ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Բնական գիտություններ 2,2000 Естественные науки

УДК 515.1

Н.Э. МИРЗАХАНЯН

О НЕКОТОРЫХ ПРИЗНАКАХ ПСЕВДОРАДИАЛЬНОСТИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

В статье рассматривается вопрос псевдорадиальности топологически однородных пространств со свойством Бэра, являющихся непрерывными образами σ-компактных топологических групп, в частности свободных топологических групп компактов.

Полученные результаты применимы при решении более специального и естественного вопроса: какими свойствами обладают топологически однородные пространства со свойством Бэра, на которых непрерывно и транзитивно действует σ-компактная группа?

Топологическая группа G называется σ-компактной, если она представима в виде объединения счетного семейства компактных подпространств.

Пространство X называется топологически однородным, если для любых $x, y \in X$ существует гомеоморфизм $f: X \to X$, такой, что $f(x) = y$ и $f(X) = X$.

Все пространства предполагаются тихоновскими.

Мы пользуемся терминологией из [1].

Через $F(X)$ обозначаем свободную топологическую группу пространства X [2].

Определение [1]. Пространство называется псевдорадиальным, если для любого незамкнутого множества A в X найдутся $x \in [A]$ и линейно упорядоченное отношением включения семейство ξ множеств со следующими свойствами:

1) $\Omega\xi = \{x\}$; 2) $P \cap A \neq \emptyset$ для всех $P \in \xi$; 3) для любой окрестности Ox точки x в X найдется $P \in \xi$ такое, что $x \in P \subset Ox$.

Язык кардинальных инвариантов позволяет выразить следующую существенную особенность строения псевдорадиальных пространств. А.В. Архангельский доказал [1], что пространство X псевдорадиально, если и только если для всякого незамкнутого в X множества A найдутся множество $B \subset A$ регулярной мощности и точка $x \in X \setminus A$ – такие, что $|B \setminus Ox| < |B|$ для каждой окрестности Ox точки x.

Теорема 1. Пусть $Y = U\{K_n : n \in N\}$, где каждое K_n псевдорадиально и выполняется следующее условие: если $A \subset Y$ и $A \cap K_n$ замкнуты в Y при всех $n \in N$, то и все множество A замкнуто в Y. Тогда Y псевдорадиально.

Доказательство. Пусть A не замкнуто в Y. Тогда существует $n_0 \in N$ такое, что $A \cap K_{n_0} = A_{n_0}$ не замкнуто в K_{n_0}. Так как K_{n_0} псевдорадиально, то существуют подмножество $B \subset A_{n_0}$ регулярной мощности и точка $x \in K_{n_0} \setminus A_{n_0}$ – такие, что $|B\setminus Ux|<|B|$ для каждой окрестности Ux точки x в K_{n_0}. Пусть Ox – произвольная окрестность точки x в Y. Пусть $Ux=Ox\bigcap K_{n_0}$. Тогда Ux – окрестность точки x в K_{n_0}. Из $Ux\subset Ox$ следует, что $B\setminus Ox\subset B\setminus Ux$. Следовательно, $|B\setminus Ox|\le|B\setminus Ux|<|B|$. Таким образом пространство Y псевдорадиально.

Теорема доказана.

Предложение. Свободная топологическая группа $F(X)$ линейно упорядоченного компакта X является псевдорадиальным пространством.

Доказательство. Для каждого $n\in N$ определим отображение $\varphi_n:X^n\to F(X)$ следующим образом: $\varphi_n((x_1,x_2,...,x_n))=x_1,x_2...x_n$. Пусть $F_n=\varphi_n(X^n)$. Согласно теореме Чертанова, X^n псевдорадиально для каждого $n\in N$. Так как X – компакт, то из незамкнутости A в $F(X)$ следует, что существует $n_0\in N$ такое, что $A_{n_0}=A\bigcap F_{n_0}$ не замкнуто в F_{n_0}. Таким образом, выполняются все условия предыдущей теоремы 1. Поэтому можно утверждать, что псевдорадиально также пространство $F(X)$.

Предложение доказано.

Теорема 2. Пусть топологически однородное пространство Y со свойством Бэра является непрерывным образом топологической группы G, порожденной (алгебраически) линейно упорядоченным компактом X. Тогда пространство Y псевдорадиально.

Доказательство. Пусть $f:G\to Y$, где G – топологическая группа, порожденная упорядоченным компактом X. Для каждого $n\in N$ $f_n:X^n\to G$, определяемое формулой $f_n((x_1,x_2,...,x_n))=x_1\cdot x_2...x_n$, непрерывно. Пусть $G_n=f_n(X^n)$. G_n псевдорадиально и компактно для каждого n. Ясно, что $Y=Uf(G_n)$. Так как пространство Y-бэровское, то существуют непустое U и $n_0\in N$ такие, что $[U]\subset f(G_n)$. Отсюда следует, что существуют точка $y_0\in Y$ и окрестность U такие, что U_{y_0} псевдорадиально. Так как Y однородно, то Y^{y_0} псевдорадиально.

Следствие. Пусть топологически однородное пространство со свойством Бэра является непрерывным образом пространства $F(X)$, где X – линейно упорядоченный компакт.

Тогда пространство Y псевдорадиально.

Кафедра алгебры и геометрии *Поступило 09.11.1999*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Архангельский А.В.** Строение и классификация топологических пространств и кардинальные инварианты. – УМН, М., 1978, т. 33, №6, с. 19–84.
2. **Архангельский А.В.** Классы топологических групп. – УМН, М., 1981, т. 36, с. 127–146.

Ն.Է. ՄԻՐԶԱԽԱՆՅԱՆ

ՏՈՊՈԼՈԳԻԱԿԱՆ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՊՍԵՎԴՈՌԱԴԻԱԼՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇ ՀԱՅՏԱՆԻՇՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկվում է տոպոլոգիապես համասեռ, Բեռի հատկությունով օժտված այն տարածությունների պսևդոռադիալության հարցը, որոնք նաև σ-կոմպակտ տոպոլոգիական խմբերի, մասնավորապես, կոմպակտների ազատ տոպոլոգիական խմբերի պատկերներն են:

Ստացված արդյունքները օգտագործվում են հետևյալ ավելի բնական և հատուկ հարցի լուծման ընթացքում. ինչպիսի՞ հատկություններով են օժտված տոպոլոգիապես համասեռ, Բեռի հատկությունով օժտված տարածությունները, որոնց վրա անընդհատ և տրանզիտիվ գործում է σ-կոմպակտ խումբը: