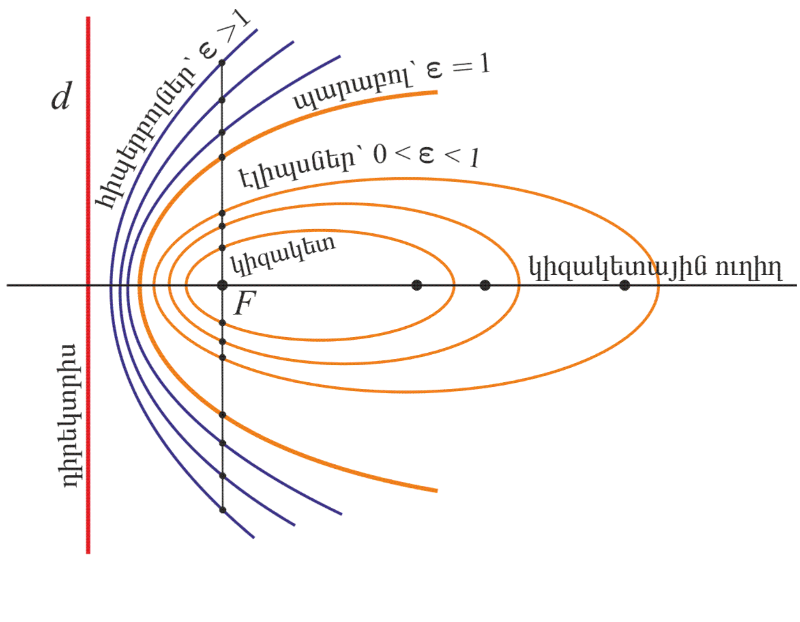
Վ.Ա.ՓԻԼԻՊՈՍՅԱՆ

ՎԵՐԼՈՒԾԱԿԱՆ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐԻ ՈՒՂԵՑՈՒՅՑ



ՄԱՍ-I

ԵՐԵՎԱՆ - 2016

Սույն տիպային խնդիրների լուծումները, որոնք ներկայացվում են, նպատակ ունի օգնել առաջին կուրսի ուսանողներին հեշտությամբ հաղթահարել այն դժվարու-թյունները, որոնք կառաջանան վերլուծական երկրաչա-փության նյութը յուրացնելիս:

Ստորև բերված են. վեկտորները և նրանց հետ կատարվող հիմնական գործողությունները, ուղիղը հարթության մեջ, հարթության երկրորդ կարգի կորերի տեսությանը թեմաներին վերաբերվող որոշ խնդիրների լուծումներ:

Վ Ե Կ Տ Ո Ր Ն Ե Ր

*Երկու վեկտորներ համարվում են հավասար, եթե համապատասխանաբար նրանց սկզբնակետերն ու վերջնակետերը միացնելիս ստացվում է **զուգահեռագիծ**, և կամ էլ նրանք գտնվում են մի ուղղի վրա, ունեն հավասար երկարություններ և ուղղված են **նույն կողմը**:*

Այն ինչ ստացվում է այս նույնացումների արդյունքում կոչվում է ***ազատ վեկտոր***:

Զրոյական ազատ վեկտորը և $\vec{a}=\overrightarrow{LM}$ վեկտորի ***հակադիր վեկտորը***՝ $-\vec{a}$-ն սահմանվում են համապատասխանաբար $\vec{0}=\overrightarrow{AA}$ և $-\vec{a}=\overrightarrow{ML}$ հավասարություններով, որտեղ A-ն կամայական կետ է:

Վեկտորների գումարման և թվով բազմապատկման գործողությունները օժտված են հետևյալ հատկություններով՝

1). $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, **5).** $k_1(k_2\vec{a})=(k_1k_2)\vec{a}$,

2). $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$, **6).** $(k_1+k_2)\vec{a}=k_1\vec{a}+k_2\vec{a}$,

3). $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$, **7).** $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$,

4). $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$, **8).** $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$,

կամայական $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ վեկտորների և կամայական k_1, k_2 իրական թվերի համար:

Եթե $\vec{a}=k_1\vec{b}+k_2\vec{c}$, ապա ասում ենք, որ $\vec{a}$ ***վեկտորը ներկայացված է*** $\vec{b}$ և $\vec{c}$ ***վեկտորներով***:

Խնդիր 1. Ապացուցել, որ $\overrightarrow{AB}$ և $\overrightarrow{CD}$ վեկտորները հավասար են այն և միայն այն դեպքում, երբ համընկնում են AD և BC հատվածների միջնակետերը:

Ապացուցում: Դիցուք $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ և O-ն AD-ի միջնակետն է: Ցույց տանք, որ O-ն նաև BC-ի միջնակետն է:

Քանի որ $AO=OD$ և $O\in AD \Rightarrow \overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$:

Ունենք

$\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}$:

Ստացանք $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OC}$: Այսինքն O-ն BC-ի միջնակետն է:

Այժմ՝ հակառակը: Դիցուք O-ն AD և BC հատվածների միջնակետն է: Ուստի $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OC}$ և $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OD}$: Ապացուցենք, որ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$:

Ունենք $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{CD}$, ինչ և պետք էր ապացուցել:

Խնդիր 2. Դիցուք $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$ և $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ վեկտորները ներկայացվում են ABC եռանկյան կողմերով: Արտահայտել AD կիսորդով ներկայացվող վեկտորը $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների միջոցով:

Լուծում: Ունենք $CD:DB=AC:AB=|\vec{a}|:|\vec{b}|$, որտեղից

$CD=\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}CB$: Քանի որ $\overrightarrow{CD}$ և $\overrightarrow{CB}$ վեկտորները համուղղված են, ուստի

$$\overrightarrow{CD}=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\overrightarrow{CB}=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}(\vec{b}-\vec{a}):$$

Հետևաբար

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\vec{a}+\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}(\vec{b}-\vec{a})=\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{a}+\frac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{b}\ :$$

Պատ.՝ $\overrightarrow{AD}=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{a}+\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{b}$:

Խնդիր 3. Տարածության ինչ-որ բազիսում տրված են $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորները: Պարզել , այդ վեկտորները գծորեն կախյա՞լ են, թե՝ ոչ և, եթե հնարավոր է, $\vec{c}$ վեկտորն արտահայտել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գծային զուգակցությամբ.

ա) $\vec{a}=\{-2;\ 2;\ 1\}$, $\vec{b}=\{1;-3;\ 2\}$, $\vec{c}=\{1;\ 1;\ 1\}$,

բ) $\vec{a}=\{2;\ 1;\ 1\}$, $\vec{b}=\{-1;\ 1;-2\}$, $\vec{c}=\{7;-1;\ 8\}$,

գ) $\vec{a}=\{6;-9;\ 12\}$, $\vec{b}=\{-4;\ 6;-8\}$, $\vec{c}=\{2;\ 3;-2\}$:

Լուծում: Որպեսզի պարզենք $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ վեկտորները գծորեն կախյա՞լ են, թե՝ ոչ, դիտարկենք նրանց բոլոր $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ գծային զուգակցությունները: Եթե պարզվի, որ $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$ այն և միայն այն դեպքում, երբ $\alpha=\beta=\gamma=0$, ապա այդ վեկտորները կլինեն գծորեն անկախ:

Հակառակ դեպքում նրանք կլինեն գծորեն կախյալ: Ընդ որում, եթե $\gamma\neq 0$, ապա $\vec{c}=-\dfrac{\alpha}{\gamma}\vec{a}-\dfrac{\beta}{\gamma}\vec{b}$, իսկ եթե $\gamma=0$, ապա, չնայած այդ վեկտորները գծորեն կախյալ են, սակայն $\vec{c}$ վեկտորը հնարավոր չէ արտահայտել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գծային զուգակցությամբ:

ա) Դիցուք $\vec{a}=\{-2;\ 2;\ 1\}$, $\vec{b}=\{1;-3;\ 2\}$, $\vec{c}=\{1;\ 1;\ 1\}$:

