ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
YEREVAN STATE UNIVERSITY

СТУДЕНЧЕСКОЕ НАУЧНОЕ ОБЩЕСТВО
STUDENT SCIENTIFIC SOCIETY

ISSN 1829-4367

СБОРНИК НАУЧНЫХ СТАТЕЙ СНО ЕГУ

COLLECTION OF SCIENTIFIC ARTICLES OF YSU SSS

1.1 (24)

Естественные и физико-математические науки
(География и геология, информатика и прикладная математика, биология, математика и механика, химия, фармацевтика, физика)

Natural and Physical-Mathematical Sciences
(Geography and Geology, Informatics and Applied Mathematics, Biology, Mathematics and Mechanics, Chemistry, Pharmacy, Physics)

ЕРЕВАН - YEREVAN
ИЗДАТЕЛЬСТВО ЕГУ - YSU PRESS
2018

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ
ՈՒՍԱՆՈՂԱԿԱՆ ԳԻՏԱԿԱՆ
ԸՆԿԵՐՈՒԹՅՈՒՆ

ISSN 1829-4367

ԵՊՀ ՈՒԳԸ ԳԻՏԱԿԱՆ ՀՈԴՎԱԾՆԵՐԻ ԺՈՂՈՎԱԾՈՒ

1.1 (24)

Բնական և ֆիզիկամաթեմատիկական գիտություններ
(աշխարհագրություն և երկրաբանություն, ինֆորմատիկա և կիրառական մաթեմատիկա, կենսաբանություն, մաթեմատիկա և մեխանիկա, քիմիա, ֆարմացիա, ֆիզիկա)

ԵՐԵՎԱՆ
ԵՊՀ ՀՐԱՏԱՐԱԿՉՈՒԹՅՈՒՆ
2018

Հրատարակվում է ԵՊՀ գիտական խորհրդի որոշմամբ
Издается по решению Ученого совета ЕГУ
Published by the resolution of the Academic Council of YSU

Խմբագրական խորհուրդ՝

Редакционная коллегия:

Editorial Board

Հրատարակիչ՝ ԵՊՀ հրատարակչություն
Հասցե՝ ՀՀ, ք. Երևան, Ալ. Մանուկյան 1, (+374 10) 55 55 70, publishing@ysu.am

Հրատարակության նախապատրաստող ստորաբաժանում՝ ԵՊՀ ուսանողական գիտական ընկերություն
Հասցե՝ ՀՀ, ք. Երևան, Ալ. Մանուկյան 1, (+374 60) 71 01 94,
Էլ. փոստ՝ sss@ysu.am
ԵՊՀ ՈՒԳԸ հրատարակումների կայք՝ www.ssspub.ysu.am.

Պետրոսյան Գարիկ
ԵՊՀ, Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետ,
մագիստրատուրայի ուսանող
Գիտական ղեկավար՝ ֆ.մ.գ.դ., պրոֆ. Ա. Չուբարյան
Էլ. փոստ: garik.petrosyan.1@gmail.com

ԱՐՏԱԾՈՒՄՆԵՐԻ ԲԱՐԴՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ ՖՐԵԳԵԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐՈՒՄ

Ապացույցների ավտոմատացման մշակումների պատճառով տարբեր տրամաբանական համակարգերում առաջացած արտածումների բարդության բնութագրիչների հետազոտությունները հատկապես արդիական են արհեստական բանականության հետ կապված մշակումներում, ինչպես նաև գաղտնագրաբանության տարբեր խնդիրների համար: Դժվար ապացուցվող լինելուն հավակնող այս կամ այն կոմբինատոր խնդիրներին վերաբերող պնդումների ապացուցման ընթացքում դատողություններն ունեն կոնստրուկտիվ (ինտուիցիոնիստական) բնույթ, իսկ երբեմն էլ սահմանափակվում են մինիմալ տրամաբանության շրջանակներով: Այս հանգամանքների, ինչպես նաև և դասական ու ոչ դասական տրամաբանությունների միջև մի շարք էական տարբերությունների պատճառով ոչ պակաս արդիական են արտածումների բարդությունների հետազոտությունները նաև ոչ դասական տրամաբանություններում:

Սույն աշխատանքում (ըստ որոշակի հատկությունների) համեմատվում են դասական, ինտուիցիոնիստական և մինիմալ տրամաբանությունների համար Ֆրեգեի համակարգերը: Ապացուցված է, որ դասական տրամաբանության համար որոշակի հատկությունները՝ միատոնության բացակայությունը, էապես հավասար նույնաբանությունների արտածումների բարդությունների հնարավոր էական տարբերությունը տեղի են ունենում նաև ինտուիցիոնիստական և մինիմալ տրամաբանություններում, սակայն A և B նույնաբանությունների համար A ˅ B տիպի բանաձևերի դասական տրամաբանությունում ապացուցված որոշ արդյունքներ ինտուիցիոնիստական և մինիմալ տրամաբանություններում տեղի չեն ունենում:

Համակարգերի սահմանումները: Մենք կօգտագործենք Բուլյան խորանարդի հայտնի սահմանումը E^n: Դասական տրամաբանության **Ֆրեգեի $\mathcal{F}$ համակարգերում** օգտագործվում են հաշվելի թվով տրամաբանական փոփոխականներ և որոշակի տրամաբանական գործողությունների վերջավոր, լրիվ համակարգ: Բանաձևերը սահմանվում են ընդունված եղանակով՝ տրամաբանական փոփոխականներից, տրամաբանական գործողություններից և փակագծերից: Արտածման կանոնները տրվում են հետևյալ սխեմայով՝ $\frac{A_1, A_2 \dots, A_n}{B}$, որտեղ $A_1, A_2 \dots A_n$-ը և B-ն բանաձևեր են (առանց նախադրյալներ՝ n=0 դեպքում, արտածման կանոնները հենասույթների սխեմաներ են): Ֆրեգեի համակարգերը անհակասելի են և լրիվ:

CL-ով նշանակենք դասական տրամաբանության Ֆրեգեի հետևյալ համակարգը՝ A, B և C յուրաքանչյուր բանաձևերի համար ասույթների սխեմաներն են.

1) $A \supset (B \supset A)$
2) $(A \supset B) \supset ((A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C))$
3) $A \supset (B \supset A \wedge B)$
4) $A \wedge B \supset A$; $A \wedge B \supset B$
5) $A \supset A \vee B$; $B \supset A \vee B$
6) $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$
7) $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$
8) $\neg\neg A \supset A$

Արտածման կանոնը հանրահայտ modus ponens –ն է՝ $\frac{A, A\supset B}{B}$ (m.p.):

IL ինտուիցիոնիստական տրամաբանության համակարգը ստացվում է $\neg\neg A \supset A$ հենասույթը $\neg A \supset (A \supset B)$ հենասույթով փոխարինելով:

ML մինիմալ տրամաբանության համակարգը պարունակում է միայն 1-7 հենասույթները: **ML**–ում ներմուծվում է $\perp$ հաստատունը (նույնաբար սխալ) և $\neg A$-ի փոխարեն սովորաբար գրվում է $A \supset \perp$:

Դիցուք, Φ-ն որևէ արտածման համակարգ է՝ իր հենասույթներով և արտածման կանոններով: Տողերի վերջավոր հաջորդականությունը, որտեղ ցանկացած տող կա՛մ հենասույթ է, կա՛մ Φ-ի որոշակի արտածման կանոնով ստացվել է նախորդ տողերի վերջավոր բազմությունից, Φ համակարգում (Φ-արտածում) կանվանենք վերջին տողում գտնվող բանաձևի արտածում: Ինչպես ընդունված է, A բանաձևի արտածման փաստը Φ-ում կնաշանակենք $\vdash_{\Phi} A$:

Հետևելով [1]-ին նշենք, որ A բանաձևը կոչվում է **ինտուիցիոնիստական նույնաբանություն՝** I-նույնաբանություն (**մինիմալ նույնաբանություն՝** M-նույնաբանություն), եթե $\vdash_{\mathbf{IL}} A$ ($\vdash_{\mathrm{ML}} A$) :

Վերոհիշյալ երեք համակարգերում բանաձևերի արտածելիության միջև հայտնի է փոխհարաբերությունը [1]՝

Ցանկացած A բանաձևի համար A-ն արտածվում է CL-ում ($\vdash_{CL} A$) միայն այն դեպքում, երբ $\neg\neg A$-ն արտածվում է IL-ում ($\vdash_{IL} \neg\neg A$), ինչը իր հերթին համարժեք է $(A \supset \perp) \supset \perp$-ի ML-ում արտածվելուն ($\vdash_{ML} (A \supset \perp) \supset \perp$):

Արտածման բարդության բնութագրիչներ

$|\varphi|$ ով կնշանակենք φ բանաձևի երկարությունը՝ որպես նրանում բոլոր տրամաբանական գործողությունների մուտքերի քանակ: Ակնհայտ է, որ բանաձևի ընդհանուր երկարությունը, որը ներառում է բոլոր փոփոխականների մուտքերը և տրամաբանական գործողությունները, սահմանափակված է $|\varphi|$-ից կախված գծային գործառույթով:

Արտածումների բարդության տեսությունում դիտարկվում են արտածման բարդության հետևյալ հիմնական բնութագրիչները:

Սահամնում 1. Φ-արտածման երկարությունը (**l-բարդություն**) հավասար է արտածման բոլոր տողերի երկարությունների գումարին, որտեղ կրկնվող տողերի չափերը հաշվարկվում են մեկ անգամ: Φ-արտածման քայլերի քանակը (**t-բարդություն**) հենասույթների և արտածման կանոնի կիրառումների քանակն է:

Սահամնում 2. Դիցուք, Φ-ն արտածման համակարգ է և φ-ն այդ համակարգում արտածվող բանաձև է: $t_{\Phi}^{\varphi}(l_{\Phi}^{\varphi})$-ով կնշանակենք Φ համակարգում φ -ի բոլոր արտածումների t-բարդությունների (l-բարդությունների) **մինիմալ արժեքը**:

Սահամնում 3. Երկու արտածման համակարգեր կոչվում են t-բազմանդամորեն (l-բազմանդամորեն) համարժեք, եթե համակարգերից մեկում տրված յուրաքանչյուր արտածում կարող է ձևափոխվել նույն բանաձևի արտածմանը մյուս համակարգում ոչ ավելին, քան քայլերի քանակի (երկարության) բազմանդամային աճի:

Հետևելով Մինցին [2] և Սայադյանին ու Չուբարյանին [3], տանք հետևյալ սահմանումը:

Սահամնում 4. Համակարգը, որում արտածվում են միայն այն բանաձևերը, որոնք արտածվում են IL-ում(ML-ում) և որը բազմանդամորեն համարժեք է IL-ին (ML-ին), տվյալ տրամաբանության համար կոչվում է Ֆրեգեյի համակրգ FIL (FML):

Հիմնական արդյունքներ

Սահմանում 1. Էականորեն հավասար նույնաբանությունների արտածման բարդությունների համեմատումը FIL-ում և FML-ում:

Հետևելով ընդունված սահամնումներին, փոփոխականները և դրանց ժխտումները կանվանենք լիտերալներ: K կոնյունկտն իրենից ներկայացնում է լիտերալների բազմություն (կոնյունկտը չի կարող միաժամանակ պարունակել փոփոխականն ու այդ փոփոխականի ժխտումը):

