ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА К ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО ГАРАНТИРОВАННОГО ПОИСКА ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА

Аветисян В.В., Степанян В.С.
Армения

Аннотация. Рассматривается и решается задача оптимального гарантированного динамического поиска целевого объекта, совершающего управляемое по скорости плоское движение. Методом принципа максимума Понтрягина построено управление, при котором обнаружение искомого объекта осуществляется за минимальное гарантированное время.

1. Постановка задачи. Пусть имеются два точечных объекта X ,Y , движения которых описываются следующими соотношениями:

$$X: \quad \dot{x}=v_X,\ \dot{v}_X=w_X,\quad x(0)=x^0,\ v(0)=0,\ \ |w_X(t)|\le W_X, \tag{1.1}$$

$$Y: \quad \dot{y}=v_Y,\quad y(0)=y^0\in D^0=\{y^0\in R^2:\ |y^0|=r_0\},\ |v_Y(t)|=V_Y, \tag{1.2}$$

где $x, v_X, w_X \in R^3$ – векторы координат, скорости, управляющего ускорения объекта X , а $y, v_Y \in R^2$ - векторы координат, управляющей скорости объекта Y, величины W_X, r_0 - заданные постоянные.

З а д а ч а. Найти управление $w_X^*(t)$, $t\in[0,T]$ (1.1), при котором объект X из начального состояния

$$x_1(0)=R_0,\ \ x_2(0)=x_3(0)=0,\ \ v_i(0)=0,\ \ i=1,2,3 \tag{1.3}$$

переходит на множество

$$S(x(T),T)=\left\{\begin{matrix} g_1(x(T),T)=x_1(T)\ge 0, \quad g_2(x(T),T)=x_2(T)=0, \\ g_3(x(T),T)=x_1(T)-Cx_3(T)+r_0+V_YT=0,\ C>0 \end{matrix}\right\} \tag{1.4}$$

за минимальное время T .

К задаче (1.1)-(1.4) сводится задача оптимального по минимальному гарантированному времени поиска [1] в случае, когда ищущий объект управляется по ускорению, а искомый объект – по скорости. В задаче гарантированного поиска условие (1.4) в конечный момент T описывает ситуацию поглощения области неопределенности $D(T)$ объекта Y областью обнаружения $G(T)$ объекта X : $D(T)\subseteq G(x(T))$, где $D(T)$ - круг с центром в точке $(0,0)$ и радиусом $r(T)=r_0+V_YT$, а $G(T)$ - круг с центром в точке ($x_1(T)\ge 0$ $x_2(T)=0$) и радиусом $l(T)=Cx_3(T)>0$, причем $x_1(T)=l(T)-r(T)$.

Задача (1.1)–(1.4) является задачей оптимального быстродействия с закрепленным левым (1.3) и подвижным правым концом (1.4). К ней применимы необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума [2]. Составим функцию Гамильтона $H = p_0+\sum_{i=1}^{3}(p_iv_i+q_iw_{Xi})$ и определим оптимальное управления w_X^* из принципа максимума

$$H^*=\max_{|w_X|\le W_X} H,\ \ |w_X^*|=W_X,\ \ w_{Xi}^*=q_iW_X\left[\sum_{i=1}^{3}q_i^2\right]^{-1/2} \tag{1.5}$$

и выпишем двухточечную краевую задачу для гамильтоновой системы вида

$$\dot{x}_i=v_i,\quad \dot{v}_i=w_{Xi}^*,\quad \dot{p}_i=-H_{x_i},\quad \dot{q}_i=-H_{v_i}, \tag{1.6}$$

$$x_1(0)=R_0,\ \ x_2(0)=x_3(0)=0,\ \ v_i(0)=0,\ \ i=1,2,3 \tag{1.7}$$

$$p_i(T)=\sum_{j=1}^{3}\mu_j g_{jx_i}(x(T),T)\,,\ \ q_i(T)=\sum_{j=1}^{3}\mu_j g_{jv_i}(x(T),T)\,, \tag{1.8}$$

$$\mu_1 g_1(x(T),T)=0\,,\ \mu_1\le 0,\ \ g_2(x(T),T)=0\,,\ \ g_3(x(T),T)=0\,, \tag{1.9}$$

$$H^*(T)=-\sum_{i=1}^{3}\mu_i g_{iT}(x(T),T)\,. \tag{1.10}$$

В условиях трансверсальности (1.8)-(1.10) функции g_j задаются из (1.4), а $\mu_j = const$ - множители Лагранжа, которые вместе с постоянной $p_0 \le 0$ одновременно не равняются нулю.

2. Решение краевой задачи принципа максимума. Найдем сопряженные переменные путем разрешения сопряженных уравнений (1.6) при условиях (1.7) с учетом (1.4):

$$q_i(t)\ =(T-t)p_i(t)\,,\quad i=1,2,3\,,\ \ 0\le t\le T\,, \tag{2.1}$$

$$p_1(t)=-\mu_1+\mu_3,\quad p_2(t)=\mu_2,\quad p_3(t)=-\mu_3 C\,,\quad 0\le t\le T\,.$$

Используя решения (2.1), получим важный для дальнейших построений вывод о постоянстве во времени оптимальных управлений w^*_{Xi}, $i=1,2,3$:

$$w^*_{X1}=\alpha(-\mu_1+\mu_3)\,,\ w^*_{X2}=\alpha\mu_2\,,\ w^*_{X3}=-C\mu_3\alpha\,, \tag{2.2}$$

$$\alpha=W_X[(-\mu_1+\mu_3)^2+\mu_2^2+C^2\mu_3^2]^{-1/2}$$

Интегрируя уравнения движения (1.6) при управлениях (2.2) с начальными условиями (1.6) получим

$$x_1(t)=w^*_{X1}t^2/2+R_0,\quad x_2(t)=w^*_{X2}t^2/2,\quad x_3(t)=w^*_{X3}t^2/2\ , \tag{2.3}$$

$$v_i(t)=w^*_{Xi}t,\ \ i=1,2,3\,.$$

Подставив (2.3) в условия (1.9), (1.10), получим систему уравнений относительно неизвестных параметров $T, p_0, \mu_i,\ i=1,2,3$:

$$\mu_1(x_1(T))=\mu_1(\,w^*_{X1}T^2/2+R_0)=0\,, \tag{2.4}$$

$$x_2(T)=w^*_{X2}T^2/2=0\,, \tag{2.5}$$

$$x_1(T)-Cx_3(T)+r_0+V_YT=(w^*_{X1}-Cw^*_{X3})T^2/2+V_YT+R_0+r_0=0 \tag{2.6}$$

$$p_0+(-\mu_1+\mu_3)w^*_{X1}T+\mu_2 w^*_{X2}T-\mu_3 C w^*_{X3}T=-\mu_3 V_Y\,. \tag{2.7}$$

Так как, $T>0$, то из (2.5)((2.1)) получаем $w^*_{X2}=0$ ($\mu_2=0$), т.е. движение по координате x_2 отсутствует. Таким образом, имеем систему из трех нелинейных уравнений (2.4), (2.6), (2.7) относительно четырех неизвестных p_0, μ_1, μ_3, T. Из постановки задачи следует, что $\mu_3<0$, так как в противном случае круг обнаружения не может расширяться и задача теряет смысла. Согласно методу принципа максимума, рассмотрению подлежат случаи $p_0=0$ и $p_0=-1$. Будем рассматривать второй случай, так как, при $p_0=0$ приходим к противоречиям и для системы (2.4), (2.6), (2.7) будем исследовать следующие варианты удовлетворения условия дополняющей нежесткости (2.4): А) $\mu_1=0$, $\mu_3<0$ В) $\mu_1<0$, $\mu_3<0$.

А) Из (2.2) имеем

$$w_{X1}^{*} = -W_X \,/ \sqrt{1+C^2},\ \ w_{X3}^{*} = -Cw_{X1}^{*} = CW_X \,/ \sqrt{1+C^2}\ . \tag{2.8}$$

При управлениях (2.8) запишем систему (2.4), (2.6), (2.7) в виде:

$$-W_X T^2 / (2\sqrt{1+C^2}\,) + R_0 \ge 0\,, \tag{2.9}$$

$$-W_X T^2 \sqrt{1+C^2} \,/\, 2 + V_Y T + R_0 + r_0 = 0\,, \tag{2.10}$$

$$\mu_3 (V_Y - W_X T \sqrt{1+C^2}\,) = 1\,. \tag{2.11}$$

Для заданных параметров C, W_X, V_Y, r_0 выясним при каких значениях $R_0 > 0$ система (2.9)-(2.11) разрешима относительно $T > 0$. В случае существования множества положительных корней T , оптимальным будет наименьший из них. Сначала рассмотрим уравнение (2.10). Оно имеет один положительный корень

$$T_1^{\min} = \left(V_Y + \sqrt{\left(V_Y\right)^2 + 2W_X\,(R_0 + r_0)\sqrt{1+C^2}} \right)\left(W_X \sqrt{1+C^2} \right)^{-1}, \tag{2.12}$$

который должен удовлетворять равенству (2.11) при некотором $\mu_3 < 0$ и, следовательно, следующему ограничению

$$T_1^{\min} = \left(1 - \mu_3 V_Y\right)\left(-\mu_3 W_X \sqrt{1+C^2}\right)^{-1} > V_Y \left(W_X \sqrt{1+C^2}\right)^{-1}, \tag{2.13}$$

вытекающего из (2.11), а также неравенству (2.9), т.е. ограничению

$$T_1^{\min} \le \left(2R_0 W_X^{-1} \sqrt{1+C^2} \right)^{1/2}. \tag{2.14}$$

Из (2.13), (2.14) следует, что для существования решения $T_1^{\min}$ системы (2.9)-(2.11), необходимо и достаточно, чтобы относительно $R_0 > 0$ было разрешимо неравенство

$$V_Y \left(W_X \sqrt{1+C^2} \right)^{-1} < \sqrt{2R_0 W_X^{-1} \sqrt{1+C^2}}\ . \tag{2.15}$$

Разрешая неравенство (2.15), найдем

$$R_0 > \ R_0^{*} = V_Y{}^2 \left(2W_X\,(1+C^2)\sqrt{1+C^2} \right)^{-1}. \tag{2.16}$$

При условии (2.16) и с учетом (2.12), рассмотрим неравенство (2.14), которое можно преобразовать к виду

$$\sqrt{V_Y^4 + 2W_X V_Y^2 \left(R_0 + r_0\right)\sqrt{1+C^2}} \le W_X \left(R_0 C^2 - r_0 \right)\sqrt{1+C^2} - V_Y^2\,.$$

Это неравенство имеет положительную правую часть при значениях

$$R_0 > R_0^{**} = \left(W_X r_0 \sqrt{1+C^2} + V_Y^2 \right)\left(W_X C^2 \sqrt{1+C^2} \right)^{-1} \tag{2.17}$$

и после несложных преобразований приводится к виду

$$R_0^2 W_X\,(1+2C^2)^2 - 2R_0 [W_X\,(1+2C^2) r_0 + 4V_Y^2 \sqrt{1+C^2}\,] + W_X r_0^2 \ge 0\,. \tag{2.18}$$

Решение (2.18) следующее:

$R_0 \in (-\infty, R_0^-] \cup [R_0^+, \infty)$,

где $R_0{}^-, R_0{}^+$ определяются через известные параметры $W_X V_Y, r_0, C$:

$$R_0^{\pm} = \left(W_X C^2 r_0 + V_Y^2 \sqrt{1+C^2} \pm \sqrt{2 W_X r_0 V_Y^2 C^2 \sqrt{1+C^2} + V_Y^4 (1+C^2)} \right) W_X^{-1} C^{-4}.$$

Отметим, что для любого $r_0 \geq 0$ между R_0^* (2.16), R_0^{**} (2.17), R_0^-, R_0^+ имеют место следующие соотношения:

$$R_0^- < R_0^{**} < R_0^+ , \quad R_0^* < R_0^{**}. \tag{2.19}$$

Из (2.19) следует, что при $R_0 \in [R_0^+, \infty)$ оптимальные управления и время определяются формулами (2.8) и (2.12), а соответствующий параметр $\mu_3 = \left[V_Y - W_X T_1^{\min} \sqrt{1+C^2} \right]^{-1}$ (2.11), в силу (2.13), отрицательный.

В) Пусть $\mu_1 < 0$, $\mu_3 < 0$. Из (2.4) получим $x_1(T) = 0$, а из (2.3) при $t = T$ -

$$w_{X1}^* = -2 R_0 T^{-2} , \quad w_{X3}^* = 2 x_3(T) T^{-2} \tag{2.20}$$

где $x_3(T)$ определяется из (2.6) следующим образом:

$$x_3(T) = (r_0 + V_Y T) C^{-1} \tag{2.21}$$

Используя (2.20), (2.21), из условия $\left| w_X^* \right| = W_X$ (1.5), для заданных параметров $C, W_X, V_Y, r_0 > 0$ получим уравнение относительно искомого оптимального T:

$$-T^4 + 4 V_Y^2 C^{-2} W_X^{-2} T^2 + 8 r_0 V_Y C^{-2} W_X^{-2} T + 4 W_X^{-2} (R_0^2 + C^{-2} r_0^2) = 0 , \quad R_0 > r_0 . \tag{2.22}$$

Далее, из (2.2), (2.20), (2.21) получим следующее соотношения для определения множителелей μ_1 и μ_3:

$$w_{X1}^* w_{X3}^{*-1} = (\mu_1 - \mu_3) \mu_3^{-1} C^{-1} , \qquad w_{X1}^* w_{X3}^{*-1} = -C R_0 (r_0 + V_Y T)^{-1} , \tag{2.23}$$

Откуда при при $T = T_2^{\min}\left(R_0\right)$ следует, что

$$(r_0 + V_Y T_2^{\min}\left(R_0\right))(\mu_1 - \mu_3) + C^2 R_0 \mu_3 = 0 , \tag{2.24}$$

Условие трансверсальности (2.7) при управлениях (2.2) и $T = T_2^{\min}\left(R_0\right)$ примет вид

$$W_X T_2^{\min}\left(R_0\right) \sqrt{(-\mu_1 + \mu_3)^2 + C^2 \mu_3^2} = 1 - \mu_3 V_Y . \tag{2.25}$$

Решение системы (2.24), (2.25) относительно параметров $\mu_1 < 0$ и $\mu_3 < 0$ следующее:

$$\mu_1 = A_\mu \mu_3 , \qquad \mu_3 = -V_Y B^{-1} - \sqrt{\left(V_Y B^{-1}\right)^2 + B^{-1}} , \tag{2.26}$$

$$B = \left[W_X T_2^{\min}\left(R_0\right) \right]^2 \left[(A_\mu - 1)^2 + C^2 \right] - V_Y^2 , \qquad A_\mu = \left(r_0 + V_Y T_2^{\min}\left(R_0\right) - C^2 R_0 \right) \left(r_0 + V_Y T_2^{\min}\left(R_0\right) \right)^{-1}$$

Иследование знаков множителей μ_1, μ_3 (2.26) по отношению параметра R_0 показывает, что если $R_0 \in \left(r_0, R_0^+\right)$, то $\mu_1 < 0$, $\mu_3 < 0$; если $R_0 = R_0^+$, то $\mu_1 = 0$, $\mu_3 < 0$; если $R_0 \in \left(R_0^+, \infty\right)$, то $\mu_1 > 0$, $\mu_3 < 0$. Следовательно, при значениях $R_0 \in \left[R_0^+, \infty\right)$ приходим к противоречию по отношению знака множителя μ_1.

Таким образом, для заданных параметров $C, W_X, V_Y, r_0 > 0$ случай B) реализуем только при $R_0 \in \left(r_0, R_0^+\right)$. Сначало находится наименьший положительный корень $T = T_2^{\min}\left(R_0\right)$ уравнения (2.22), затем из (2.24), (2.25) определяются множители $\mu_1\left(T_2^{\min}\left(R_0\right)\right) < 0$, $\mu_3\left(T_2^{\min}\left(R_0\right)\right) < 0$ (2.26) и по формулам (2.2) вычисляются оптимальные управляющие ускорения w_{X1}^* и w_{X3}^*.

Подытожив результаты, полученные в рассмотренных в случаях A) и B), приходим к следующей схеме определения минимального гарантированного времени поиска и соответствующих оптимальных гарантирующих управлений:

1) при $r_0 < R_0 \le R_0^+$, минимальное гарантированное время определяется как наименьший положительный корень $T^* = T_2^{\min}\left(R_0\right)$ уравнения (2.22), а соответствующие оптимальные гарантирующие управления w_{X1}^*, w_{X3}^* вычисляются по формулам (2.2), где параметры $\mu_1(T_2^{\min}\left(R_0\right) < 0$, $\mu_3(T_2^{\min}\left(R_0\right) < 0$ находятся с помощью (2.26);

2) при $R_0^+ \le R_0 < \infty$, минимальное гарантированное время обнаружения $T^* = T_2^{\min}\left(R_0\right)$ определяется формулой (2.12), а соответствующие оптимальные гарантирующие управления w_{X1}^*, w_{X3}^* вычисляются по формулам (2.8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян В.В., Степанян В.С. Оптимальный по минимальному гарантированному времени поиск подвижного объекта на плоскости // Изв. НАН РА. Механика. 2015. Т. 60. № 1. С. 68-80.
2. Понтрягин Л.С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука. 1988. 344с.

Сведения об авторах:

Аветисян Ваган Вардгесович – д.ф.-м.н., профессор факультета математики и механики ЕГУ, тел: (+374 94) 44 95 60, E–mail: vanavet@yahoo.com

Степанян Ваан Сейранович – аспирант факультета математики и механики ЕГУ, тел: (+374 98) 900846, E–mail:nop144d@gmail.com

Application of Pontryagin's Maxim Principle to the Problem of Optimal Guaranteed Search of Moving Object

Abstract. The paper analyzes the problem of optimal guaranteed dynamic search of target object executing a plain movement at a controlled speed. By the method of Pontryagin's maxim principle a control is built, with teh help of which the identification of the searched object is realized in minimal guaranteed time.