Գրելով $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$ հավասարությունը կոորդինատաբար, ստանում ենք՝

$$\begin{cases}-2\alpha+\beta+\gamma=0\\ 2\alpha-3\beta+\gamma=0\\ \alpha+2\beta+\gamma=0\end{cases},\quad \text{որտեղից}\quad \begin{cases}\gamma=\beta\\ 2\alpha-3\beta+\gamma=0\\ \alpha=5\beta\end{cases},\quad \text{այսինքն}$$

$$\begin{cases}\gamma=\beta\\ \beta=0\\ \alpha=5\beta\end{cases}:$$

Այստեղից էլ $\alpha=\beta=\gamma=0$: Հետևաբար $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ վեկտորները գծորեն անկախ են և բնականաբար $\vec{c}$

վեկտորը հնարավոր չէ արտահայտել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գծային զուգակցությամբ:

բ) Դիցուք $\vec{a}=\{2;\,1;\,1\}$, $\vec{b}=\{-1;\,1;-2\}$, $\vec{c}=\{7;-1;\,8\}$:

Նախորդի նման՝ $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0} \quad\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}2\alpha-\beta+7\gamma=0\\ \alpha+\beta-\gamma=0\\ \alpha-2\beta+8\gamma=0\end{cases}:$$

Այստեղից $\alpha=2,\ \beta=-3,\ \gamma=1$: Այնպես, որ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ վեկտորները գծորեն կախյալ են և $\vec{c}=-2\vec{a}+3\vec{b}$:

գ) Դիցուք $\vec{a}=\{6;-9;\,12\}$, $\vec{b}=\{-4;\,6;-8\}$, $\vec{c}=\{2;\,3;-2\}$:

Այս դեպքում ունենք $\begin{cases}6\alpha-4\beta+2\gamma=0\\ -9\alpha+6\beta+3\gamma=0\\ 12\alpha-8\beta-2\gamma=0\end{cases}$: Որտեղից էլ ստանում ենք $\alpha=2,\ \beta=3,\ \gamma=0$: Այսինքն՝ չնայած այդ վեկտորները գծորեն կախյալ են, սակայն $\vec{c}$ վեկտորը հնարավոր չէ արտահայտել $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների գծային զուգակցությամբ: Երկրաչափորեն դա նշանակում է, որ $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորները համագիծ են, իսկ $\vec{c}$ վեկտորը համագիծ չէ նրանց:

Խնդիր 4. Դիցուք $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$ և $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ վեկտորները ներկայացնում են ABC եռանկյան կողմերը: Արտահայտել AD կիսորդի երկարությունը $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների միջոցով:

Լուծում: Ունենք $\overrightarrow{AD}=\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{a}+\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|+|\vec{b}|}\vec{b}$ (տես *խնդիր 2*-ը):

Այստեղից՝

$$|\overrightarrow{AD}|^2=(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AD})=\frac{2|\vec a|^2\cdot|\vec b|^2+2|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot(\vec a,\vec b)}{(|\vec a|+|\vec b|)^2}:$$

Այսինքն՝ $$|\overrightarrow{AD}|=\frac{\sqrt{2|\vec a|^2\cdot|\vec b|^2+2|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot(\vec a,\vec b)}}{|\vec a|+|\vec b|}:$$

Պատ.՝ $$|\overrightarrow{AD}|=\frac{\sqrt{2|\vec a|^2\cdot|\vec b|^2+2|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot(\vec a,\vec b)}}{|\vec a|+|\vec b|}:$$

Խնդիր 5. Ապացուցել, որ (տարածության կամ հարթության) կամայական A,B,C,D կետերի համար

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4PQ^2,$$

որտեղ P-ն և Q-ն համապատասխանաբար AC և BD հատվածների միջնակետերն են:

Լուծում: Դիցուք $\overrightarrow{OA}=\vec r_1$, $\overrightarrow{OB}=\vec r_2$, $\overrightarrow{OC}=\vec r_3$ և $\overrightarrow{OD}=\vec r_4$ վեկտորները համապատասխանաբար A, B, C և D կետերի շառավիղ վեկտորներն են:

Ունենք

$$\overrightarrow{AB}=\vec r_2-\vec r_1,\quad \overrightarrow{BC}=\vec r_3-\vec r_2,\quad \overrightarrow{CD}=\vec r_4-\vec r_3,\quad \overrightarrow{DA}=\vec r_1-\vec r_4,$$

$$\overrightarrow{AC}=\vec r_3-\vec r_1,\ \overrightarrow{BD}=\vec r_4-\vec r_2,\quad \overrightarrow{OP}=\frac12(\vec r_1+\vec r_3),\quad \overrightarrow{OQ}=\frac12(\vec r_2+\vec r_4),$$

$$\overrightarrow{OQ}=\frac12(\vec r_2+\vec r_4-\vec r_3-\vec r_1):$$

Այստեղից՝ $AB^2=(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB})=$

$$=(\vec r_2-\vec r_1,\vec r_2-\vec r_1)=(\vec r_2,\vec r_2)-2(\vec r_1,\vec r_2)+(\vec r_1,\vec r_1)=$$

$$=|\vec r_1|^2+|\vec r_2|^2-2(\vec r_1,\vec r_2):$$

Նույն կերպ՝ $BC^2=(\vec r_3-\vec r_2,\vec r_3-\vec r_2)=|\vec r_2|^2+|\vec r_3|^2-2(\vec r_2,\vec r_3)$,

$$CD^2=(\vec r_4-\vec r_3,\vec r_4-\vec r_3)=|\vec r_3|^2+|\vec r_4|^2-2(\vec r_3,\vec r_4),$$

$$DA^2=(\vec r_1-\vec r_4,\vec r_1-\vec r_4)=|\vec r_1|^2+|\vec r_4|^2-2(\vec r_1,\vec r_4),$$

$$AC^2 = (\vec{r_3} - \vec{r_1}, \vec{r_3} - \vec{r_1}) = |\vec{r_1}|^2 + |\vec{r_3}|^2 - 2(\vec{r_1}, \vec{r_3}),$$

$$BD^2 = (\vec{r_4} - \vec{r_2}, \vec{r_4} - \vec{r_2}) = |\vec{r_2}|^2 + |\vec{r_4}|^2 - 2(\vec{r_2}, \vec{r_4}),$$

$$4PQ^2 = (\vec{r_2} + \vec{r_4} - \vec{r_3} - \vec{r_1}, \vec{r_2} + \vec{r_4} - \vec{r_3} - \vec{r_1}) = |\vec{r_1}|^2 + |\vec{r_2}|^2 + |\vec{r_3}|^2 +$$

$$+ |\vec{r_4}|^2 + 2(\vec{r_1}, \vec{r_3}) - 2(\vec{r_1}, \vec{r_2}) - 2(\vec{r_1}, \vec{r_4}) - 2(\vec{r_2}, \vec{r_3}) - 2(\vec{r_3}, \vec{r_4}) +$$

$$+ 2(\vec{r_2}, \vec{r_4}) :$$

Այնպես, որ

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(|\vec{r_1}|^2 + |\vec{r_2}|^2 + |\vec{r_3}|^2 + |\vec{r_4}|^2 - (\vec{r_1}, \vec{r_2}) -$$

$$-(\vec{r_2}, \vec{r_3}) - (\vec{r_3}, \vec{r_4}) - (\vec{r_1}, \vec{r_4})) = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2 :$$

Ապացուցված է:

Խնդիր 6. Ապացուցել, որ կամայական $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորների համար

$$\begin{vmatrix} (\vec{a}, \vec{a}) & (\vec{a}, \vec{b}) & (\vec{a}, \vec{c}) \\ (\vec{b}, \vec{a}) & (\vec{b}, \vec{b}) & (\vec{b}, \vec{c}) \\ (\vec{c}, \vec{a}) & (\vec{c}, \vec{b}) & (\vec{c}, \vec{c}) \end{vmatrix}$$

