 0, 1512: 46. ա)  $\approx 0,0004, \text{բ) } \approx 0,1499$ :
47. ա)  $\frac{1}{l^{k-1}}, \text{բ) } \frac{A_l^k}{l^k}$ : 48. 0,4: 49. ա)  $\frac{4}{9} \approx 0,44\dots, \text{բ) } \frac{1}{3024} \approx 0,0003$ :
50.  $\frac{24}{91} \approx 0,2637$ : 51.  $\frac{C_a^2}{C_{a+b}^2}$ : 52.  $\frac{C_{N-k}^n}{C_N^n}$ : 53.  $\approx 0,1788$ : 54. ա)
- $\approx 0,5263, \text{բ) } \approx 0,418$ : 55.  $\approx 0,39$ : 56.  $\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$ : 57.  $\sum_{i=3}^6 \frac{C_6^i \cdot C_{43}^{6-i}}{C_{49}^6} \approx$
- 0,019: 58.  $\sum_{s=1}^r \frac{C_m^s \cdot C_{n-m}^{r-s}}{C_n^r}$ : 59.  $\frac{1}{55} \approx 0,1818\dots$ : 60.  $\frac{C_{N-3}^{r-1}}{C_{N-1}^{r-1}}$ :
61. ա)  $\approx 0,162, \text{բ) } \approx 0,155$ : 62. ա)  $\approx 0,0001, \text{բ) } \approx 0,13$ ,  
 գ)  $\approx 0,1484$ : 63. ա)  $\approx 0,504, \text{բ) } \approx 0,432$ , գ)  $\approx 0,027, \text{դ) } \approx 0,036$ ,  
 թ)  $\approx 0,001$ : 64. ա)  $\frac{1}{3}, \text{բ) } \frac{C_{n-2}^m \cdot 2^{n-m-2}}{3^n}, (0 \leq m \leq n-2)$ ,  
 գ)  $\frac{C_n^m \cdot 2^{n-m}}{3^n}, (0 \leq m \leq n), \text{դ) } \frac{n!}{m_0!m_1!m_2!3^n}, m_0 + m_1 + m_2 = n$ :
65.  $\frac{C_{n+k-m}^{n-m}}{C_n^{n+k}}$ : 66. ա)  $\frac{1}{270725}, \text{բ) } \frac{1}{221}, \text{գ) } \frac{49-3l}{270725}$ : 67. ա) 0, 1055, բ)  $\frac{4}{C_{52}^{13}}$ ,  
 գ)  $\frac{(4!)^{13}(13!)^4}{52!}$ : 68.  $\frac{67}{91} \approx 0,7363$ : 69.  $\frac{91}{216} \approx 0,4213$ : 70.  $\frac{27}{29} \approx 0,931$ :
71. ա)  $3^{-9} \approx 0,00005, \text{բ) } 3^{-8} \approx 0,00015, \text{գ) } 1 - (\frac{2}{3})^9 \approx 0,974$ ,  
 դ)  $\frac{9!}{(3!)^3 \cdot 3^9} \approx 0,0854$ : 72.  $\frac{12!}{12^{12}} \approx 0,00005$ : 73.  $\frac{n!}{n^n}$ : 74. ա)  $\frac{1}{3}, \text{բ) } \frac{1}{3}$ ,  
 գ)  $\frac{1}{3}$ : 75.  $\Omega\xi$ : 76. ա)  $\frac{2}{n-1}, \text{բ) } \frac{1}{n-1}, \text{գ) } \frac{6}{(n-2)(n-1)}, \text{դ) } \frac{1}{(n-2)(n-1)}$ :
77. ա)  $\frac{2}{n}, \text{բ) } \frac{1}{n}, \text{գ) } \frac{6}{n(n-1)}, \text{դ) } \frac{1}{n(n-1)}$ : 78. ա)  $\approx 0,0038, \text{բ) } \approx 0,0006$ ,  
 գ)  $\frac{1}{6}, \text{դ) } \approx 0,0026$ : 79. 0,2: 80.  $\approx 0,0055$ : 81.  $\approx 0,0809$ : 83. 0,21672:
84. ա)  $1/n, \text{բ) } (n-1)^{k-1}/n^k$ : 85. 1) ա)  $\frac{k!}{n^k}, \text{բ) } \frac{n!}{(n-k)!n^k}$ , 2) ա)  
 $\frac{k!(n-1)!}{(n+k-1)!}, \text{բ) } \frac{n!(n-1)!}{(n+k-1)!(n-k)!}$ , 3) ա)  $\frac{k!(n-k)!}{n!}, \text{բ) } 1, 4) \text{ ա) } \frac{k!(n-k)!}{n!}$ ,
- բ) 1: 86.  $\frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}$ : 87.  $\frac{C_n^m C_{r-1}^{n-m-1}}{C_{n+r-1}^r}$ : 88.  $\frac{C_{2n-1}^{n-1}}{C_{3n-1}^{m-1}}$ : 89.  $\approx 4265$ :
90. 0,5: 91.  $\approx 0,9508$ : 92.  $\frac{n-m+1}{n+1}$ , եթե  $m \leq n$  և 0, եթե  $m > n$ :
93.  $\frac{2n}{n+m}$ : 94. ա)  $\frac{1}{(2n-1)!!}, \text{բ) } \frac{n!}{(2n-1)!!}$ : 95. ա)  $\frac{48}{216} \approx 0,1991$ ,

բ)  $\frac{5}{54} \approx 0,0926$ : 96.  $(1 - \frac{2}{n})^{2r-2}$ : 97. ա)  $(1 - \frac{1}{n})^{r-1}$ , բ)  $\prod_{k=1}^{r-1} (1 - \frac{k}{n})$ :

98. Եթե  $N = 10k + l$ , ապա  $p_n = \begin{cases} \frac{2k}{N}, & l = 0 \\ \frac{2k+1}{N}, & 1 \leq l \leq 8 \\ \frac{2k+2}{N}, & l = 9 \end{cases}$ ;  $\lim_{N \rightarrow \infty} p_N =$

$\frac{1}{5}$ : 99.  $p_N = \frac{1}{N} [\frac{N}{k}] \rightarrow \frac{1}{k}$ , որպես  $[\cdot]$ -ն թվի ամբողջ մասն է: 100.  $p_2 = \frac{1}{N^2} ([\frac{N}{2}]^2 + (N - [\frac{N}{2}])^2) = 1 - \frac{2}{N} [\frac{N}{2}] + \frac{2}{N^2} [\frac{N}{2}]^2$ ,  $p_3 = \frac{1}{N^2} ([\frac{N}{3}]^2 + (N - [\frac{N}{3}])^2) = 1 - \frac{2}{N} [\frac{N}{3}] + \frac{2}{N^2} [\frac{N}{3}]^2$ ,  $p_2 < p_3$ , եթե  $N \geq 3$ : 101. ա)

$\frac{1}{n^n}$ , բ)  $\frac{C_n^N (n-1)^{n-k}}{n^n}$ ,

գ)  $\frac{1}{n}$ , դ)  $\frac{1}{n^k}$ : 102. ա)  $\frac{1}{n!}$ , բ)  $\frac{1}{A_n^k}$ , եթե բոլոր  $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ -ը փարբեր են և 0, եթե  $j_1 < j_2 < \dots < j_k$  -ի միջև կան միաբերականներ,

գ)  $\frac{1}{n}$ : 103. 1)  $1 - \frac{N!}{N^n}$ , 2)  $\frac{N! C_{N+1}^2}{N^{N+1}}$ , 3)  $(\frac{1}{2} C_{N+1}^2 C_{N-1}^2 + C_{N+1}^3) \cdot \frac{N!}{N^{N+1}}$ :

104. 0,0769, 0,03116: 105.  $\frac{1}{5}$ : 106.  $\frac{a-r}{a}$ : 107. ա)  $\frac{(a-2r)^2}{a}$ , բ)  $1 -$

$4(\frac{r}{a})^2$ : 108. ա)  $\frac{2}{\pi}$ , բ)  $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ : 109.  $\frac{1}{2}$ : 110. ա)  $\frac{1}{12}$ , բ) 0: 111. ա)

$\frac{2}{3}$ , բ)  $\frac{1}{12}$ : 112.  $k(2-k)$ : 113.  $\approx 0,121$ : 114. 2) ա)  $1 - (1-z)^2$ ,

բ)  $z(1 - \ln z)$ , գ)  $1 - (1-z)^2$ , դ)  $z^2$ , ե)  $2z^2$ , եթե  $z \leq \frac{1}{2}$  և  $1 - 2(1-z)^2$ , եթե  $z > \frac{1}{2}$ : 115.  $\frac{1+3\ln 2}{8} \approx 0,3849$ : 116.  $\approx 0,21$ : 117.  $1 - (1 -$

$\frac{t}{T_1})(1 - \frac{t}{T_2})$ : 118.  $\frac{2l}{\pi a}$ : 120. ա)  $\frac{1}{4}$ , բ) 1: 121. ա)  $\frac{1}{4}$ , բ) 0: 122.

$\frac{1}{2}$ : 123.  $\frac{l}{\pi} \arctan \frac{h}{l}$ : 124.  $\frac{(l-d-2r)(l \cos \varphi - d - 2r)}{l^2 \cos \varphi}$ , եթե  $0 \leq \arccos \frac{d+2r}{l}$  և

0, եթե  $\varphi > \arccos \frac{d+2r}{l}$ : 125.  $\frac{(b+d)}{L \sin \alpha}$ , եթե  $b+d < L \sin \alpha$  և 1, եթե

$b+d \geq L \sin \alpha$ : 126.  $1 - (1 - \frac{r}{L} \sqrt{1 + (\frac{v}{u})^2})$ , եթե  $r \sqrt{1 + (\frac{v}{u})^2} \leq L$  և 1,

եթե  $r \sqrt{1 + (\frac{v}{u})^2} \geq L$ : 127. Դրամի հասարությունը պետք է կազմի նրա

փրամագծի  $\approx 0,354$  մասը: 128. ա)  $\frac{2}{3}$ , բ)  $\frac{2}{3}$ : 129.  $\frac{3 \ln 4 + 5}{36} \approx 0,2544$ :

130.  $\frac{1}{7}$ : 131.  $\frac{2}{5}$ : 132.  $\frac{1}{2}$ : 139. Կախյալ են: 140. ա) Անկախ են,

բ) անկախ են: 143. Անկախ են  $(A_i, A_j)$ ,  $i, j = \{1, 2, 5, 6\}$  զույգերը և

$(A_1, A_5, A_6)$ ,  $(A_2, A_5, A_6)$  եռյակները: 144.  $\frac{31}{96} \approx 0,323$ : 145.  $\frac{109}{120} \approx$

$0,9083$ : 146. ա) 0,94 բ) 0,38: 147. ա) 0,3 բ) 0,6: 148.  $\frac{57}{115} \approx$

$0,4956$ : 149. 0,96: 150.  $1 - \frac{(n-l)!(n-k)!}{n!(n-l-k)!}$ , եթե  $k \leq n-l$  և 1, եթե

$k > n-l$ : 153.  $5! \frac{2}{\pi} (\frac{\pi-2}{4\pi})^4 \approx 0,0052$ : 154. ա) 0,552, բ) 0,012, գ)

0,328,

դ) 0,088: 155.  $p_1 = \frac{2}{3}$ ,  $p_2 = \frac{1}{3}$ : 156.  $p_1 = \frac{4}{7}$ ,  $p_2 = \frac{2}{7}$ ,  $p_3 = \frac{1}{7}$ :

157.  $p_1 = \frac{a+b}{a+2b}$ ,  $p_2 = \frac{b}{a+2b}$ , ( $p_2 = \frac{b}{a+b}p_1$ ): 158. 0,455: 159. 1/6:  
160. 77/165, 53/165, 35/165: 161. 2/3: 162. ա) 0,0792 , բ) 0,264:

163. ա) 0,4 բ) 1/26: 164.  $P(\xi = i/\eta = 0) = \begin{cases} \frac{1}{19}, \text{ եթե } i = 0 \\ \frac{2}{19}, \text{ եթե } i = \overline{1, 9} \end{cases} :$

165.  $\frac{p}{8-7p}$ : 168. ա)  $A_l$  և  $B_k$  պարահույթները անկախ են ցանկացած  $l$ -ի և  $k$ -ի դեպքում, բ)  $A_2$  և  $C_2$  պարահույթները անկախ են, գ)  $A_4$  և  $C_4$  պարահույթները կախյալ են: 169.  $r \geq \frac{2}{3}$ ,  $r = \frac{1}{3}$  և  $r \leq 0$  դեպքերում: 172. ա) Առաջին սափորի ամենահավանական պարունակությունը սկզբնական պարունակության պահպանումն է: բ)  $\frac{42}{125} \approx 0,336$ : 173. Ավելի հավանական է, որ ուսանողը գիրքը կգտնի:

174. Ապացուցել, որ եթե  $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \subset A$  ապա

$$P(A) \geq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) - (n - 1) :$$

177. 0,5: 178. ա) Որոնելի հավանականությունը  $P_{N,R} = (1 - (\frac{r}{R})^3)^N$ ,

բ)  $\lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ \frac{N}{R^3} \rightarrow \frac{4}{3}\pi\lambda}} P_{N,R} = e^{-\frac{4\pi\lambda r^3}{3}}$ : 179.  $e^{-\lambda t}$ : 180.  $1 - (1 - (1 - p)^m)^k$ :

181. ա)  $1 - (1 - p)^k$ , զուգահեռ միացված դիմադրությունների քանակը ավելացնելու դեպքում շրթայի հուսալիությունը աճում է: բ)  $p^k$ , հաջորդաբար միացված դիմադրությունների քանակը ավելացնելու դեպքում շրթայի հուսալիությունը նվազում է: 182.  $\frac{a}{a+b}$ : 184.  $\frac{100!}{2^{100}(50!)^2}$ : 185.

$\frac{2^n m! n!}{(m+n)!}$ : 186. ա)  $\prod_{k=1}^n (1-p_k)$ , բ)  $1 - \prod_{k=1}^n (1-p_k)$ , գ)  $\prod_{k=1}^n (1-p_k) \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{1-p_k}$ ,

եթե  $p_k < 1$ : 188.  $\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k!}$ : 189.  $p_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k!}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n =$

$1 - e^{-1}$ : 190.  $p_n = 1 - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (\frac{1}{k!})$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = e^{-1}$ : 191. ա)

$\frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{n-m} \frac{(-1)^k}{k!}$ , բ)  $1 - \sum_{k=0}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k!}$ , գ)  $e^{-1}$ : 192.  $1 - \sum_{m=1}^{n-1} (-1)^{m-1} C_n^m (1 - \frac{m}{n})^k$ :

193.  $\frac{7}{18} \approx 0,39$ : 194.  $\frac{1}{2} (\frac{m_1}{n_1+m_1} + \frac{m_2}{n_2+m_2})$ : 195.  $\frac{n+2}{2(n+1)}$ : 196.

0,4: 197.  $\frac{a}{a+b}$ : 198. Նշանակություն չունի: 199.  $\frac{1}{C_{a+b}^3 (c+d+3)} (C_a^3 (c +$

$3) + C_a^2 b (c + 2) + C_b^2 a (c + 1) + C_b^3 c)$ : 200.  $\approx 0,0811$ : 201. ա)

$\approx 0,5739$ , բ)  $\approx 0,7777$ : 202.  $\frac{10}{17} \approx 0,5882$ : 203.  $\frac{25}{69} \approx 0,3623$ ,  $\frac{28}{69} \approx$

- 0,4058,  $\frac{16}{69} \approx 0,2319$ : 204.  $\frac{16}{165} \approx 0,9697$ : 205.  $A_i$ -ն խմբաքանակը պարունակում է  $i$  խոտրանված արտադրանք,  $i = 0, 1, \dots, 5$ : Ամենահավանական է  $A_5$ -ը: 206.  $\frac{20}{21} \approx 0,9524$ : 207. ա)  $\frac{(1-\gamma)\alpha}{(1-\gamma)\alpha+\gamma(1-\beta)}$ , բ)  $\approx 0,9173$ : 208.  $\frac{5}{11} \approx 0,4545$ : 209.  $\frac{m-2}{m+n-2}$ : 210.  $\frac{6}{13} \approx 0,4615$ : 211.  $\frac{10}{19} \approx 0,5263$ : 212. 11/45: 213. 0,37209: 214. 4/9: 215.  $\frac{(n-m)(n-m+1)}{2n(n-1)}$ :
216.  $P_{2t}(s) = \sum_{k=0}^s P_t(k)P_t(s-k)$ ,  $P_{2t}(s) = \frac{(2\lambda t)^s}{s!}e^{-2\lambda t}$ : 217. 1/2: 218.  $(\frac{3}{4})^N$ : 219. 8 ուղղաթիռ պետք է ուղարկել առաջին շրջան,  $p \approx 0,7378$ : 220.  $\frac{1}{36C^{a+b+c}}(6abc + 3b(b-1)c + 2c(c-1)b + 4c(c-1)a)$ : 221.  $p_n = (p+q-1)^{n-1}p_1 + (1-q)[1 + (p+q-1) + (p+q-1)^2 + \dots + (p+q-1)^{n-2}]$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{1-q}{2-p-q}$ : 222. ա)  $P(A) = \frac{\alpha^2}{1-2\alpha\beta}$ ,  $P(B) = \frac{\beta^2}{1-2\alpha\beta}$ , որպեսզի  $P(A)$ -ն և  $P(B)$ -ն համապատասխան  $A$  և  $B$  խաղացողների ամբողջ խաղը փանելու հավանականություններն են: բ) Քանի որ  $\alpha > \beta$ , ապա  $A$  խաղացողի համար շահավետ է խաղալ ամբողջ խաղը: 223.  $\frac{a}{a+b}$ : 224.  $\frac{(\frac{p}{q})^{a+b} - (\frac{p}{q})^b}{(\frac{p}{q})^a - 1}$ : 225. Որոնելի հավանականությունը  $P = \frac{N!}{(N+1)^N N} \cdot 2 \sum_{k=0}^N \frac{k}{k+1}$ ,  $\frac{N!}{(N+1)^N} < P < 2 \frac{N!}{(N+1)^N}$ : 226. Որոնելի հավանականությունը  $P = \sum_{i=0}^4 \frac{a_i}{N} \left[ \frac{a_i-1}{N-1} (1 - (1-p_i)^2) + \sum_{i \neq j=1}^4 \frac{a_j}{N-1} (1 - (1-p_i)(1-p_j)) \right]$ : 227.  $\frac{13}{41} \approx 0,3171$ : 228.  $\frac{2}{3}$ : 229.  $\frac{2n+1}{3n}$ : 230.  $\approx 0,0392$ : 231.  $(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}) / (\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3})$ : 232.  $\frac{2\alpha p_1}{2\alpha p_1 + (1-\alpha)(p_2+p_3)}$ : 233.  $\frac{80}{243} \approx 0,3292$ : 234.  $\approx 0,0002$ : 235.  $\approx 0,028$ : 236.  $(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi})^4$ : 237.  $\frac{8}{27} \approx 0,2963$ : 238.  $C_{2n-k}^n (\frac{1}{2})^{2n-k}$ : 239.  $\approx 0,2$ : 240.  $\approx 0,9308$ : 241.  $\approx 0,0655$ : 242.  $n > 10$ : 243.  $n \geq 25$ : 244.  $\approx 0,0226$ : 245.  $\approx 0,2454$ : 246.  $\approx 0,0003$ : 247. 11/32: 248. ա) 1/16, բ) 1/32, գ) 5/16, դ) 1/4, ե) 31/32: 249. 0,7361; 0,7358 250. 0,393: 251.  $\approx 0,0013$ : 252. Ավելի հավանական է սրանալ զոնե մեկ «6» չորս գառի նետումով: 253. ա)  $\approx 0,6651$ , բ)  $\approx 0,6187$ , գ)  $\approx 0,5973$ : 254.  $m_o = 4$ ,  $P_{10}(4) \approx 0,2508$ : 255.  $24 \leq n \leq 25$ : 256.  $m_o = 10$ : 257.  $\approx 0,0041$ : 258.  $\approx 0,0456$ : 259. Ավելի հավանական է  $\frac{1}{2}$ -ը: 260.  $5 \leq m \leq$

- 22: 261.  $n = 666$ : 262.  $\approx 0,7698$ : 263.  $15 \leq m \leq 33$ : 264.  $R$ -ը շահած գումարն է,  $1600 \leq R \leq 3733\frac{1}{3}$ : 266.  $p^k + k(1-p)p^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2}(1-p)^2p^{k-2}$ : 267. ա)  $\approx 0,6513$ , բ)  $\approx 0,998$ : 268.  $\approx 0,9936$ : 269.  $\approx 0,197$ : 270.  $\approx 0,5953$ : 271.  $0,0935$ : 272.  $\frac{93}{256} \approx 0,3633$ : 273. 273. ա)  $0,321$ , բ)  $0,243$ : 274.  $C_{2n}^m(\frac{1}{2})^{2n}$ : 275.  $p^m(1 + C_m^1q + C_{m+1}^2q^2 + \dots + C_{m+n-2}^{m-1}q^{n-1})$ : 276. Խաղագումարը բաժանել առաջին և երկրորդ խաղացողների շահելու հավանականությունների  $p_1 : p_2$  հարաբերությանը համեմարական՝  $p_1 = \frac{1}{2^m} \left(1 + \frac{1}{2}C_m^1 + \frac{1}{2^2}C_{m+1}^2 + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}C_{m+n-2}^{n-1}\right)$ ,  $p_2 = \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{2^2}C_{n+1}^2 + \dots + \frac{1}{2^{m-1}}C_{m+n-2}^{m-1}\right)$ :
277.  $\frac{1}{2}(1 + (q-p)^n)$ : 278.  $\frac{(\lambda p)^l}{e^l} e^{-\lambda p}$ : 279.  $1 - (1 - p(1-q))^n$ : 281.  $B$ -ն  $-$ նավի խորփակումը,  $A_k$ -ն  $-$  նավին կղիպչի  $k$  փորփակ,  $k = \overline{0, n}$ :  $P(B) = \sum_{k=0}^n P(A_k) \cdot P(B/A_k) = \sum_{k=2}^n C_n^k p^k q^{n-k} (1 - \frac{1}{m^{k-1}})$ :
282.  $1 - (1 - p_1)^n + \sum_{m_2=l+1}^n \frac{n!}{m_2!(n-m_2)!} p_2^{m_2} p_3^{n-m_2}$ , որպեսզի  $l = [\frac{M}{k}]$ :
283.  $A$ -ն սրցման ժամանակ կհաղթի հրաձիգներից միայն մեկը,  $A_i$   $-$ ն  $-$  սրցումը կհաղթի  $i$ -րդ հրաձիգը:  $A_i^{(m)}$   $-$   $i$ -րդ հրաձիգը ունի  $m$  դիպում, իսկ մնացած հրաձիգներից յուրաքանչյուրը ոչ ավելի, քան  $(m-1)$  դիպում,  $P_{m,n}(i)$ -ն  $i$ -րդ հրաձիգի  $m$  դիպում սրանալու հավանականությունն է,  $T_m(j)$   $-$ ն  $j$ -րդ հրաձիգի ոչ ավելի, քան  $(m-1)$  դիպումներ սրանալու հավանականությունն է,  $P(A_i) = \sum_{m=1}^n P(A_i^{(m)})$ ,  $P(A) = \sum_{i=1}^k P(A_i) = \sum_{i=1}^k \sum_{m=1}^n P_{m,n}(i) \cdot \prod_{j \neq i} T_m(j)$ : 284.  $C_{l-1}^{k-1} p^k q^{l-k}$ :
285.  $C_n^m p^{n+m} q^{n-m}$ : 286.  $C_n^{\frac{n+m}{2}} p^{\frac{n+m}{2}} q^{\frac{n-m}{2}}$ , եթե  $\frac{n+m}{2}$   $-$ ը ամբողջ թիվ է և  $0$  հակառակ դեպքում: 288. ա)  $pq^3$ , բ)  $(1 - q^3)pq^3$ , գ)  $(1 - q^3 - pq^3)pq^3$ : 289.  $q$ ;  $\frac{1}{2}$ : 290.  $q^2$ ;  $0,25$ : 291.  $\frac{7}{1290} \approx 0,0054$ : 292.  $\frac{p^{a-1}(1-q^b)}{p^{a-1}+q^{b-1}-p^{a-1}q^{b-1}}$ : 293.  $(1 - p^2)^N$ : 294.  $(rpp^{r-1} + q^r)^N$ : 296.  $\approx 0,265$ : 297.  $\sum_{k=0}^{130} C_{1000}^k (\frac{1}{10})^k (\frac{9}{10})^{1000-k} \approx 0,9993$ : 298. ա)  $\approx 0,4236$ , բ)  $\approx 0,5$ , գ)  $\approx 0,48$ : 299.  $n = 100$ : 300.  $0 \leq m \leq 6$ , որպեսզի  $m$   $-$ ը բախումների թիվն է: 301. ա)  $558$ , բ)  $541$ : 302.  $\varepsilon = 0,05$ : 303.  $547$ :

304.  $\xi$ -ն գերբի հանդես գալու թիվն է,

$\xi$	0	1	2
$P$	1/4	1/2	1/4

305.  $\xi$ -ն սրանդար մանրակների թիվն է,

$\xi$	0	1	2
$P$	1/45	16/45	28/45

306.  $\xi$ -ն խոփան մանրակների թիվն է,

$\xi$	0	1	2	3	4
$P$	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001

307.  $\xi$ -ն սրուզված սարքերի թիվն է,

$\xi$	1	2	3	4	5
$P$	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,6561

308.  $\Omega = \{q, \text{թ}q, \text{թթ}q, \dots, \underbrace{\text{թթ} \dots \text{թ}}_{n-1} q, \dots\}$ ,  $\xi$ -ն ներումների թիվն է,  $P(\xi =$

$n) = \frac{1}{2^n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $P(\xi > 1) = \frac{1}{2}$ : 309.  $\xi$ -ն կապարած կրակոցների թիվն է,  $P(\xi = k) = 0,8^{k-1}0,2$ ,  $k = 1, 2, \dots$ : 310.  $\xi_k$ -ն  $k$ -րդ բաակեփրոլիսափ կապարած ներումների թիվն է,  $k = 1, 2$ :  $P(\xi_1 = m) = (0,6 \cdot 0,4)^{m-1}(0,4 + 0,6^2)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ,  $P(\xi_2 = 0) = 0,4$ ,  $P(\xi_2 = m) = 0,6(0,4 \cdot 0,6)^{m-1}(0,6 + 0,4^2)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ : 313. 0,25: 315.

