

УДК 532.783

## МЕТОД СВЯЗАННЫХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ С КРУЧЕНИЕМ

Л.С. АСЛАНЯН

Ереванский государственный университет, Ереван, Армения

e-mail: leon@ysu.am

(Поступила в редакцию 23 февраля 2017 г.)

Методом связанных волн анализируется процесс пространственного энергообмена между обыкновенной и необыкновенной волнами в анизотропной среде с кручением. Получены точные аналитические выражения, описывающие пространственную динамику такого энергообмена без привлечения каких-либо приближенных методов. Показано, что твист-ориентированная ячейка нематического жидкого кристалла при достаточно больших толщинах работает как ахроматическая пластина  $\lambda/2$  при любом значении азимутального угла входящей линейно-поляризованной волны несмотря на то, что явление адиабатического отслеживания отсутствует.

### 1. Введение

В современной оптоэлектронике множество неоднородных (как естественных, так и наведенных) сред рассматривается в качестве потенциальных объектов для различных применений в элементах управления: периодические и непериодические среды с металлическими, полупроводниковыми, диэлектрическими, гиротропными, жидкокристаллическими и бианизотропными слоями и др. Управление параметрами таких сред можно осуществлять статическими и переменными электрическими, магнитными или акустическими полями. В частности, биаксиальные и холестерические жидкие кристаллы (ЖК), а также нематические (НЖК) с твист-ориентацией имеют множество применений в ЖК дисплеях и пространственных модуляторах света, в управляемых фазовых элементах, поляризационных фильтрах и др. [1–3].

Несмотря на многообразие оптических явлений в анизотропных и циркулярно-анизотропных средах, фотонных и жидких кристаллах, фоторецепторах [4–6], наличие неоднородной анизотропии (как естественной, так и наведенной) существенно расширяет спектр возможных явлений и их применений.

Физической основой этих элементов управления служит связь двух волн и энергообмен между этими волнами из-за неоднородной анизотропии в среде.

Этим и объясняется большой интерес к задачам распространения поляризованного света в неоднородных анизотропных средах (в частности в НЖК с твист-ориентацией или в холестерических ЖК), а также необходимость создания универсальных методов анализа оптических явлений в таких средах. В этих системах задача сводится к аналитическому решению связанных волновых уравнений для декартовых составляющих поля. Такого рода задачи непосредственно относятся к проблеме интегрируемости в задачах геометрической оптики неоднородных сред [7] или же к двухуровневой задаче в квантовой механике [8, 9]. В работе [10] изложен новый подход к проблеме целенаправленного и необратимого переноса энергии, основанный на аналогии между системой двух слабосвязанных параметрически-ведомых маятников или осцилляторов и неадиабатическим туннелированием Ландау–Зинера в двухуровневой квантовой системе.

Аналитическое решение волнового уравнения в таких средах связано с определенными трудностями даже с учетом медленного изменения параметров среды и возможностью применения приближенных методов. В случаях, когда оптические характеристики среды меняются медленно на расстояниях порядка длины волны, применение приближенных методов облегчает решение задачи. Хорошим приближением является метод геометрической оптики, примененный в работах [11, 12], где найдено аналитическое решение задачи, которое в предельном случае отсутствия неоднородности полностью совпадает с известным решением.

Целью настоящей работы является теоретическое исследование процесса пространственного энергообмена между обыкновенной и необыкновенной волнами в анизотропной среде с кручением, в частности, в НЖК с твист-ориентацией (или в холестерических ЖК) путем решения точного волнового уравнения без привлечения каких-либо приближенных методов.

## 2. Теория

Пусть плоская монохроматическая волна распространяется в анизотропной среде с крученным азимутальным углом оптической оси  $\psi(z)$  (рис.1). Поглощением среды пренебрегаем, а магнитную проницаемость считаем равной единице. Представим тензор диэлектрической проницаемости плавно-неоднородной анизотропной среды  $\varepsilon_{ij}(z)$  в виде [13, 14]

$$\varepsilon_{ij}(z) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_a \sin^2 \psi(z) & \varepsilon_a \sin \psi(z) \cos \psi(z) \\ \varepsilon_a \sin \psi(z) \cos \psi(z) & \varepsilon_{\perp} + \varepsilon_a \sin^2 \psi(z) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_a = \varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}$  – анизотропия ЖК. В случае нормального падения света на среду из уравнений Максвелла нетрудно получить следующее уравнение для двумер-

ного вектора Джонса  $\mathbf{E}(z) = (E_x \ E_y)^T$ , описывающего процесс пространственного энергообмена между обыкновенной и необыкновенной волнами [11,14–16]:

$$\frac{d^2 \mathbf{E}(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\varepsilon}(z) \mathbf{E}(z) = 0, \quad (2)$$

где  $i, j = x, y$ , а  $z$  – координата вдоль направления распространения света. Решение уравнения (2) с тензором диэлектрической проницаемости (1) существенно облегчается при переходе во вращающуюся (локальную) систему координат.

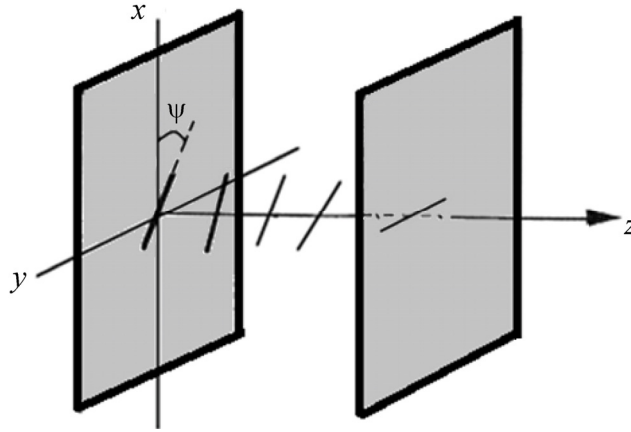


Рис.1. Геометрия задачи.

В связи с этим для решения системы уравнений (2) перейдем из лабораторной системы координат  $(x, y, z)$  в локальную  $(\xi, \eta, z)$  посредством преобразования [11, 14]

$$\mathbf{E}(z) = \hat{R}^{-1} \mathbf{A}(z), \quad \hat{\varepsilon}(z) = \hat{R}^{-1} \hat{\varepsilon}_0 \hat{R}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{A} = (A_\xi \ A_\eta)^T$  – вектор Джонса во вращающейся системе координат,  $\hat{R}(\psi)$  – матрица поворота координатных осей

$$\hat{R}(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi(z) & \sin \psi(z) \\ -\sin \psi(z) & \cos \psi(z) \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\hat{\varepsilon}_0$  – тензор диэлектрической проницаемости неоднородно-анизотропной среды в локальной системе координат

$$\hat{\varepsilon}_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\parallel} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} \end{pmatrix}.$$

После несложных, но громоздких преобразований получим следующую систему связанных уравнений относительно  $A_{\xi, \eta}$  (см. также [14]):

$$\frac{d^2 \mathbf{A}}{dz^2} - 2i\hat{\sigma}_3 \frac{d\psi}{dz} \frac{d\mathbf{A}}{dz} + \left\{ \frac{\omega^2}{c^2} \hat{\varepsilon}_0 - i\hat{\sigma}_3 \frac{d^2 \psi}{dz^2} - \left( \frac{d\psi}{dz} \right)^2 \hat{\sigma}_0 \right\} \mathbf{A} = 0. \quad (4)$$

Величинами  $\hat{\sigma}_i$  обозначены матрицы Паули

$$\hat{\sigma}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

В более явном виде для системы связанных уравнений получим

$$\begin{cases} \frac{d^2 A_\xi}{dz^2} + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\parallel} - \left( \frac{d\psi}{dz} \right)^2 \right] A_\xi = \left( \frac{d^2 \psi}{dz^2} + 2 \frac{d\psi}{dz} \right) \frac{dA_\eta}{dz} \\ \frac{d^2 A_\eta}{dz^2} + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} - \left( \frac{d\psi}{dz} \right)^2 \right] A_\eta = - \left( \frac{d^2 \psi}{dz^2} + 2 \frac{d\psi}{dz} \right) \frac{dA_\xi}{dz} \end{cases} \quad (5)$$

В случае равномерного изменения угла ориентации директора  $\psi(z) = \alpha z$

$$\frac{d\psi}{dz} = \alpha; \quad \frac{d^2 \psi}{dz^2} = 0.$$

Тогда систему связанных уравнений в локальной системе координат можно записать в более простом виде

$$\begin{cases} \frac{d^2 A_\xi}{dz^2} + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\parallel} - \alpha^2 \right] A_\xi = 2\alpha \frac{dA_\eta}{dz} \\ \frac{d^2 A_\eta}{dz^2} + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} - \alpha^2 \right] A_\eta = -2\alpha \frac{dA_\xi}{dz} \end{cases} \quad (6)$$

Аналогичные уравнения приведены в работе [17] при рассмотрении задачи распространения поляризованного света в холестерических ЖК. В системе связанных уравнений (6) величины

$$v_{\parallel, \perp} = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\parallel, \perp} - \alpha^2$$

играют роль парциальных волновых векторов. Коротко обсудим хорошо известное решение системы (6), полученное в работе [18]. Для нахождения собственных волновых векторов этой системы решение ищем в виде

$$\begin{pmatrix} A_\xi \\ A_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \exp(i\lambda z),$$

где  $A$  и  $B$  – комплексные амплитуды собственных волн. После подстановки в (6) имеем

$$\begin{cases} \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\parallel} - \alpha^2 - \lambda^2 \right] A - 2i\alpha\lambda B = 0 \\ 2i\alpha\lambda A + \left[ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} - \alpha^2 - \lambda^2 \right] B = 0. \end{cases}$$

Из условия совместности этих уравнений для собственных волновых векторов получим

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 + \alpha^2 \pm \sqrt{\frac{\omega^4}{c^4} \left( \frac{\varepsilon_a}{2} \right)^2 + 4 \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 \alpha^2}}, \quad (7)$$

где  $\varepsilon_0 = (\varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_{\perp})/2$  – средняя диэлектрическая проницаемость НЖК. Заметим, что в случае отсутствия вращения,  $\alpha = 0$  и

$$\lambda_1 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{\parallel}}, \quad \lambda_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_{\perp}},$$

т. е.  $\lambda_{1,2}$  – собственные волновые векторы однородной одноосной анизотропной среды.

На рис.2 представлены зависимости собственных волновых векторов от толщины образца во вращающейся системе координат. Как видно из рисунка, эта зависимость существенна при очень малых толщинах. Такие тонкие образцы твист-ориентированного НЖК нами не рассматриваются. С учетом сказанного, в ряде случаев полезно также упростить выражения (6), учитывая, что при достаточных толщинах ( $l \geq 5$  мкм)

$$\frac{\omega^4}{c^4} \left( \frac{\varepsilon_a}{2} \right)^2 \gg 4 \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0 \alpha^2.$$

После несложных преобразований получим

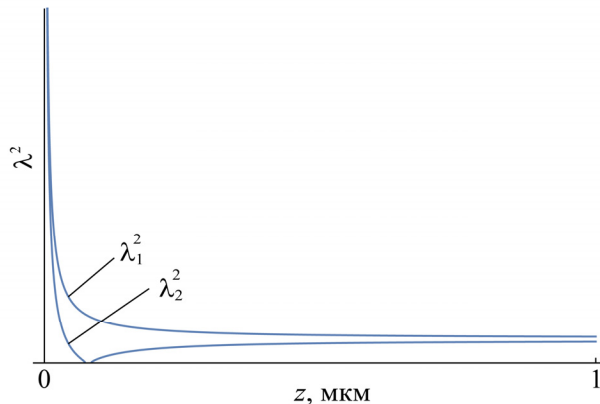


Рис.2. Зависимость собственных волновых векторов от толщины слоя ЖК.

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{\lambda}{4\pi} \frac{3\varepsilon_{\parallel} + \varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_a \sqrt{\varepsilon_{\parallel}}} \alpha^2,$$

$$\lambda_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\varepsilon_{\perp}} - \frac{\lambda}{4\pi} \frac{3\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_a \sqrt{\varepsilon_{\perp}}} \alpha^2.$$

Тогда полное решение системы уравнений (6) запишется в виде

$$\begin{pmatrix} A_{\xi}(z) \\ A_{\eta}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \chi_1 \end{pmatrix} A \exp(i\lambda_1 z) + \begin{pmatrix} \chi_2 \\ 1 \end{pmatrix} B \exp(i\lambda_2 z).$$

Величины  $\chi_1$  и  $\chi_2$  имеют вид

$$\chi_1 = \frac{B}{A} = \frac{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\parallel} - \alpha^2 - \lambda_1^2}{2i\alpha\lambda_1}, \quad \chi_2 = \frac{A}{B} = -\frac{\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} - \alpha^2 - \lambda_2^2}{2i\alpha\lambda_2}$$

и называются коэффициентами распределения амплитуд. Воспользовавшись граничными условиями

$$\begin{pmatrix} E_x(z=0) \\ E_y(z=0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\xi}(z=0) \\ A_{\eta}(z=0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix},$$

$$\frac{dE_x(z=0)}{dz} = \frac{dE_y(z=0)}{dz} = 0,$$

получим

$$\begin{pmatrix} A_{\xi}(z) \\ A_{\eta}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \chi_1 \end{pmatrix} \frac{A_0 - \chi_2 B_0}{1 - \chi_1 \chi_2} \exp(i\lambda_1 z) + \begin{pmatrix} \chi_2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{\chi_1 A_0 - B_0}{\chi_1 \chi_2 - 1} \exp(i\lambda_2 z). \quad (8)$$

Окончательное аналитическое решение получим, осуществив обратный переход в лабораторную систему координат, и представим в виде

$$\begin{cases} E_x(z) = \cos \psi A_{\xi}(z) - \sin \psi A_{\eta}(z) \\ E_y(z) = \sin \psi A_{\xi}(z) + \cos \psi A_{\eta}(z), \end{cases} \quad (9)$$

Необходимо отметить, что точное решение (8) справедливо только в том случае, когда несмотря на неоднородность анизотропии не происходит преобразования встречных волн друг в друга. Это означает, что встречные волны независимы, т. е. волна распространяясь деформируется, но не взаимодействует со встречной. Это происходит из-за того, что  $\hat{\varepsilon}(z)$  меняется плавно и отраженная волна пренебрежимо мала [7].

Таким образом, полученные аналитические выражения (8) и (9) позволяют описывать процесс энергообмена между обыкновенной и необыкновенной волнами в неоднородных анизотропных средах.

### 3. Обсуждение результатов

В качестве примера неоднородной анизотропной среды рассмотрим НЖК МВВА, параметры которого хорошо известны [13]. Пусть входящая волна линейно-поляризована вдоль оси  $x$  (в случае нормированной интенсивности  $A_0 = 1$  и  $B_0 = 0$ ). На рис.3 приведены зависимости  $|E(z)|^2$  (лабораторная система координат) и  $|A(z)|^2$  (локальная система координат) от продольной координаты  $z$ , построенные с помощью аналитических выражений (8) и (9), при различных толщинах рассматриваемых образцов. Как видно из рисунков, аналогично случаю связанных осцилляторов наблюдается явление энергообмена (рис.3а, в, д) во вращающейся системе координат. С увеличением толщины образца коэффици-

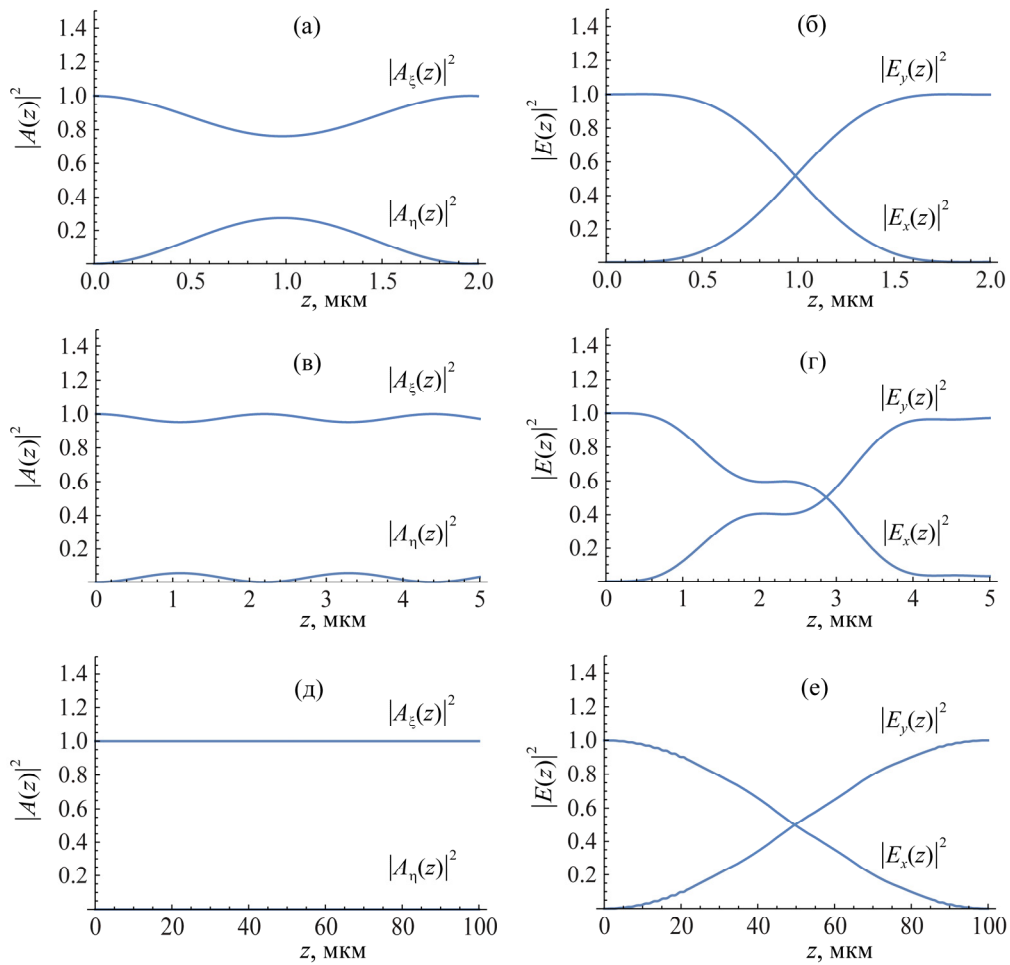


Рис.3. Эволюция составляющих интенсивностей света в твист-ориентированном НЖК МВВА в лабораторной (а, б, в) и локальной (г, д, е) системах координат при  $\epsilon_0 = 2.83$ ,  $\epsilon_a = 0.79$ ,  $\lambda = 0.53$  мкм для (а, б)  $l = 2$  мкм, (в,г)  $l = 5$  мкм и (д, е)  $l = 100$  мкм.

ент связи  $\alpha$  уменьшается и в результате доля перекачиваемой энергии уменьшается. В лабораторной системе координат наблюдается полная перекачка энергии из входящей  $x$ -составляющей в выходящую  $y$ -составляющую волну (рис.3б, г, е), при этом энергообмен в рассматриваемой системе необратим. Подчеркнем, что уменьшение амплитуды осцилляций во вращающейся системе координат соответствует явлению адиабатического отслеживания, т. е. случаю, когда входящая линейно-поляризованная волна отслеживает вращение оптической оси, оставаясь при этом линейно-поляризованной.

Интересная особенность наблюдается в случае, когда азимутальный угол линейно-поляризованной волны отличается от  $0$  и  $\pi/2$ . Для наглядности на рис.4 представлены зависимости  $|E_x(z)|^2$  и  $|E_y(z)|^2$  от продольной координаты в лабораторной системе координат (азимутальный угол поляризации равен  $\pi/8$ ). Как видно из рисунков, в отличие от предыдущего случая здесь пространственная динамика более сложная, а именно, осцилляции интенсивностей с увеличением толщины не исчезают. Это свидетельствует о том, что явление адиабатического отслеживания в других геометриях отсутствует.

Следует также сделать некоторые замечания. Во-первых, в повернутой системе координат связь между двумя подсистемами не силовая ( $\sim A_{\xi,\eta}$ ) и не

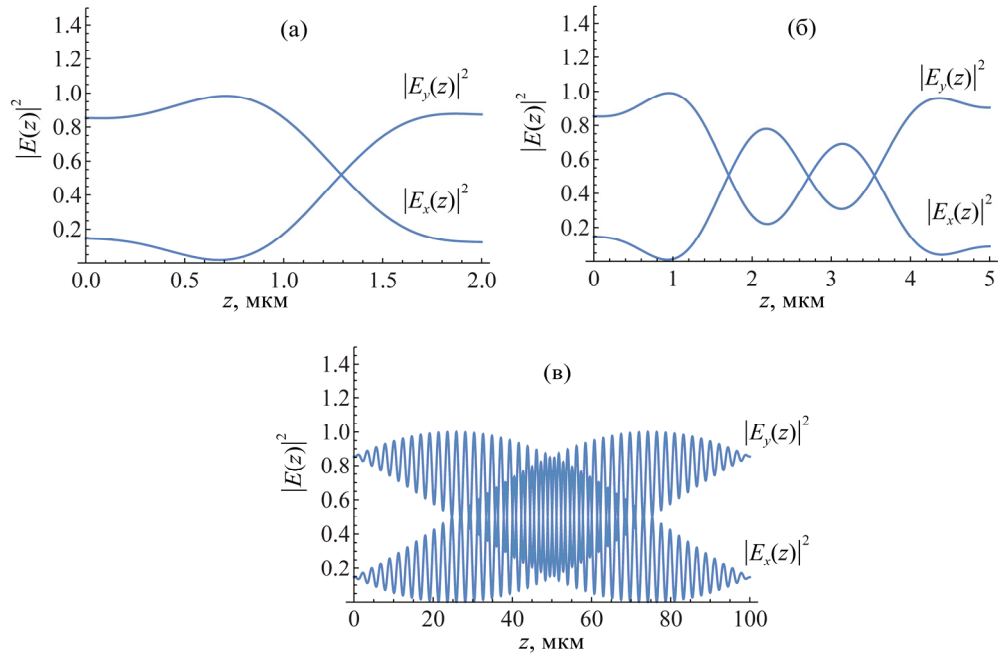


Рис.4. Зависимость составляющих интенсивностей света в лабораторной системе координат в случае, когда азимутальный угол составляет  $\pi/8$ : (а)  $l = 2$  мкм, (б)  $l = 5$  мкм, (в)  $l = 100$  мкм.



инерционная ( $\sim A''_{\xi,\eta}$ ) [18]. Здесь связь между подсистемами обеспечивается слагаемым ( $\sim A'_{\xi,\eta}$ ). Во-вторых, учитывая малость параметра  $\alpha$ , систему (5) можно упростить, если пренебречь слагаемым  $(d\psi/dz)^2$ . Таким образом, имеем:

$$\begin{cases} \frac{d^2 A_{\xi}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\parallel} A_{\xi} = \left( \frac{d^2 \psi}{dz^2} + 2 \frac{d\psi}{dz} \right) \frac{dA_{\eta}}{dz} \\ \frac{d^2 A_{\eta}}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{\perp} A_{\eta} = - \left( \frac{d^2 \psi}{dz^2} + 2 \frac{d\psi}{dz} \right) \frac{dA_{\xi}}{dz}. \end{cases} \quad (10)$$

Эта система может быть полезной при рассмотрении более общей функциональной зависимости  $\psi(z)$ . В-третьих, из рис.3 также видно, что собственные частоты не совпадают ни при каких толщинах образца. Это существенно облегчает решение задачи, так как образец твист-ориентированного НЖК, в отличие от случая присутствия внутренних резонансов, можно описывать единым подходом [19].

#### 4. Заключение

Проведен теоретический анализ процесса пространственного энергообмена в анизотропной среде с кручением в случае нормального падения света на слой НЖК с использованием метода связанных волн. Полученные без применения каких-либо приближенных методов аналитические решения (8) и (9) являются точными. Общее аналитическое решение задачи получено с помощью перехода во вращающуюся систему координат. Такой подход может быть полезным для получения точного аналитического решения многих других задач, к числу которых относятся задачи классического движения заряженной частицы в осциллирующих электрических и магнитных полях, в оптических волноводах, в гироскопических задачах и др.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **E. Collett, B. Schaefer.** Polarized Light for Scientists and Engineers. Lincroft, New Jersey, Polawave Group, 2012.
2. **G.R. Luckhurst, T.J. Sluckin.** Biaxial NLC. Southampton, Wiley&Sons, 2015.
3. **P. Yeh, C. Gu.** Optics of Liquid Crystal Displays. New York–London–Sydney–Toronto, Wiley&Sons, 1999.
4. **О.В. Иванов.** Распространение электромагнитных волн в анизотропных и бианизотропных слоистых структурах. Ульяновск, УлГТУ, 2010.
5. **P. McIntyre, A.W. Snyder.** JOSA, **68**, 149 (1978).
6. **С.Н. Gooch, Н.А. Tarry.** J. Phys. D. Appl. Phys., **8**, 1575 (1975).
7. **А.М. Бреховских.** Волны в слоистых средах. Москва, Наука, 1973.
8. **L. Allen, J. Eberly.** Optical Resonance and Two-Level Atoms. New York–London–Sydney–Toronto, Wiley&Sons, 1976.

9. **А.Л. Аслабян, Л.С. Аслабян, С.К. Назарян.** Изв. НАН Армении, Физика, **47**, 34 (2012).
10. **Ю.А. Косевич, Л.И. Маневич, Э.Л. Маневич.** УФН, **180**, 1331 (2010).
11. **А.Л. Аслабян, Л.С. Аслабян, Ю.С. Чилингарян.** Оптика и спектроскопия, **116**, 516 (2014).
12. **Р.Б. Алавердян, А.Л. Аслабян, Л.С. Аслабян, Г.С. Геворгян, С.Ц. Нерсисян.** Изв. НАН Армении, Физика, **50**, 185 (2015).
13. **ЛМ. Блинов.** Жидкие кристаллы. Структура и свойства. Москва, Книжный дом Либроком, 2013.
14. **F. Simoni.** NLO Properties of LC and PDLC. Singapore, World Scientific, 1997.
15. **H. Kubo, R. Nagata.** JOSA, **73**, 1719 (1985).
16. **E. Santamato, Y.R. Shen.** JOSA, **4A**, 356 (1987).
17. **А.С. Сонин.** Введение в физику ЖК. Москва, Наука, 1983.
18. **Д.И. Трубецков, А.Г. Рожнев.** Линейные колебания и волны. Москва, Физматлит, 2001.
19. **Г.М. Заславский, В.П. Мейтлис, Н.Н. Филипенко.** Взаимодействие волн в неоднородных средах. Новосибирск, Наука, 1982.

ԿԱՊՎԱԾ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՄԵԹՈՂԸ ՈԼՈՐՄԱՄԲ ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐՈՒՄ  
Լ.Ս. ԱՍԼԱՆՅԱՆ

Կապված ալիքների մեթոդով տեսականորեն վերլուծված է պտույտ պարունակող անիզոտրոպ միջավայրում սովորական և անսովոր ալիքների միջև տարածական էներգափոխանակման երևույթը: Ի տարբերություն նախորդ աշխատանքների, այստեղ ստացված են այդ էներգափոխանակման տարածական դինամիկան նկարագրող ճշգրիտ անալիտիկ արտահայտություններ՝ առանց որևէ մոտավոր մեթոդի կիրառման: Ցույց է տրված, որ թվիստ կողմնորոշմամբ նեմատիկ հեղուկ բյուրեղական բջիջը կարող է աշխատել որպես արդամաս  $\lambda/2$  թիթեղ մուտքային զծային բևեռացված լույսի ցանկացած ազիմուտային անկյան դեպքում:

COUPLING WAVES METHOD IN ANISOTROPIC MEDIUM WITH TWISTING  
L.S. ASLANYAN

The process of spatial energy transfer between ordinary and extraordinary waves in the anisotropic media with twisting is analyzed by the coupled waves method. The exact analytical expressions describing the spatial dynamics of such energy transfer are obtained without the application of any approximate methods. It is shown that a twist oriented cell of a nematic liquid crystal at rather large thickness operates as an achromatic  $\lambda/2$  plate at any value of an azimuthal angle of the entrance linearly polarized wave in spite of the fact that the phenomenon of adiabatic following is absent.