որոշիչը (***Գրամի որոշիչ***) հավասար է զրոի այն և միայն այն դեպքում, երբ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորները համահարթ են:

Լուծում: Նշված որոշիչը կարելի է մեկնաբանել որպես $\{(\vec{a}, \vec{a}); (\vec{a}, \vec{b}); (\vec{a}, \vec{c})\}$, $\{(\vec{b}, \vec{a}); (\vec{b}, \vec{b}); (\vec{b}, \vec{c})\}$, $\{(\vec{c}, \vec{a}); (\vec{c}, \vec{b}); (\vec{c}, \vec{c})\}$ ***տող-վեկտորների*** խառը արտադրյալ:

Եթե $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորները համահարթ են, ապա նրանք գծորեն կախյալ են, հետևաբար նրանցից մեկն արտահայտվում է մյուս վեկտորների գծային զուգակցությամբ: Դիցուք $\vec{a} = \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$: Այստեղից՝

$$(\vec{a}, \vec{a}) = \lambda(\vec{b}, \vec{a}) + \mu(\vec{c}, \vec{a}),$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \lambda(\vec{b}, \vec{b}) + \mu(\vec{c}, \vec{b}),$$

$$(\vec{a},\vec{c})=\lambda(\vec{b},\vec{c})+\mu(\vec{c},\vec{c}):$$

Այսինքն Գրամի որոշիչի առաջին տող-վեկտորն արտահայտվում է երկրորդ և երրորդ տող-վեկտորների գծային զուգակցությամբ: Այնպես, որ նշված որոշիչը հավասար է զրոի:

Այժմ ենթադրենք Գրամի որոշիչն է հավասար զրոի: Այդ դեպքում նրա տող-վեկտորները գծորեն կախյալ վեկտորներ են, այսինքն գոյություն ունեն α,β,γ թվեր, որոնցից գոնե մեկը զրո չէ և

$$\alpha\left\{(\vec{a},\vec{a});\ (\vec{a},\vec{b});\ (\vec{a},\vec{c})\right\}+\beta\left\{(\vec{b},\vec{a});\ (\vec{b},\vec{b});\ (\vec{b},\vec{c})\right\}+$$
$$+\gamma\left\{(\vec{c},\vec{a});\ (\vec{c},\vec{b});\ (\vec{c},\vec{c})\right\}=\vec{0}:$$

Այսինքն՝ $\alpha(\vec{a},\vec{a})+\beta(\vec{b},\vec{a})+\gamma(\vec{c},\vec{a})=0$,

$\alpha(\vec{a},\vec{b})+\beta(\vec{b},\vec{b})+\gamma(\vec{c},\vec{b})=0$, $\alpha(\vec{a},\vec{c})+\beta(\vec{b},\vec{c})+\gamma(\vec{c},\vec{c})=0$:

Կամ

$(\vec{a},\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c})=0$, $(\vec{b},\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c})=0$,

$$(\vec{c},\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c})=0:$$

Որտեղից՝ եթե $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$, ապա $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ վեկտորները գծորեն կախյալ են, այսինքն համահարթ են: Հակառակ դեպքում ևս $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ վեկտորները լինելով ուղղահայաց $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}\neq\vec{0}$ վեկտորին, կլինեն համահարթ:

Խնդիր 7. Ապացուցել, որ կամայական $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ վեկտորների համար $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]=\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}(\vec{a},\vec{b})$ (***բաց մինուս ցաք բանաձև***):

Այսուհետև $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]$ տեսքի արտահայտությունը կանվանենք $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ***վեկտորների կրկնակի վեկտորական արտադրյալ***:

Ապացույցը հարմար է կատարել կոորդինատային մեթոդով:

Դիցուք $\vec{a}=\{a_x;\, a_y;\, a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x;\, b_y;\, b_z\}$, $\vec{c}=\{c_x;\, c_y;\, c_z\}$ որևէ օրթոնորմավորված բազիսում: Ցույց տանք, որ հավասարության աջ և ձախ մասերի վեկտորների համապատասխան կոորդինատները հավասար են միմյանց:

Ունենք՝ $[\vec{b},\vec{c}]=\left\{\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}\right\}$,

այսինքն

$$[\vec{b},\vec{c}]_x=\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}, \qquad [\vec{b},\vec{c}]_y=\begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix}, \qquad [\vec{b},\vec{c}]_z=\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \quad :$$

Հետևաբար՝

$$[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]_x=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ [\vec{b},\vec{c}]_y & [\vec{b},\vec{c}]_z \end{vmatrix}=a_y[\vec{b},\vec{c}]_z-a_z[\vec{b},\vec{c}]_y=$$

$$=a_y\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}-a_z\begin{vmatrix} b_z & b_x \\ c_z & c_x \end{vmatrix}=a_y(b_xc_y-b_yc_x)-a_z(b_zc_x-b_xc_z)=$$

$$=a_yb_xc_y-a_yb_yc_x-a_zb_zc_x+a_zb_xc_z=b_xa_yc_y+b_xa_zc_z-c_xa_yb_y-c_xa_zb_z:$$

Մյուս կողմից

$$\left(\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}(\vec{a},\vec{b})\right)_x=\vec{b}_x(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}_x(\vec{a},\vec{b})=$$

$$=\vec{b}_x(\vec{a}_x\vec{c}_x+\vec{a}_y\vec{c}_y+\vec{a}_z\vec{c}_z)-\vec{c}_x(\vec{a}_x\vec{b}_x+\vec{a}_y\vec{b}_y+\vec{a}_z\vec{b}_z)=$$

$$=\vec{b}_x\vec{a}_x\vec{c}_x+\vec{b}_x\vec{a}_y\vec{c}_y+\vec{b}_x\vec{a}_z\vec{c}_z-\vec{c}_x\vec{a}_x\vec{b}_x-\vec{c}_x\vec{a}_y\vec{b}_y-\vec{c}_x\vec{a}_z\vec{b}_z=$$

$$=b_xa_yc_y+b_xa_zc_z-c_xa_yb_y-c_xa_zb_z:$$

Ստացվեց՝ $[\vec{a},[\vec{b},\vec{c}]]_x=\left(\vec{b}(\vec{a},\vec{c})-\vec{c}(\vec{a},\vec{b})\right)_x$:

Նույն կերպ ապացուցվում է մյուս կոորդինատների հավասարությունը:

Խնդիր 8: Ապացուցել, որ կամայական $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորների համար $([\vec{a},\vec{b}],[\vec{b},\vec{c}],[\vec{c},\vec{a}])=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})^2$:

Ապացուցում: Ըստ խառը արտադրյալի սահմանման՝

$$([\vec{a},\vec{b}],\ [\vec{b},\vec{c}],\ [\vec{c},\vec{a}])=\big([\vec{a},\vec{b}],\ [[\vec{b},\vec{c}],\ [\vec{c},\vec{a}]]\big):$$

Դիտարկելով $[[\vec{b},\vec{c}],\ [\vec{c},\vec{a}]]$ վեկտորը որպես $[\vec{b},\vec{c}]$, $\vec{c}$, $\vec{a}$ վեկտորների կրկնակի վեկտորական արտադրյալ և կիրառելով «բաց-ցաբ բանաձև-ը կստանանք՝

$$([\vec{a},\vec{b}],\ [\vec{b},\vec{c}],\ [\vec{c},\vec{a}])=\big([\vec{a},\vec{b}],\ [[\vec{b},\vec{c}],\ [\vec{c},\vec{a}]]\big)=$$

$$=\big([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}\,([\vec{b},\vec{c}],\vec{a})-\vec{a}\,([\vec{b},\vec{c}],\vec{c})\big)=\big([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}\,(\vec{b},\vec{c},\vec{a})-\vec{a}\,(\vec{b},\vec{c},\vec{c})\big)=$$

$$=\big([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}\,(\vec{b},\vec{c},\vec{a})\big)=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})\big([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}\big)=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\vec{b},\vec{c})^2:$$