Հետևելով [6]-ին, տանք հետևյալ սահմանումները՝

Սահմանում 1.1 Ասույթային հաշվի յուրաքանչյուր ψ բանաձևի համար հետևյալ տարրական ձևափոխումներից յուրաքանչյուրը կանվանենք **փոխարինման կանոն՝**

$$\begin{gathered}0 \wedge \psi = 0, \psi \wedge 0 = 0, 1 \wedge \psi = \psi, \psi \wedge 1 = \psi,\\ 0 \vee \psi = \psi, \psi \vee 0 = \psi, 1 \vee \psi = 1, \psi \vee 1 = 1,\\ 0 \supset \psi = 1, \psi \supset 0 = \neg\psi, 1 \supset \psi = \psi, \psi \supset 1 = 1,\\ \neg 0 = 1, \neg 1 = 0, \neg\neg\psi = \psi.\end{gathered}$$

Փոխարինման կանոնի միջոցով բանաձևերում փոխարինման կանոնի ձախ մասի տեսքն ունեցող ցանկացած ենթաբանաձև կարող է փոխարինվել աջ մասի տեսքն ունեցող համապատասխան բանաձևով:

Դիցուք, φ -ն ասույթային հաշվի բանաձև է, իսկ $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ -ն այդ բանաձևի բոլոր փոփոխականների բազմությունը: $P' = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_m}\}$-ով $(1 \leq m \leq n)$ նշանակենք P–ի որևէ ենթաբազմություն:

Սահմանում 1.2 Տրված $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l\} \subset E^n$-ի համար $K^\sigma = \{p_{i_1}^{\sigma_1}, p_{i_2}^{\sigma_2}, \ldots, p_{i_m}^{\sigma_m}\}$ կոնյունկտը կանվանենք φ**-1-որոշիչ** (φ**-0-որոշիչ**), եթե ամեն p_{i_j}-ին $\sigma_j (1 \le j \le m)$ վերագրելուց հետո, կիրառելով փոխարինման կանոնները, կստանանք φ-ի արժեքը (1 կամ 0)՝ անկախ մնացած փոփոխականների արժեքներից:

φ-1-որոշիչ կոնյունկտը և φ-0-որոշիչ կոնյունկտը կանվանենք φ-որոշիչ կամ որոշիչ φ-ի համար:

Սահմանում 1.3. φ և ψ դասական նույնաբանություններն **էականորեն հավասար են**, եթե յուրաքանչյուր φ-որոշիչ կոնյունկտ նաև ψ-որոշիչ է և հակառակը:

[11]-ում ապացուցված է, որ էականորեն հավասար նույնաբանությունների արտածման բարդությունները դասական տրամաբանության Ֆրեգեի $\mathcal{F}$ համակարգերում կարող են էապես տարբերվել:

FIL-ում և FML-ում էականորեն հավասար նույնաբանությունների արտածման բարդությունների համար գոյություն ունի հետևյալ թեորեմը՝

Թեորեմ 1. Գոյություն ունեն φ_n^I (φ_n^M) և ψ_n^I (ψ_n^M) I-նույնաբանություններ (M-նույնաբանություններ), որոնք էականորեն հավասար են, $|\varphi_n^I| = |\psi_n^I| + c$ ($|\varphi_n^M| = |\psi_n^M| + c$), սակայն

$t_{FIL}^{\varphi_n^I} \le c_1$, $t_{FIL}^{\psi_n^I} \ge c_2|\psi_n^I|$ ($t_{FML}^{\varphi_n^M} \le c_1$, $t_{FML}^{\psi_n^M} \ge c_2|\psi_n^M|$)

$l_{FIL}^{\varphi_n^I} \le c_3|\varphi_n^I|$, $l_{FIL}^{\psi_n^I} \ge c_4|\psi_n^I|^2$ ($l_{FML}^{\varphi_n^M} \le c_3|\varphi_n^M|$, $l_{FML}^{\psi_n^M} \ge c_4|\psi_n^M|^2$), որտեղ c, c_1, c_2, c_3, c_4-ը դրական հաստատուններ են:

Ապացույց: Դիտարկենք FIL- համար հետևյալ բանաձևերը՝

$\varphi_n^I = \neg(p \vee \neg p) \supset \overbrace{\neg\neg\ldots\neg}^{2^n}(p \vee \neg p)$, $\psi_n^I = \overbrace{\neg\neg\ldots\neg}^{2^n}(p \vee \neg p)$, իսկ FML-ի համար՝

$$\varphi_n^M = ((\ldots((p \vee (p \supset \bot))\overbrace{\supset\bot)\supset\bot)\ldots\supset\bot)}^{2^n} \supset (p \supset p), \psi_n^M = ((\ldots((p \vee (p \supset \bot))\overbrace{\supset\bot)\supset\bot)\ldots\supset\bot)}^{2^n}$$

բանաձևերը:

[7] ում ցույց է տրված, որ FCL-ում ψ_n^I համար տեղի ունեն հետևյալ ստորին գնահատականները՝

$t_{FCL}^{\psi_n^I} \ge c_2|\psi_n^I|$ և $l_{FCL}^{\psi_n^I} \ge c_4|\psi_n^I|^2$, հետևաբար, դրանք տեղի ունեն նաև FIL-ում և FML-ում ψ_n^M բանաձևերի համար:

Մյուս կողմից φ_n^I բանաձևը արտածվում է FIL-ում հաստատուն քայլերով: Նախ արտածում ենք $\neg\neg(p \vee \neg p))$ նույնաբանությունը, ապա օգտվում ենք $\neg A \supset (A \supset B)$ հենասույթից: FML-ում ևս արտածում ենք $p \supset p$ նույնաբանությունը, հետո $(p \supset p) \supset \varphi_n^M$ հենասույթից արտածվում է φ_n^M-ը: Այս արտածումների համար առկա են հետևյալ պայմանները՝

$t_{FIL}^{\varphi_n^I} \le c_1$, ($t_{FML}^{\varphi_n^M} \le c_1$) և $l_{FIL}^{\varphi_n^I} \le c_3|\varphi_n^I|$, $l_{FML}^{\varphi_n^M} \le c_3|\varphi_n^M|$, ինչը և ավարտում է ապացույցը:

1.2 **FIL և FML համակարգերի ոչ միաոտոնություն**

Սահմանում 2.1 Նույնաբանությունը (I-նույնաբանություն, M-նույնաբանություն) կանվանենք **մինիմալ,** եթե այն չի ստացվում տեղադրությամբ ավելի կարճ նույնաբանությունից (I-նույնաբանությունից, M-նույնաբանությունից):

Նշանակենք $S(\varphi)$-ով բոլոր այն բանաձևերի բազմությունը, որոնք ստացվում են φ-ից նրա փոփոխականները որևէ բանաձևերով փոխարինելու արդյունքում:

Սահմանում 2.2. Φ համակարգը կոչվում է t-միատոն (l-միատոն), եթե նրա ցանկացած φ նույնաբանության և $\psi \in S(\varphi)$-ի համար $t_\Phi^\varphi \leq t_\Phi^\psi$ ($l_\Phi^\varphi \leq l_\Phi^\psi$):

[10]-ում ցույց է տրված, որ FCL-ը ո՛չ t-միատոն է, ո՛չ l-միատոն:

Թեորեմ 2.2. FIL և FML համակարգերը ո՛չ t-միատոն են, ո՛չ l-միատոն:

Ապացույց: Դիտարկենք հետևյալ բանաձևերը $q \vee \psi_n^I$ ($q \vee \psi_n^M$), որտեղ $\psi_n^I = \overbrace{\neg\neg\ldots\neg}^{2^n}(p \vee \neg p)$ ($\psi_n^M = ((\ldots(((p \vee (p \supset \bot))\overbrace{\supset\bot)\supset\bot)\ldots\supset\bot)}^{2^n}))$: Նկատենք, որ $(p \supset p) \vee \psi_n^I$ ($(p \supset p) \vee \psi_n^M$) բանաձևերը ստացվում են նրանցից տեղադրման միջոցով: [10]-ում ցույց է տրված, որ $q \vee \psi_n^I$-ն ունի ստորին գծային t-բարդություն և ստորին քառակուսային l-բարդություն FCL-ում: Բնական է, որ նույնը տեղի ունի նաև FIL-ում և FML-ում: $(p \supset p) \vee \psi_n^I$ ($(p \supset p) \vee \psi_n^M$) բանաձևեր կարելի է արտածել FIL-ում (FML-ում) հաստատուն t-բարդությամբ և գծային l-բարդությամբ: Դրա համար, օգտվելով $A \supset A \vee B$, հենասույթի սխեմայից, արտածենք $(p \supset p) \supset \left((p \supset p) \vee \psi_n^I\right)$ ($(p \supset p) \supset ((p \supset p) \vee \psi_n^M))$ բանաձևը, ապա $(p \supset p)$-ն, որտեղից կարտածվի $(p \supset p) \vee \psi_n^I$ ($(p \supset p) \vee \psi_n^M$):

2.3 **FCL և FIL ու FML համակարգերի էական տարբերությունները**:

Ա. FCL-ում հայտնի են յուրաքանչյուր նույնաբանության արտածման բարդությունների վերին ցուցչային և ստորին ոչ ավելին, քան քառակուսային գնահատականները, հետևաբար, խիստ արդիական են կա՛մ վերին գնահատականի նվազեցմանը, կա՛մ ստորինի բարձրացմանն ուղղված հետազոտությունները, որոնց շրջանակներում ստացվել են որոշակի արդյունքներ [8, 9]-ում:

FIL-ում (FML-ում) յուրաքանչյուր I-նույնաբանության (M-նույնաբանության) արտածման բարդությունների վերին ցուցչային գնահատականների արկայությամբ [4]-ում ապացուցված է, որ՝

Պնդում Ա. Գոյություն ունեն φ_n բանաձևեր որոնց համար $l_{\mathrm{FIL}}^{\varphi_n} \geq 2^{|\varphi_n|}$, $t_{\mathrm{FIL}}^{\varphi_n} \geq 2^{|\varphi_n|}$ ($l_{\mathrm{FML}}^{\varphi_n} \geq 2^{|\varphi_n|}$, $t_{\mathrm{FML}}^{\varphi_n} \geq 2^{|\varphi_n|}$):

Բ. [9]-ում ապացուցված է, որ գոյություն ունեն այնպիսի A_n և B_n նույնաբանություններ, որ $A_n \vee B_n$-ի արտածման t-բարդությունները և l-բարդությունները FCL-ում էապես ավելի փոքր են, քան A_n և B_n բանաձևերիններըը:

[5]-ում ապացուցված է հետևյալ պնդումը:

Պնդում Բ. Եթե FIL-ում (FML-ում) կառուցված արտածման մեջ ոչ մի բանաձև չի կրկնվում, ապա յուրաքանչյուր $A \vee B$ բանաձևի այդպիսի արտածումը պարունակում է կա՛մ A-ի կա՛մ B-ի արտածումը:

Այս պնդումից ակնհայտորեն բխում է հետևյալը՝

Պնդում 2.3.1 Յուրաքանչյուր A և B l-նույնաբանությունների (M-նույնաբանությունների) համար $A \vee B$-ի արտածման t և l-բարդությունները FIL-ում (FML-ում) չեն կարող լինել ավելի փոքր, քան A և B բանաձևերի t-բարդությունների և, համապատասխանաբար, FIL-ում (FML-ում) l-բարդությունների մինիմալ արժեքներից:

Ապացույցը հետևում է այն փաստից, որ t և l-բարդությունները հասանելի են չկրկնվող բանաձևերով արտածումներում:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

[1] **Клини** С. К., Введение в метаматематику, Издательство иностранной литературы, Москва, 1957.

[2] Mints G., Kozhevnikow A., Intuitionistic Frege Systems are Polinomially Equivalent, Zapiski nauchnikh seminarov POMI, vol. 316, 2004, pp. 129-146.

[3] **Sayadyan S., Chubaryan A.**, On Polynomially Equivalence of Minimal Frege Systems, Mathematical Problems of Computer Sciences, Yerevan, 27, 2007, pp. 32-37.

[4] **Goerdt A.**, Complexity of the Intuitionistic Sequent Calculis, Technishe Universitat Chemnitz, CSR-0202 Yanuary, 2002, (13 pages), preprint.

[5] **Nurijanyan A.**, On the Some Condition of Proofs in Intuitionistic and Minimal propositional calculi, Sbornik ‘Molodoy nauchnij sotrudnic’, YGU, Yerevan, vol. 2 (34), 1981, pp. 42-50.

[6] **Chubaryan An., Chubaryan Ar.**, ‘A New Conception of Equality of Tautologies’, L&PS, vol. V, № 1, Triest, Italy, 2007, pp. 3-8.

[7] **Krajicek J.**, On the Number of Steps in Proofs, Annals of Pure and Applied Logic, 41, 1989, pp. 153-178.

[8] **Chubaryan A., Petrosyan G.**, On Some Properties of Several Proof Systems for 2-Valued and 3-Valued Propositional Logic, Fundamentalis Scientiam, Vol. 8 (8), Spain, 2017, pp. 70-73.

[9] **Chubaryan A. A., Petrosyan G. W.**, Some Notes on Proof Complexities in Frege Systems, Sciences of Europe, vol. 1, #12 (12), Physics and Mathematics, 2017, pp. 31-34.

[10] **Chubaryan A., Petrosyan G.**, Frege Systems Are No Monotonous, Evolution, Естественные науки, Выпуск 3, 2016, сс. 12-14.

[11] **Chubaryan A., Petrosyan G.**, The relations between the proof complexities of strongly equal classical tautologies in Frege systems, Российско-китайский научный журнал «Содружество» № I (1), 2016 / ФИЗ-МАТ НАУКИ, сс. 78-80.

Պետրոսյան Գարիկ

ԱՐՏԱԾՈՒՄՆԵՐԻ ԲԱՐԴՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ ՖՐԵԳԵԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐՈՒՄ

Բանալի բառեր՝ Ֆրեգեի համակարգեր, արտածման բարդության բնութագրիչներ, էականորեն հավասար նույնաբանություններ, արտածման համակարգի միատոնություն:

Սույն հոդվածում արտածումների բարդությունների տեսանկյունից հետազոտվել են Ֆրեգեի՝ դասական, ինտուիցիոնիստական և մինիմալ տրամաբանությունների համակարգերի որոշակի հատկությունների նմանությունները և տարբերությունները:

Петросян Гарик

ИССЛЕДОВАНИЕ СЛОЖНОСТЕЙ ВЫВОДОВ В СИСТЕМАХ ФРЕГЕ

Ключевые слова: системы Фреге, характеристики сложностей выводов, существенно равные тавтологии, монотоность системы выводов.

В данной статье исследованы с точки зрения сложностей выводов некоторые общие свойства и различия между системами Фреге – классической логикой, интуиционистской и минимальной.

Petrosyan Garik

INVESTIGATIONS OF PROOF COMPLEXITIES IN FREGE SYSTEMS

Key words: Frege systems, proof complexity characteristics, essential equal tautologies, monotonous of proof systems.

In this paper we have investigated some common properties and differences between proof complexities in the Frege systems of classical, intuitionistic and minimal logics.