$$3/4, F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{3}{4}x - \frac{x^3}{4} + \frac{1}{2} & -1 < x \leq 1: \\ 1, & x > 1 \end{cases} \text{ 316. ա) Ննարավոր է, բ)}$$

$n_\xi, q)$  հնարավոր է: 317. ա)  $a = 1/\pi$ , բ)  $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x$ , գ)  $P(-1 \leq \xi < 1) = \frac{1}{2}$ : 318. ա)  $P(\xi \geq 1) = \frac{1}{4}$ , բ)  $P(|\xi| \geq 1) = \frac{1}{2}$ : 319.  $a = \frac{2}{\pi}$ ,  $\frac{4}{\pi^2}(\arctan e)^2$ : 320. ա)  $c = 2/a$ , բ)  $F(x) =$

$$\begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{a} \left(2 - \frac{x}{a}\right), & 0 < x \leq a \\ 1, & x > a, \end{cases} \text{ գ) } P\left(\frac{a}{2} \leq \xi < a\right) = \frac{1}{4}: \text{ 321. ա) } c = 1/a,$$

$$\text{բ) } F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -a \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2}, & -a < x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2}, & 0 < x \leq a \\ 1, & x > a, \end{cases} \text{ գ) } P\left(\frac{a}{2} \leq \xi < a\right) = \frac{1}{8}: \text{ 323.}$$

$$\text{w)} e^{-1, \text{p}} e^{-1, \text{q}} e^{-1}: 324. P(\xi - t < x/\xi \geq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0: \end{cases}$$

$$325. \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \eta_1 & 1 & 2 & 5 \\ \hline P & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \eta_2 & 0 & 1 & 2 \\ \hline P & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ \hline \end{array}:$$

$$326. \begin{array}{|c|c|c|} \hline \eta & -1 & 1 \\ \hline P & F(0) & 1 - F(0) \\ \hline \end{array} : 327. \text{w)} } f_{\eta}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad 0 < x \leq 1, \text{p)} \\ f_{\eta}(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x > 1, \text{q)} } f_{\eta}(x) = \frac{1}{x}, \quad 1 < x < e:$$

$$328. \text{w)} } F_{\eta}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad f_{\eta}(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

$$\text{p)} } F_{\eta}(x) = F_{\xi} \left( \frac{e^x}{1+e^{-x}} \right), \quad f_{\eta}(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2},$$

$$\text{q)} } F_{\eta}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad f_{\eta}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

$$329. \text{w)} } f_{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & x \in (-1, 1) \\ 0, & x \notin (-1, 1), \end{cases}$$

$$\text{p)} } f_{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & x \in (0, 1) \\ 0, & x \notin (0, 1), \end{cases} \quad 330. F_{\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1: \end{cases}$$

$$331. F_{\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1: \end{cases} \quad 332. f_{\eta}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}:$$

$$333. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - \frac{\sqrt{l^2-4x}}{l}, & 0 < x \leq l^2/4 \\ 1, & x > l^2/4, \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{l\sqrt{l^2-4x}}, & x \in (0, l^2/4) \\ 0, & x \notin (0, l^2/4): \end{cases}$$

$$334. F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - \frac{(a-x)^2}{a^2}, & 0 < x \leq a \\ 1, & x > a, \end{cases}$$



$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(a-x)}{a^2}, & x \in (0, a) \\ 0, & x \notin (0, a) \end{cases} :$$

335. Նշանակենք ձախից  $k$ -րդ կերի արսցիսի խորությունը  $f_{\xi_k}(x)$ -ով,

$$f_{\xi_k}(x) = \begin{cases} C_n^1 C_{n-1}^{k-1} \frac{1}{a} \left(\frac{x}{a}\right)^{k-1} \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{n-k}, & x \in (0, a) \\ 0, & x \notin (0, a) \end{cases} :$$

$$336. \text{ ա) } f(x) = \begin{cases} \frac{2a}{\pi(a^2+x^2)}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \text{ բ) } f(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)} :$$

$$337. f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2R\sqrt{4R^2-x^2}}, & x \in (0, 2R), \\ 0, & x \notin (0, 2R) \end{cases} :$$

$$338. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{R^2-x^2}}, & x \in (-R, R), \\ 0, & x \notin (-R, R) \end{cases} :$$

339. 1/2, 1/6, 1/12, 1/2: 340. ա) 1/3, բ) 1/3: 341. 0,3; 0,4; 0,5: 342. 0,0456:

343. ա) 0,79673 բ) 0,68268 գ) 0,3707 դ) 0,95154 ե) 0,15866: 348.  $\eta$ - $\bar{u}$  հաշող փորձերի թիվն է,  $P(\eta = m) = \frac{(\lambda p)^m}{m!} e^{-\lambda p}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ :

$$353. \text{ Աարող է: } 354. \eta = \frac{1}{2}(\xi + |\xi|), F_\eta(x) = \begin{cases} F(x), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} :$$

355.

$$F_\eta(y) = \begin{cases} F\left(\frac{y-b}{a}\right), & a > 0 \\ 1 - F\left(\frac{y-b}{a} + 0\right), & a < 0 \\ 0, & a = 0, y \leq b, \\ 1, & a = 0, y > b \end{cases}$$

$$356. F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases} :$$

$$357. F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \pi a^2 \\ \frac{\sqrt{x/\pi-a}}{b-a}, & \pi a^2 < x \leq \pi b^2 \\ 1, & x > \pi b^2 \end{cases} :$$

$$359. P(\text{sign}\xi = 1) = P(\text{sign}\xi = -1) = 1/2:$$

$$360. f_{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0: \end{cases}$$

$$361. \text{u)} f_{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi x}} \left( e^{-\frac{(\sqrt{x}-a)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(\sqrt{x}+a)^2}{2\sigma^2}} \right), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0: \end{cases}$$

$$\text{p)} f_{\eta}(x) = \frac{1}{3\sigma\sqrt{2\pi}\sqrt{x^2}} e^{-\frac{(\sqrt[3]{x}-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \neq 0:$$

$$362. f_{\eta}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1) \\ 0, & x \notin (0, 1): \end{cases}$$

$$363. c = 1, f_{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{1-x}}, & x \in (0, 1) \\ 0, & x \notin (0, 1): \end{cases}$$

$$364. c = \frac{20}{\pi^2}, F(x, y) = \left( \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{1}{\pi} \arctan \frac{y}{5} + \frac{1}{2} \right):$$

$$365. 1) \frac{3}{128}, 2) f(x, y) = \begin{cases} (\ln^2 2) 2^{-x-y}, & x \geq 0, y \geq 0, \\ 0, & \text{մնացած դեպքերում,} \end{cases}$$

$$\text{q)} 135 \cdot 2^{-12}: 366. a = \frac{1}{\pi^2}, f_{\xi}(x) = f_{\eta}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \xi\text{-ն և } \eta\text{-ն անկախ}$$

$$\text{են: } 367. \text{u)} f_{\xi}(x) = e^{-x}, x \geq 0, \text{p)} f_{\eta}(y) = \frac{1}{(1+y)^2}, y > 0: 371.$$

$$14/39, 10/39, 10/39/ 5/39: 372. \text{u)} pF(x) + qG(x), \text{p)} F(x)[p + qG(x)],$$

$$\text{q)} F(x) + qG(x)[1 - F(x)]: 374. \Omega_{\xi}: 375. \Omega_{\eta}: 377. \Omega_{\xi}: 378. \Omega_{\xi}: 379. \text{u)}$$

$$\Omega_{\eta}, \text{p)} \text{այո, q)} \text{այո, օրինակ } \xi\text{-ն ընդունում է } -1 \text{ և } 1 \text{ արժեքները, իսկ}$$

$$\eta = -\xi: \Omega_{\eta} \text{ դեպքում } \xi + \eta = 0 \text{ և } \xi\eta = -1: 382. \Omega_{\eta}: \text{Ընդհանրապես}$$

$$\text{կփոխվի: } 388. f_{\xi, \eta}(x, y) = \begin{cases} 1/2, & (x, y) \in R \\ 0, & (x, y) \notin R' \end{cases}$$

$$f_{\xi}(x) = f_{\eta}(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} \quad \xi\text{-ն և } \eta\text{-ն կախյալ են:}$$

$$389. f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}, & |x| \leq R, \\ 0, & |x| > R, \end{cases} \quad f_{\zeta}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2H}, & |z| \leq H, \\ 0, & |z| > H, \end{cases}$$

( $\xi, \eta, \zeta$ ) վեկտորի արդյեկցիաները կախյալ են:

$$390. \text{ u) } f_{\xi}(x) = f_{\eta}(x) = f_{\zeta}(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} \cdot \frac{r^2 - x^2}{r^3}, & |x| \leq r \\ 0, & |x| > r, \end{cases} \text{ p) } 1/8:$$

$$393. \text{ u) } F(x, y) = F(\min(x, y)),$$

$$\text{p) } F(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq -y, \quad y \leq 0 \\ F(x) - F(-y), & -y < x < y, \quad y > 0, \\ F(y) - F(-y), & x \geq y, \quad y > 0: \end{cases}$$

$$394. \text{ p) } (12x^2 + 6x)/7 \quad \text{q) } 15/56 \quad \text{r) } 0,8625: \quad 397. P(\eta_n = 1) = P(\eta_n = -1) = 1/2: \quad 398. 5/6, 1/6: \quad 399. \text{ u) } 1/8, \text{ p) } f_{\xi}(x) = \frac{3}{8} - \frac{3}{16}x^2, f_{\eta}(x) = \frac{1}{4}e^{-y}y^3: \quad 400. 1/2, 1 - e^{-a}: \quad 403. \frac{1}{2} + \frac{3y}{4x} - \frac{y^3}{4x^3}: \quad 404. F_{\xi}(x) = 1 - (1 - F(x))^n, F_{\eta}(x) = (F(x))^n: \quad 405. F_{\eta}(x) = 1 - \exp\{-\sum_{i=1}^n \lambda_i x\}, x \geq 0:$$

$$406. \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \xi + \eta & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline P & 0,06 & 0,15 & 0,32 & 0,27 & 0,2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \xi - \eta & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ \hline P & 0,08 & 0,18 & 0,35 & 0,24 & 0,15 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \xi \eta & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline P & 0,08 & 0,06 & 0,51 & 0,15 & 0,2 \\ \hline \end{array}$$

$$407. \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \xi + \eta & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline P & 0,08 & 0,16 & 0,28 & 0,24 & 0,24 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \xi - \eta & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline P & 0,12 & 0,24 & 0,32 & 0,16 & 0,16 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \xi \eta & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline P & 0,16 & 0,16 & 0,2 & 0,24 & 0,24 \\ \hline \end{array}$$

$$408. P(\eta = i) = 2q^i p - q^{2i} p - q^{2i+1} p, \quad P(\eta = i, \xi_1 = j) = q^{i+j} p^2, \quad i > j, \\ P(\eta = i, \xi_1 = i) = (1 - q^{i+1}) q^i p, \quad q = 1 - p:$$

$$409. F(x, y) = \begin{cases} (F(y))^n - (F(y) - F(x))^n, & x < y \\ (F(y))^n, & x \geq y: \end{cases}$$

$$418. P(\xi + \eta = k) = \begin{cases} \frac{k+1}{(n+1)^2}, & k = 0, 1, \dots, n, \\ \frac{2n+1-k}{(n+1)^2}, & k = n+1, \dots, 2n: \end{cases}$$

$$422. f_{\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2a, \quad x > 2b \\ \frac{x-2a}{(b-a)^2}, & 2a < x \leq a+b \\ \frac{2b-x}{(b-a)^2}, & a+b < x \leq 2b : \end{cases} \quad (\text{Միմպսոնի բաշխում})$$

$$423. \text{ ա) } f_{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right), & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a, \end{cases}$$

$$\text{ բ) } f_{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right), & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a, \end{cases}$$

$$424. \text{ ա) } f_{\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [0, 2] \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

$$\text{ բ) } f_{\eta}(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$$

$$\text{ գ) } f_{\eta}(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x \leq 0, \quad x > 1 \end{cases}$$

$$\text{ դ) } f_{\eta}(x) = \begin{cases} -\ln x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x < 0, \quad x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{ ե) } f_{\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2x^2}, & x > 1 : \end{cases}$$

$$425. f_{\xi+\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \quad x > 3 \\ \frac{x+1}{4}, & -1 < x \leq 1 \\ \frac{3-x}{4}, & 1 < x \leq 3 : \end{cases}$$

$$426. f_{\eta}(x) = \frac{1+|x|}{4} e^{-|x|}:$$

$$427. f_{\xi+\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{a}(1 - e^{-\lambda x}), & 0 \leq x \leq a, \\ \frac{1}{a}e^{-\lambda x}(e^{\lambda a} - 1), & x > a : \end{cases}$$

$$430. \text{ u) } f_{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda x}, & x \geq -\frac{1}{\lambda} \ln 2, \\ 0, & x < -\frac{1}{\lambda} \ln 2 \end{cases}$$

$$\text{բ) } f_{\eta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1+x)^2}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0: \end{cases} \quad 431. f_{\xi\eta}(x) = 12x(1-x)^2, x \in (0, 1):$$

$$433. f_{\eta}(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}: \quad 435. F_{\eta}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x}, & x > 1 \\ 0, & x \leq 1: \end{cases}$$

$$436. f_{\eta}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1) \\ 0, & x \notin (0, 1): \end{cases} \quad 437. f_{\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0, 1] \\ \frac{1}{2(1-x)^2}, & 0 < x \leq 1/2 \\ \frac{1}{2x^2}, & 1/2 < x \leq 1: \end{cases}$$

$$438. f_{\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (0, 2] \\ x^2, & 0 < x \leq 1 \\ x(2-x), & 1 < x \leq 2: \end{cases} \quad 439. f_{\xi\eta}(x) = 12x(4x-x^2 -$$

$$2 \ln x - 3), x \in (0, 1): \quad 440. f_{\xi\eta}(x) = e^{-x}, x > 0: \quad 443. 1 - e^{-\frac{R^2}{2}}:$$

$$444. \eta \sim N(0, 1): \quad 448. E\xi = 0, D\xi = \frac{n(n+1)}{3}: \quad 449. \xi\text{-ն դիստրիբյուցիայի թիվն է: } E\xi = 14, D\xi = 4, 2: \quad 450. p = 2/3, n = 18: \quad 451. \$5: \quad 452.$$

$$\xi\text{-ն վերցրած արտադրանքների մեջ գտնվող խտրան արտադրանքների թիվն է, } E\xi = 3/5, D\xi = 28/75: \quad 453. \xi\text{-ն հանված գնդիկների մեջ սպիտակ գնդիկների թիվն է, } E\xi = 0, 8, D\xi = 0, 36: \quad 454. n(2p-1):$$

$$456. k = a, A = e^{-a}: \quad 457. E\xi = a, D\xi = a(a+1): \quad 458. a = 1/10, q = 9/10: \quad 459. \text{ u) } D\xi = E\xi(E\xi + 1), \text{ բ) } P(\xi = n) = \frac{a^n}{(1+a)^{n+1}}, n = 0, 1, \dots (\text{Պասկալի բաշխում}): \quad 460. \xi\text{-ն ներդրումների թիվն է, } E\xi = 2,$$

$$D\xi = 2: \quad 461. E\xi = \frac{1}{p}, D\xi = \frac{1-p}{p^2}: \quad 462. f(x) = \begin{cases} 1/6, & x \in (1, 7) \\ 0, & x \notin (1, 7): \end{cases}$$

$$463. a = \lambda/2, E\xi = 0, D\xi = \frac{2}{\lambda^2}: \quad 464. A = 2\lambda^2, E\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda}, D\xi = \frac{4-\pi}{4\lambda^2}: \quad 465. E\xi = n+1, D\xi = n+1:$$

$$466. \text{ u) } \begin{array}{|c|c|c|} \hline \eta & 0 & 1 \\ \hline P & 1/3 & 2/3 \\ \hline \end{array} \quad \text{բ) } E\eta = 2/3, D\eta = 2/9: \quad 467. E\eta = 2, 4,$$

$$D\eta = 1, 99: \quad 468. E\eta = \frac{\lambda}{1+\lambda}, D\eta = \frac{\lambda}{(2+\lambda)(1+\lambda)^2}: \quad 469. \text{ u) } 1/2, \text{ բ) } e-1:$$

$$470. \text{ u) } E\eta = 0, D\eta = 1/3, \text{ բ) } E\eta = 1/2, D\eta = 1/12: \quad 471. \text{ u) }$$

$$1/2, p) -1/2: 472. \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \ln 2: 473. F_{\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{2x}{l}, & 0 < x \leq l/2, \\ 1, & x > l/2, \end{cases}$$

$E\eta = l/4, D\eta = \frac{l^2}{48}$ : 474.  $E\zeta = 1, 9, D\zeta = 1, 29$ : 475. 1)  $2/17, 2) 35/12, 3) 4,87, 4) 227/33, 5) 43/83, 6) 35/33$ : 476.  $p) E\xi = 7/2, E\eta = 161/36, D\xi = 35/12, D\eta = 2555/1296, cov(\xi, \eta) = 105/72$ : 477.  $E\zeta = -6, D\zeta = 29$ : 479.  $\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}$ : 481.  $u) \frac{\sqrt{15}}{4}, p) \frac{\sqrt{21}}{5}$ : 482.  $u) \frac{4\sqrt{6}}{\pi^2}, p) 0$ : 483.  $u) 18 p) 21$ : 484.  $a+1/k, 1/k^2, p) 1, 1/6$ : 485.  $D\xi = 1, D\eta = 1, cov(\xi, \eta) = 0$ : 486.  $2, 5/3, 12/5$ : 487.  $u) P(\xi = k) = \frac{C_n^k C_{N-m}^{m-k}}{C_N^m}, k = 0, 1, \dots, m, p) E\xi = \frac{mn}{N}, D\xi = \frac{mn(N-n)(N-m)}{N^2(N-1)}$ : 488.  $E\xi_1 = 4, E\xi_2 = 3$ :

489.  $E\xi = \frac{1-(2p-1)^n}{2}$ : 490.  $\xi$ -ն հանված սև գնդիկների թիվն է,  $E\xi = n/m$ : 491.  $P(\xi = k) = q^k p + p^k q, k = 1, 2, \dots, p$ -ն մեկ փորձում հաջողության հավանականությունն է,  $q = 1 - p$ :  $E\xi = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}, D\xi = \frac{p}{q^2} + \frac{q}{p^2} - 2$ : 492.  $E\xi = \alpha/\beta, D\xi = \alpha/\beta^2$ : 493.  $\frac{1-e^{-\lambda}}{\lambda}$ : 496.  $c = 2, E\eta = 1/2, D\eta = 1/12$ : 497.  $u) \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}, p) \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ : 498.  $E\rho = a/3, D\rho = a^2/18$ : 499.  $E\eta = \frac{2}{3}R, D\eta = \frac{R^2}{18}$ :

500.  $F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{2}{\pi} \arctan \frac{x}{R}, & x > 0, \end{cases} f_{\xi}(x) = \frac{2R}{\pi(R^2+x^2)}, x \geq 0, E\xi$ -ն գոյություն չունի:

501.  $F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{x}{2R}, & 0 < x \leq 2R, \\ 1, & x > 2R, \end{cases} E\xi = \frac{4R}{\pi}$ :

504.  $E\eta = e^{-\frac{1}{2}}, D\eta = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})^2$ : 506. 155: 507.  $E\xi_n = 1, D\xi_n = 1$ : 510.  $E\eta = 0$ : 514.  $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 \leq D(\xi + \eta) \leq (\sigma_1 + \sigma_2)^2$ : 516.  $E\xi\eta = 1, D\xi\eta = 4/9$ : 517.  $E\zeta = 1/4, D\zeta = 7/144$ : 518.  $E\zeta = 0, D\zeta = 1/24$ : 519.  $a = -\sqrt{3}, b = \sqrt{3}$ : 521.  $E\xi^k = \frac{k!}{\lambda^k}$ :

522.  $\mu_{2k+1} = 0, \mu_{2k} = (2k - 1)!!\sigma^{2k}$

$\eta \setminus \xi$	-2	-1	1	2
1	0	1/4	1/4	0
4	1/4	0	0	1/4

527.  $B = \begin{pmatrix} \frac{29}{48} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ : 529.  $u) n_{\xi}$ ,

- բ)  $\omega_{jn}: 530. -1/2: 531. B = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 3\sigma^4 \\ 3\sigma^4 & 15\sigma^6 \end{pmatrix}: 533. \frac{n-m}{n}: 534. \rho^2:$
538.  $y^2/3: 539. \frac{n\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}: 540. \frac{5-4y}{8-6y}: 541. y + 2: 542. 2: 543. 1/8: 544. 1, 1, 1: 545. -23/6: 546. 6, 112/33: 547. \frac{1}{n+1}, \frac{n}{n+1}: 548. E\xi = 1, D\xi = 1: 549. \frac{(2N-m)(2N-m-1)}{2(2N-1)}: 552. \frac{1}{4}: 553. \frac{8}{9}: 554. 0,64: 555. 0,909: 557. > \frac{2}{3}: 558. > 0,84: 559. \leq \frac{11}{31}: 560. \geq 19/20: 561.  $p_1 = 0,75: 562. > \frac{3}{4}; > \frac{39}{40}: 563. 0,94: 564. 0,75: 565. \varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{30}: 566. \varepsilon = 0,3: 567. \omega) \leq \frac{15}{17} \rho) \geq \frac{3}{4} \rho) n \geq 10: 568. \leq \frac{25}{48}; 0,2: 571. \mathbb{U}_{jn}: 572. \mathbb{U}_{jn}: 573. \mathbb{U}_{jn}: 574. \mathbb{U}_{jn}: 575. \mathbb{U}_{jn}: 579. n \geq 250000: 580.  $p > 0,82: 581. p > 0,98: 582. S \geq 815: 584. p > 0,9875: 585. s < 1/2: 591. \cos t: 592. \cos^2 t: 593. \prod_{k=1}^n (q_k + p_k e^{it}); q_k + p_k = 1: 594. p e^{ita} + (1-p)e^{itb}: 595. \frac{\sin at}{at}: 596. \frac{4 \sin^2 \frac{at}{2}}{a^2 t^2}: 597. \frac{a^2}{a^2 + t^2}: 598. \frac{1}{1-it}; \nu_k = k!: 599. \frac{e^{itb} - e^{iat}}{it(b-a)}, \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(k+1)(b-a)}: 600.  $e^{-3}: 601. \omega) P(\xi = -1) = P(\xi = 1) = \frac{1}{2}: \rho) P(\xi = -2) = P(\xi = 2) = \frac{1}{4}, P(\xi = 0) = \frac{1}{2}: 602. \left(\frac{2}{i(b-a)t}(e^{it\frac{b}{2}} - e^{it\frac{a}{2}})\right)^2: 603. e^{-|t|}: 604. (q + p e^{it})^n; np; npq: 605. \frac{1}{1+a(1-e^{it})}; a; a(1+a): 606.  $\mu_{2k+1} = 0; \mu_{2k} = \sigma^{2k}(2k-1)!!: 607. (1 - \frac{it}{a})^{-\lambda}; \frac{\lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+k-1)}{a^k}: 609. f(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}: 610. f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}: 618. Բինոմական բաշխում  $(n+m, p)$  պարամետրով: 619. Պուասոնյան բաշխում  $\lambda_1 + \lambda_2$  պարամետրով: 625. ա) Նորմալ բաշխում  $(0, 2)$  պարամետրով: 626.  $f(x) = \begin{cases} 1/2, & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}$ : 627.  $f(x) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{1+(x-1)^2} + \frac{1}{1+(x+1)^2} \right): 628. f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-x}, & x \geq 0 \end{cases}$ : 630.  $n \geq 4: 633. 0,1699: 634. 0,04: 635. n = 450000: 636. 0,9759: 637. \mathbb{U}_{jn}: 638. \Omega: 644. \Omega:$$$$$$

## ԲՈՎԱՆԴԱԿՈՒԹՅՈՒՆ

Խմբագրի կողմից .....	3
Գործողություններ պարահայտների հետ .....	4
Նամակցություն (Կոմբինատորիկա) .....	9
Նավանականության դասական սահմանումը .....	13
Երկրաչափական հավանականություններ .....	24
Պայմանական հավանականություն	
Պարահայտների և փորձերի անկախությունը .....	28
Լրիվ հավանականության և Բայեսի բանաձևերը .....	39
Բեռնուլիի բանաձևը .....	48
Պարահական մեծություն և բաշխման ֆունկցիա .....	61
Բազմաչափ պարահական մեծություն և բաշխման ֆունկցիա .....	74
Պարահական մեծությունների անկախություն .....	77
Պայմանական բաշխումներ .....	77
Պարահական մեծություններից ֆունկցիայի բաշխումը .....	85
Պարահական մեծության թվային բնութագրիչները .....	95
Պարահական վեկտորի թվային բնութագրիչները .....	97
Պայմանական մաթեմատիկական սպասում .....	98
Մեծ թվերի օրենք .....	114
Բնութագրիչ ֆունկցիա .....	124
Կենտրոնական սահմանային թեորեմ .....	126
Աղյուսակ 1 .....	135
Աղյուսակ 2 .....	136
Պարասխաններ .....	138





**ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ**

**ՆԱՐԻՆԵ ԳԵՎՈՐԳԻ ԱՀԱՐՈՆՅԱՆ,  
ԵՊՐԱՔՍՅԱ ՌՈՒԲԵԿԻ ԻՍՐԱԵԼՅԱՆ**

**ՀԱՎԱՆԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ  
ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴՐԱԳԻՐՔ**

Համակարգչային ձևավորումը՝ Կ. Չալաբյանի  
Կազմի ձևավորումը՝ Ա. Պատվականյանի  
Սրբագրումը՝ Վ. Դերձյանի

Տպագրված է «Գևորգ-Հրայր» ՍՊԸ-ում:  
ք. Երևան, Գրիգոր Լուսավորչի 6

Չափսը՝ 60x84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>: Տպ. մամուլը՝ 9,625:  
Տպաքանակը՝ 500:

ԵՊՀ հրատարակչություն  
ք. Երևան, 0025, Ալեք Մանուկյան 1