Խնդիր 9. Դիցուք $[\vec{a},\vec{r}]=\vec{b}$, $(\vec{c},\vec{r})=\lambda$: Բացահայտորեն արտահայտել $\vec{r}$ վեկտորը $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ վեկտորներով և նրանց հետ կատարվող գործողություններով, եթե $\vec{a}$ վեկտորն ուղղահայաց չէ $\vec{c}$ վեկտորին:

Լուծում: Ունենք $[\vec{a},\vec{r}]=\vec{b}$, $(\vec{c},\vec{r})=\lambda$ և $(\vec{a},\vec{c})\neq 0$: Եթե $[\vec{a},\vec{r}]=\vec{b}$ հավասարման երկու մասը վեկտորապես բազմապատկենք $\vec{c}$ վեկտորով, կստանանք՝ $[[\vec{a},\vec{r}],\vec{c}]=[\vec{b},\vec{c}]$ կամ, որ նույնն է $-\vec{a}(\vec{r},\vec{c})+\vec{r}(\vec{a},\vec{c})=[\vec{b},\vec{c}]$ (տես *խնդիր 7*-ը) :

Այստեղից $\vec{r}(\vec{a},\vec{c})=[\vec{b},\vec{c}]+\lambda\vec{a}$:

Այսինքն՝ $\vec{r}=\dfrac{\lambda}{(\vec{a},\vec{c})}\vec{a}+\dfrac{1}{(\vec{a},\vec{c})}[\vec{b},\vec{c}]$:

Պատ.՝ $\vec{r}=\dfrac{\lambda}{(\vec{a},\vec{c})}\vec{a}+\dfrac{1}{(\vec{a},\vec{c})}[\vec{b},\vec{c}]$:

Խնդիր 10. Դիցուք $(\vec{a},\vec{r})=\alpha$, $(\vec{b},\vec{r})=\beta$, $(\vec{c},\vec{r})=\gamma$: Բացահայտորեն արտահայտել $\vec{r}$ վեկտորը $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

վեկտորներով և նրանց հետ կատարվող գործողություն-ներով, եթե $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ վեկտորները համահարթ չեն:

Լուծում 1. Ունենք $(\vec{a},\vec{r})=\alpha$, $(\vec{b},\vec{r})=\beta$, որտեղից $\vec{b}(\vec{a},\vec{r})-\vec{a}(\vec{b},\vec{r})=\alpha\vec{b}-\beta\vec{a}$, կամ, որ նույնն է $[[\vec{a},\vec{b}],\vec{r}]=$ $\alpha\vec{b}-\beta\vec{a}$ (տես ***խնդիր 7***-ը):

Այսպիսով $[[\vec{a},\vec{b}],\vec{r}]=\alpha\vec{b}-\beta\vec{a}$ և $(\vec{c},\vec{r})=\gamma$:

Ըստ նախորդ խնդրի՝

$$\vec{r}=\frac{\gamma}{([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})}[\vec{a},\vec{b}]+\frac{1}{([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})}[\alpha\vec{b}\text{-}\beta\vec{a},\vec{c}]$$

կամ որ նույնն է

$$\vec{r}=\frac{\alpha}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}[\vec{b},\vec{c}]+\frac{\beta}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}[\vec{c},\vec{a}]+\frac{\gamma}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}[\vec{a},\vec{b}]:$$

Պատ.՝ $\vec{r}=\frac{\alpha}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}[\vec{b},\vec{c}]+\frac{\beta}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}[\vec{c},\vec{a}]+\frac{\gamma}{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}[\vec{a},\vec{b}]:$

Լուծում 2. Քանի որ $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ վեկտորները համահարթ չեն, ապա $\vec{r}$-ը կարող ենք արտահայտել նրանց գծային զուգակցությամբ: Դիցուք $\vec{r}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$: Այս հավասա-րության երկու մասերը հաջորդաբար $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ վեկտորներով սկալյարապես բազմապատկելով, կստանանք

$$\begin{cases}(\vec{a},\ \vec{r})=x(\vec{a},\ \vec{a})+y(\vec{a},\ \vec{b})+z(\vec{a},\ \vec{c})\\(\vec{b},\ \vec{r})=x(\vec{b},\ \vec{a})+y(\vec{b},\ \vec{b})+z(\vec{b},\ \vec{c})\\(\vec{c},\ \vec{r})=x(\vec{c},\ \vec{a})+y(\vec{c},\ \vec{b})+z(\vec{c},\ \vec{c})\end{cases}:$$

Այսինքն

$$\begin{cases}(\vec{a},\ \vec{a})x+(\vec{a},\ \vec{b})y+(\vec{a},\ \vec{c})z=\alpha\\(\vec{b},\ \vec{a})x+(\vec{b},\ \vec{b})y+(\vec{b},\ \vec{c})z=\beta\\(\vec{c},\ \vec{a})x+(\vec{c},\ \vec{b})y+(\vec{c},\ \vec{c})z=\gamma\end{cases}:$$

Քանի որ $\begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{a}) & (\vec{a},\vec{b}) & (\vec{a},\vec{c}) \\ (\vec{b},\vec{a}) & (\vec{b},\vec{b}) & (\vec{b},\vec{c}) \\ (\vec{c},\vec{a}) & (\vec{c},\vec{b}) & (\vec{c},\vec{c}) \end{vmatrix} \neq 0$ (տես ***խնդիր 6.-ը***),

ապա այս համակարգից ունենք՝ $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \dfrac{\Delta_z}{\Delta}$,

որտեղ

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} \alpha & (\vec{a},\vec{b}) & (\vec{a},\vec{c}) \\ \beta & (\vec{b},\vec{b}) & (\vec{b},\vec{c}) \\ \gamma & (\vec{c},\vec{b}) & (\vec{c},\vec{c}) \end{vmatrix}, \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{a}) & \alpha & (\vec{a},\vec{c}) \\ (\vec{b},\vec{a}) & \beta & (\vec{b},\vec{c}) \\ (\vec{c},\vec{a}) & \gamma & (\vec{c},\vec{c}) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{a}) & (\vec{a},\vec{b}) & \alpha \\ (\vec{b},\vec{a}) & (\vec{b},\vec{b}) & \beta \\ (\vec{c},\vec{a}) & (\vec{c},\vec{b}) & \gamma \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} (\vec{a},\vec{a}) & (\vec{a},\vec{b}) & (\vec{a},\vec{c}) \\ (\vec{b},\vec{a}) & (\vec{b},\vec{b}) & (\vec{b},\vec{c}) \\ (\vec{c},\vec{a}) & (\vec{c},\vec{b}) & (\vec{c},\vec{c}) \end{vmatrix}:$$

Հետևաբար $\vec{r} = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}\vec{a} + \dfrac{\Delta_y}{\Delta}\vec{b} + \dfrac{\Delta_z}{\Delta}\vec{c}$:

Պատ.՝ $\vec{r} = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}\vec{a} + \dfrac{\Delta_y}{\Delta}\vec{b} + \dfrac{\Delta_z}{\Delta}\vec{c}$:

Խնդիր 11. Տրված են $\vec{a} = \{8;\ 4;\ 1\}$, $\vec{b} = \{2;\ 2;\ 1\}$ և $\vec{c} = \{1;\ 1;\ 1\}$ երեք վեկտորները: Գտնել $\vec{d}$ միավոր վեկտոր, որը $\vec{a}$ և $\vec{b}$ վեկտորների հետ կազմում է հավասար անկյուններ, ուղղահայաց է $\vec{c}$ վեկտորին և ուղղված է այնպես, որ կարգավորված վեկտորների $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ ու $(\vec{a},\vec{b},\vec{d})$ եռյակներն ունեն նույն կողմնորոշումը:

Լուծում: Դիցուք $\vec{d} = \{x;\ y;\ z\}$:

Ունենք

$|\vec{d}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 1$, $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{d}}) = \cos(\widehat{\vec{b},\vec{d}})$, $(\vec{d},\vec{c}) = 0$:

Ընդ որում

$|\vec{a}| = \sqrt{8^2+4^2+1^2} = 9$, $|\vec{b}| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = 3$, $|\vec{c}| = \sqrt{3}$,

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{d}}) = \frac{(\vec{a},\vec{d})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{d}|} = \frac{8x+4y+z}{9},$$

$$\cos(\widehat{\vec{b},\vec{d}}) = \frac{(\vec{b},\vec{d})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{d}|} = \frac{2x+2y+z}{3}, \quad (\vec{d},\vec{c}) = x+y+z:$$

Քանի որ $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ ու $(\vec{a},\vec{b},\vec{d})$ եռյակները ունեն նույն կողմնորոշումը, ուստի $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\cdot(\vec{a},\vec{b},\vec{d}) > 0$: Այնպես, որ

$$\begin{cases} 8x+4y+z = 6x+6y+3z \\ x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \quad \text{և} \quad \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} > 0:$$

Կամ, որ նույն $\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$ և $4(2x-6y+8z) > 0$:

Հավասարումների համակարգի լուծումներն են $(0; -\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2)$ ու $(0; \dfrac{\sqrt{2}}{2}; -\dfrac{\sqrt{2}}{2})$ եռյակները, որոնցից առաջին եռյակն է բավարարում $4(2x-6y+8z) > 0$ պայմանին:

Պատ.՝ $\vec{d} = \left\{0; -\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2\right\}$:

Խնդիր 12. Գրել հարթության կոորդինատային համակարգերի ձևափոխության բանաձևերը, եթե նոր համակարգի $O'X'$ և $O'Y'$ առանցքների հավասարումները են համապատասխանաբար $3x-2y-4=0$ և $2x-y-3=0$, իսկ նոր համակարգի միավոր կետն է $E=(7;9)$:

Լուծում: Կոորդինատային համակարգերի ձևափոխության բանաձևերն են

$$x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_1, \; y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_2,$$

իսկ նոր կոորդինատային համակարգի բազիսային վեկտորներն ու սկզբնակետը համապատասխանաբար $\vec{e_1'} = \{c_{11}; c_{21}\}$, $\vec{e_2'} = \{c_{12}; c_{22}\}$ ու $O' = (c_1; c_2)$: Նախ հավասարումների $3x - 2y - 4 = 0$, $2x - y - 3 = 0$ համակարգից գտնում ենք $O' = (2; 1)$ կետը, որտեղից $c_1 = 2$, $c_2 = 1$:

Ըստ պայմանի

$\overrightarrow{O'E} = \vec{e_1'} + \vec{e_2'} = \{c_{11} + c_{12}; \; c_{21} + c_{22}\}$, $\overrightarrow{O'E} = \{5; 8\}$,

հետևաբար $c_{11} + c_{12} = \; = 5$, $c_{21} + c_{22} = 8$:

Ունենք $O'X'$ առանցքի հավասարումը OXY համակարգում $3x - 2y - 4 = 0$-ն է:

Մյուս կողմից նրա հավասարումը $O'X'Y'$ համակարգում $y' = 0$-ն է: Տեղադրելով վերջինս կոորդինատային համակարգերի ձևափոխության բանաձևերի մեջ, ստանում ենք

$$x = c_{11}x' + 2, \; y = c_{21}x' + 1,$$

և հետևաբար $3(c_{11}x' + 2) - 2(c_{21}x' + 1) - 4 = 0$

այստեղից՝ $3c_{11} - 2c_{21} = 0$:

Նման ձևով, օգտվելով $O'Y'$ առանցքի նոր և հին համակարգերում հավասարումներից՝ $x' = 0$, $2x - y - 3 = 0$, ստանում ենք $x = c_{12}y' + 2$, $y = c_{22}x' + 1$, $2(c_{12}y' + 2) - (c_{22}x' + 1) - 3 = 0$,

որտեղից $c_{12} - c_{22} = 0$:

Վերջապես, լուծելով հավասարումների

$3c_{11} - 2c_{21} = 0$, $2c_{12} - c_{22} = 0$, $c_{11} + c_{12} = 5$, $c_{21} + c_{22} = 8$

համակարգը, գտնում ենք $c_{11} = 4$, $c_{12} = 1$, $c_{21} = 6$, $c_{22} = 2$:

Պատ.՝ $x = 4x' - y' + 2$, $y = 6x' + 2y' + 1$:

Խնդիր 13. Գտնել այն կետերի երկրաչափական տեղը, որոնցից յուրաքանչյուրի հեռավորությունների քառակուսիների գումարը տրված եռանկյան գագաթներից հաստատուն է:

Լուծում: Արտածենք երկրաչափական տեղի հավասարումը: Դիցուք M-ը որոնելի երկրաչափական տեղին պատկանող որևէ կետ է: Այսինքն $MA_1^2+MA_2^2+MA_3^2=c$, որտեղ A_1-ը, A_2-ը և A_3-ը տրված եռանկյան գագաթներն են, իսկ c-ն հաստատուն է:

Դիտարկենք որևէ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգ: Դիցուք $A_1=(x_1;\ y_1)$, $A_2=(x_2;\ y_2)$, $A_3=(x_3;\ y_3)$, $M=(x;\ y)$ այդ համակարգի նկատմամբ: Օգտվելով երկու կետերի միջև հեռավորության բանաձևից, կարող ենք գրել

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(x-x_3)^2+(y-y_3)^2=c,$$

որտեղից՝

$$3x^2-2x(x_1+x_2+x_3)+3y^2-2x(y_1+y_2+y_3)=$$
$$=c-(x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+x_3^2+y_3^2):$$

Երկու կողմերը բաժանելով 3-ի վրա և անջատելով լրիվ քառակուսիներ ըստ x-ի և y-ի, կստանանք

$$\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{3}c-\frac{1}{3}(x_1^2+y_1^2+x_2^2+\ y_2^2+x_3^2+y_3^2)+\frac{1}{9}(x_1+x_2+x_3)^2+$$
$$+\frac{1}{9}(y_1+y_2+y_3)^2:$$

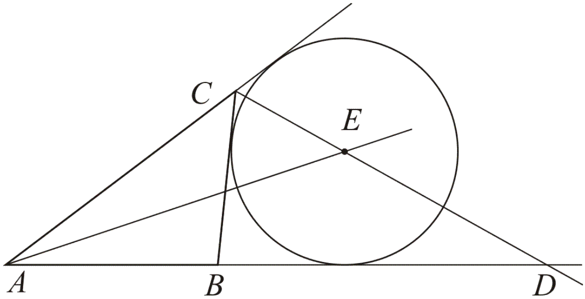
Կամ

$$\left(x-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2=\frac{1}{3}c-\frac{1}{9}\Big((x_1-x_2)^2+$$
$$+(y_1-y_2)^2+(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2\Big)=$$

$$=\left(3c-(A_1A_2)^2-(A_2A_3)^2-(A_3A_1)^2\right)\Big/9:$$

Այսպիսով, եթե $c>\left((A_1A_2)^2+(A_2A_3)^2+(A_3A_1)^2\right)\Big/3$, ապա կետերի որոնելի երկրաչափական տեղը շրջանագիծ է, որի կենտրոնը տրված եռանկյան միջնագծերի հատման $\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3};\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$ կետն է, իսկ շառավիղը հավասար է $\sqrt{3c-(A_1A_2)^2-(A_2A_3)^2-(A_3A_1)^2}\Big/3$:

Խնդիր 14. Տրված են ABC եռանկյան $A=(4;\,4)$, $B=(-6;\,-1)$, $C=(-2;\,-4)$ գագաթները: Որոշել այն շրջանագծի կենտրոնի կոորդինատները, որը շոշափում է BC կողմին և AC ու AB կողմերի շարունակություններին:



Լուծում: Որոնելի E կետը եռանկյան A ներքին և C արտաքին անկյունների կիսորդների հատման կետն է:

Նախ երկու կետերի միջև հեռավորության բանաձևով գտնում ենք եռանկյան կողմերը՝ $AB=5\sqrt{5}$, $BC=5$, $AC=10$:

Ըստ ABC եռանկյան C արտաքին անկյան CD կիսորդի հատկության ունենք $\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AC}{BC}=2$, հետևաբար $\overrightarrow{AD}=-2\overrightarrow{DB}$: Այսինքն AB հատվածը D կետով բաժանվում է $\lambda=-2$ հարաբերությամբ, ուստի

$$x_D=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda}=\frac{4+(-2)\cdot(-6)}{1-2}=-16,$$

$$y_D=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda}=\frac{4+(-2)\cdot(-1)}{1-2}=-6,$$ $D=(-16;\,-6)$ ։ Այնպես, որ $AD=10\sqrt{5}$ ։ Ըստ ACD եռանկյան A ներքին անկյան AE կիսորդի հատկության $\frac{DE}{CE}=\frac{AD}{AC}=\sqrt{5}$, հետևաբար $\overrightarrow{DE}=\sqrt{5}\cdot\overrightarrow{EC}$ ։ Դարձյալ կիրառելով հատվածը տրված հարաբերությամբ բաժանելու բանաձևը, գտնում ենք

$$x_E=\frac{x_D+\lambda x_C}{1+\lambda}=\frac{-16+\sqrt{5}\cdot(-2)}{1+\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\left(3-7\sqrt{5}\right),$$

$$y_E=\frac{y_D+\lambda y_C}{1+\lambda}=\frac{-6+\sqrt{5}\cdot(-4)}{1+\sqrt{5}}=-\frac{1}{2}\left(7+\sqrt{5}\right):$$

Պատ.՝ $\left(\left(3-7\sqrt{5}\right)/2;\,-\left(7+\sqrt{5}\right)/2\right)$ ։

ՈՒՂԻՂԸ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

Ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում $\vec{n}=\{A;\,B\}$ վեկտորն ուղղահայաց է $Ax+By+C=0$ ուղղին և կոչվում է այդ ուղղի *նորմալ վեկտոր*:

Եթե $\vec{n}$-ը միավոր վեկտոր է՝ $|\vec{n}|=1$, ապա $Ax+By+C=0$ հավասարումը կոչվում է ուղղի *նորմավորված հավասարում*: Ուղղի ցանկացած հավասարում կարելի է նորմավորել՝

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

կամ

$$-\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x-\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y-\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0:$$

Երբեմն ուղղի նորմավորված հավասարումը ներկայացվում է միակ՝

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

հավասարումով, որտեղ p-ն կոորդինատային սկզբնակետի հեռավորությունն է ուղղից, իսկ $\cos\alpha$-ն և $\sin\alpha$-ն ուղղի միավոր նորմալ վեկտորի կոորդինատներն են, որոշված ուղղի այն հավասարումով, որի նկատմամբ կոորդինատային սկզբնակետը գտնվում է բացասական կիսահարթության մեջ:

Հարթության ցանկացած $M_0=(x_0;\ y_0)$ կետի հեռավորությունը $Ax+By+C=0$ ուղղից որոշվում է

$$h(M_0)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$ բանաձևով:

Խնդիր 15. Գրել $A_1x+B_1y+C_1=0$ և $A_2x+B_2y+C_2=0$ հատվող ուղիղներով կազմված անկյունների կիսորդների հավասարումները:

Լուծում: Տրված ուղիղները հատվելով առաջացնում են երկու զույգ հակադիր անկյուններ: Այդ անկյունների կիսորդներին պատկանող բոլոր $(x_0;\ y_0)$ կետերը հավասարահեռ են տրված ուղիղներից և հակառակը:

Հետևաբար $$\frac{|A_1x_0+B_1y_0+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{|A_2x_0+B_2y_0+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}:$$

Ուստի

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}:$$

որոնելի կիսորդների հավասարումներն են:

Նկատենք, որ աջ մասում դրված $\pm$ նշաններն ունեն որոշակի երկրաչափական իմաստ: Տրված ուղիղներից յուրաքանչյուրը հարթությունը բաժանում է երկու կիսահարթությունների՝

դրական և բացասական: Վերը գրված կիսորդներից առաջինն անցնում է նույնանուն, իսկ երկրորդը՝ տարանուն կիսահարթություններին պատկանող կետերով:

Խնդիր 16. Գրել $11x-2y+4=0$ և $2x+y-9=0$ ուղիղներով կազմված այն անկյան կիսորդի հավասարումը, որի ներսում գտնվում է $(1;\ 5)$ կետը:

Լուծում: Քանի որ $11:2 \neq (-2):1$, ուստի տրված ուղիղները հատվում են: Ըստ նախորդ խնդրի, այդ ուղիղներով կազմված անկյունների կիսորդների հավասարումներն են

$$\frac{11x-2y+4}{\sqrt{125}} = \pm\frac{2x+y-9}{\sqrt{5}}\ :$$

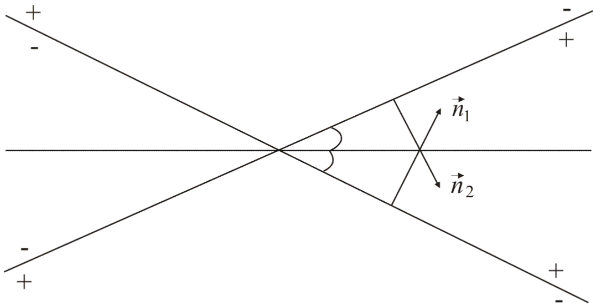
Քանի որ $(1;\ 5)$ կետը առաջին ուղղի նկատմամբ գտնվում է դրական, իսկ երկրորդի նկատմամբ՝ բացասական կիսահարթություններում, ուստի որոնելի կիսորդի հավասարումն է $11x-2y+4=-5(2x+y-9)$, որտեղից $21x+3y-41=0$:

Պատ.՝ $21x+3y-41=0$:

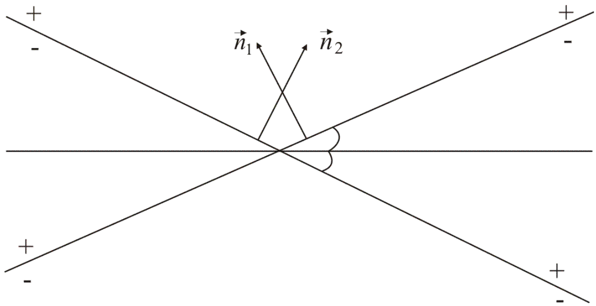
Խնդիր 17. Գրել $7x-y+1=0$ և $x+y-2=0$ ուղիղներով կազմված բութ անկյան կիսորդի հավասարումը:

Լուծում: Ինչպես հայտնի է $Ax+By+C=0$ ուղղի ցանկացած կետից $\vec{n}=\{A;\ B\}$ նորմալ վեկտորը կիրառելիս նրա ծայրակետը կգտնվի դրական կիսահարթության մեջ: Հետևաբար, եթե այդ ուղիղների նորմալ վեկտորները կազմեն բութ անկյուն, ապա այդ ուղիղներով կազմված սուր անկյան կիսորդը կանցնի նույնանուն կիսահարթությունների կետերով, մյուս դեպքում՝ տարանուն կիսահարթությունների կետերով: Դրանում կարելի է համոզվել հետևյալ գծագրի օգնությամբ.

ա) երբ $(\widehat{\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}}) > 90^0$



բ) երբ $(\widehat{\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}}) < 90^0$



Տվյալ խնդրում $\vec{n}_1 = \{7; -1\}$, $\vec{n}_2 = \{1; 1\}$ և $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = 6 > 0$: Այսինքն նորմալների կազմած անկյունը սուր է, ուստի որոնելի կիսորդն անցնում է նույնանուն կիսահարթություններով: Հետևաբար, ունենք $(7x - y + 1)\big/\sqrt{50} = (x + y - 2)\big/\sqrt{2}$, որտեղից $5x - 6y + 11 = 0$:

Պատ.՝ $5x - 6y + 11 = 0$:

Խնդիր 18. Ապացուցել, որ $Ax+By+C=0$ ուղիղը շոշափում է $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ էլիպսին այն և միայն այն դեպքում, երբ $A^2a^2+B^2b^2=C^2$:

Ապացուցում: Դիցուք $Ax+By+C=0$ ուղիղը շոշափում է էլիպսին նրա $M_0=(x_0;\ y_0)$ կետում: Ինչպես գիտենք, այդ կետով անցնող շոշափողի հավասարման տեսքն է $\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y-1=0$, ընդ որում $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1\ (*)$: Քանի որ տվյալ կետով անցնող շոշափողը միակն է, ուստի երկու ուղիղների համընկնելիության $A:\frac{x_0}{a^2}=B:\frac{y_0}{b^2}=C:(-1)$ պայմանից գտնում ենք $x_0=-\frac{a^2A}{C},\ y_0=-\frac{b^2B}{C}$: Տեղադրելով այն $(*)$-ի մեջ, ստանում ենք $A^2a^2+B^2b^2=C^2$:

Պայմանի բավարարությունն ապացուցելու համար դիտարկենք $M_0=\left(-\frac{a^2A}{C};\ -\frac{b^2B}{C}\right)$ կետը: Տեղադրելով M_0-ի կոորդինատները էլիպսի հավասարման մեջ և օգտվելով $A^2a^2+B^2b^2=C^2$ պայմանից, համոզվում ենք, որ M_0-ն գտնվում է էլիպսի վրա: Այնուհետև, կազմելով այդ կետով տարված էլիպսի շոշափողի հավասարումը, ստանում ենք

$$\frac{-\frac{a^2A}{C}}{a^2}x+\frac{-\frac{b^2B}{C}}{b^2}-1=0 \quad \text{կամ} \quad Ax+By+C=0:$$

Խնդիր 19. Կազմել $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{1}=1$ և $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ էլիպսների ընդհանուր շոշափողների հավասարումները:

Լուծում: Նախ նկատենք, որ OY առանցքին զուգահեռ ուղիղը չի կարող միաժամանակ շոշափել այս երկու էլիպսներին: Հետևաբար նրանց ընդհանուր շոշափողի հավասարումները կարող ենք որոնել $y=kx+m$, կամ $kx-y+m=0$ տեսքով: Օգտվելով նախորդ խնդրից, գրենք այդ ուղղի համար էլիպսներին շոշափելու պայմանները՝ $6k^2+1=m^2$, $4k^2+9=m^2$: Այստեղից գտնում ենք՝ $k=\pm 2$, $m=\pm 5$:

Պատ.՝ Չորս ընդհանուր շոշափող՝ $y=\pm 2x+5$, $y=\pm 2x-5$:

Խնդիր 20. Կազմել $(-4;5)$ կետով անցնող պարաբոլի հավասարումը, եթե $2x-3y-1=0$ ուղիղը նրա տրամագիծ է, իսկ $x+2y-4=0$ ուղիղը՝ այդ տրամագծի և պարաբոլի հատման կետով տարված շոշափող:

Լուծում: Ինչպես գիտենք, եթե աֆինական կոորդինատային համակարգի O' սկզբնակետը գտնվում է պարաբոլի վրա, իսկ $O'X'$ և $O'Y'$ առանցքները համապատասխանաբար այդ կետով անցնող տրամագիծը և շոշափողն են, ապա պարաբոլի հավասարումն ունի $y'^2=2p'x'$ (*) տեսք: Որպես նոր՝ $\left(O';\overrightarrow{e_1'},\overrightarrow{e_2'}\right)$ կոորդինատային համակարգի սկզբնակետ վերցնենք տրամագծի և շոշափողի հատման $O'=(2;1)$ կետը, իսկ որպես բազիսային վեկտորներ՝ այդ ուղիղների $\overrightarrow{e_1'}=\{3;2\}$, $\overrightarrow{e_2'}=\{-2;1\}$ ուղղորդ վեկտորները: Գրենք կոորդինատային ձևափոխության բանաձևերը՝

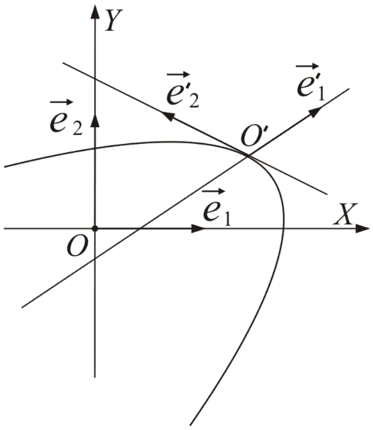
$x = 3x' - 2y' + 2$, $\quad y = 2x' + y' + 1$,

որտողից $\quad x' = \dfrac{x + 2y - 4}{7}$ և

$y' = \dfrac{-2x + 3y + 1}{7}$ արժեքները

տեղադրելով $(*)$-ի մեջ կստանանք՝

$$\left(\frac{-2x + 3y + 1}{7}\right)^2 = 2p' \cdot \frac{x + 2y - 4}{7}:$$



Այնուհետև, քանի որ պարաբոլն անցնում է $(-4; 5)$ կետով, ապա տեղադրելով այս հավասարման մեջ $x = -4$, $y = 5$ կստանանք $p' = -1/7$: Հետևաբար պարաբոլի հավասարումն է՝

$(-2x + 3y + 1)^2 + 2(x + 2y - 4) = 0$ կամ $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + {}$ $+10y - 7 = 0$: Այս խնդրի լուծման մեկ այլ եղանակ տալիս է № 843 խնդիրը:

Պատ.՝ $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 10y - 7 = 0$:

Խնդիր 21. Դիցուք ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգում $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ և $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ հավասարումները պատկերում են հատվող ուղիղների զույգ: Ապացուցել, որ ցանկացած $C \neq 0$ թվի համար

$$(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) - C = 0 \qquad (1)$$

հավասարումը պատկերում է հիպերբոլ, որի համար տրված ուղիղները ասիմպտոտներ են:

Լուծում: Խնդրի պայմանից հետևում է, որ

$$(A_1x + B_1y + C_1)(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \quad A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0 \qquad (2)$$

հավասարումը պատկերում է հատվող ուղիղների զույգ:

Դիցուք δ և Δ ինվարիանտների արժեքները (1) և (2) կորերի համար հավասար են համապատասխանաբար

δ_1, Δ_1 և δ_2, Δ_2: Ըստ կորի տեսակի դասակարգման աղյուսակի, հատվող ուղիղների զույգը բնութագրվում է $\delta_2 < 0,\ \Delta_2 = 0$ պայմաններով: Քանի որ (1) և (2) հավասարումների ձախ մասերում բազմանդամների գործակիցները տարբերվում են միայն $C_1C_2 - C$ և C_1C_2 ազատ անդամներով, ուստի $\delta_1 = \delta_2$, և ուրեմն $\delta_1 < 0$: Ցույց տանք, որ $\Delta_1 \neq 0$: Դրա համար նկատենք, որ

$$\Delta_1 - \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} (a_0 - a') = -\delta_2 C:$$

Այստեղից , հաշվի առնելով, որ $\Delta_2 = 0$ կստանանք

$$\Delta_1 = -C\delta_2 = C(A_1B_2 - A_2B_1) \neq 0:$$

Այնպես որ $\delta_1 < 0,\ \Delta_1 \neq 0$, ուստի (1) կորը հիպերբոլ է:

Քանի որ (1) և (2) կորերը ակնհայտորեն չեն հատվում և ունեն միևնույն ասիմպտոտական ուղղությունները, ուստի $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ և $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ուղիղները (1) հիպերբոլի ասիմպտոտներն են:

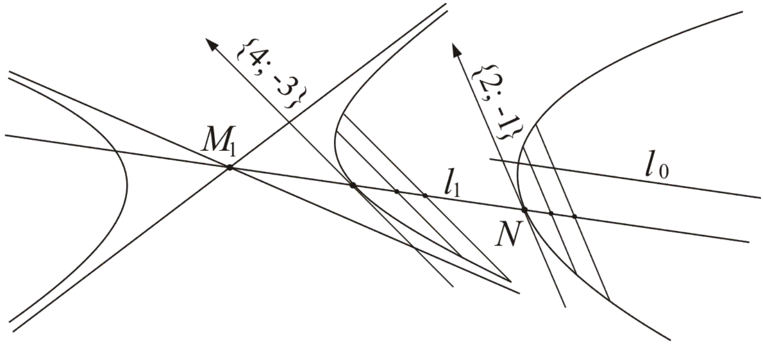
Այս խնդրի մեկ այլ լուծում կարելի է ստանալ աֆինական ձևափոխությունների միջոցով (տես №840 խնդիրը):

Խնդիր 22. Տրված են $12xy + 5y^2 - 12x - 22y - 19 = 0$ և $4x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 4y - 7 = 0$ երկրորդ կարգի կորերը: Գտնել նրանց ընդհանուր տրամագիծը և այդ կորերի այն լարերի ուղղությունները, որոնց համալուծ են այդ տրամագծերը:

Լուծում: Նախ որոշենք տրված կորերի կենտրոնները: Այդ նպատակով յուրաքանչյուր կորի համար կազմենք և լուծենք հավասարումների

$a_{11}x+a_{12}y+a_1=0$, $a_{21}x+a_{22}y+a_2=0$ համակարգը:

Առաջին կորի համար $0\cdot x+6y-6=0$, $6x+5y-11=0$ համակարգից ստանում ենք միակ՝ $(1;1)$ լուծումը: Այսինքն կորը միակենտրոն կոր է: Երկրորդ կորի համար $4x-2y-1{,}5=0$, $-2x+y+2=0$ համակարգը լուծում չունի: Նշանակում է կորը պարաբոլ է (պարաբոլները միակ երկրորդ կարգի կորերն են, որ կենտրոն չունեն): Հետևաբար որոնելի ընդհանուր l_1 տրամագիծը պետք է անցնի $M_1=(1;1)$ կետով և լինի զուգահեռ պարաբոլի համաչափության l_0 առանցքին, քանի որ պարաբոլի բոլոր տրամագծերը զուգահեռ են միմյանց, որոնցից մեկը l_0-ն է (տես գծագիրը):



Պարաբոլի համաչափության առանցքի ուղղությունը նրա հատուկ ուղղությունն է, որը որոշվում է $a_{11}\alpha+a_{12}\beta=0$, $a_{21}\alpha+a_{22}\beta=0$ համակարգից: Այստեղից գտնում ենք՝ $\beta=2\alpha$ և ստանում $\{1;\ 2\}$ուղղությունը: Ուստի կորերի ընդհանուր տրամագծի հավասարումն է $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}$ կամ $2x-y-1=0$:

Այժմ գտնենք կորերի այն լարերի ուղղությունները, որոնց համալուծ է այդ տրամագիծը: Օգտվելով ուղղությունների համալուծության $a_{11}\alpha\alpha' + a_{12}(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + a_{22}\beta\beta' = 0$ (*) պայմանից, առաջին՝ միակենտրոն կորի համար, որոնելի $\{\alpha';\ \beta'\}$ ուղղությունը գտնում ենք միարժեքորեն, որպես $\{\alpha;\ \beta\} = \{1;\ 2\}$ ուղղության համալուծ ուղղություն: Ունենք $0\cdot 1\cdot\alpha' + 6(1\cdot\beta' + 2\cdot\alpha') + 5\cdot 2\cdot\beta' = 0$, որտեղից ստանում ենք $\{\alpha';\ \beta'\} = \{4;\ -3\}$ուղղությունը:

Երկրորդ կորի՝ պարաբոլի համար, $\{1;\ 2\}$ ուղղության համալուծ ուղղությունը (*) պայմանից միարժեքորեն չի որոշվում: Այս դեպքում լարերի ուղղությունը գտնելու համար, նախ գտնենք պարաբոլի և ընդհանուր տրամագծի հատման N կետը: Լուծելով $\begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ 4x^2 - 4xy + y^2 - 3x + 4y - 7 = 0 \end{cases}$ համակարգը գտնում ենք՝ $N = (2;\ 3)$:

Ինչպես գիտենք կորին պատկանող կետով անցնող տրամագծի ուղղությունը համալուծ է այդ կետով կորին տարված շոշափողի ուղղությանը: Ուստի պարաբոլի հենց N կետով տարված շոշափողի ուղղությունն էլ կլինի նրա լարերի որոնելի ուղղությունը:

Տեղադրելով կորի $M_0(x_0; y_0)$ կետով նրան տարված շոշափողի ուղղորդ վեկտորի $\{-F_2(x_0; y_0);\ F_1(x_0; y_0)\} = \{-(a_{21}x_0 + a_{22}\,y_0 + a_2);\ (a_{11}x_0 + a_{12}\,y_0 + a_1)\}$ արտահայտության մեջ $x_0 = 2,\ y_0 = 3$, ստանում ենք որոնելի ուղղությունը՝ $\{\alpha'';\ \beta''\} = \{2;\ -1\}$:

Պատ.՝ Կորերի ընդհանուր տրամագիծն է՝ $2x - y - 1 = 0$ ուղիղը, նրան համալուծ լարերի ուղղություններն են՝ $\{\alpha';\ \beta'\} = \{4;\ -3\}$ առաջին կորի համար, և $\{\alpha'';\ \beta''\} = \{2;\ -1\}$ երկրորդ կորի համար:

Խնդիր 23. Որոշել $5x^2+6xy+5y^2-16x-16y-16=0$ կորի տեսակը, կանոնական հավասարումը և գտնել կանոնական կոորդինատային համակարգ, կիրառելով կոորդինատային համակարգի ձևափոխություն: Կատարել գծագիր:

Լուծում: Նախ ազատվենք $6xy$ միանդամից կատարելով կոորդինատային համակարգի պտույտ O սկզբնակետի շուրջը: Այդ նպատակով հավասարման մեջ տեղադրենք

$x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi$, $\quad y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi$

և պարզեցնենք այն.

$$5(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)^2+6(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)\cdot$$
$$\cdot(x'\sin\varphi+y'\cos\varphi)+5(x'\sin\varphi+y'\cos\varphi)^2-16(x'\cos\varphi-$$
$$-y'\sin\varphi)-16(x'\sin\varphi+y'\cos\varphi)-16=0;$$

կամ

$$(5\cos^2\varphi+6\cos\varphi\sin\varphi+5\sin^2\varphi)x'^2+(6\cos^2\varphi-6\sin^2\varphi)x'y'+$$
$$+(5\sin^2\varphi-6\sin\varphi\cos\varphi+5\cos^2\varphi)y'^2+(-16\cos\varphi-16\sin\varphi)x'+$$
$$+(16\sin\varphi-16\cos\varphi)y'-16=0:$$

Որոշենք պտույտի φ անկյունը $6\cos^2\varphi-6\sin^2\varphi=0$ հավասարումից ունենք $tg\varphi=1$ կամ $tg\varphi=-1$ որտեղից ընդունելով օրինակ $\varphi=-\pi/4$, կունենանք $\cos\varphi=\sqrt{2}/2$, $\sin\varphi=-\sqrt{2}/2$: Տեղադրելով հավասարման մեջ կստանանք $2x'^2+8y'^2-16\sqrt{2}y'-16=0$, կամ անջատելով լրիվ քառակուսիներ՝ $2x'^2+8(y'-\sqrt{2})^2-32=0$:

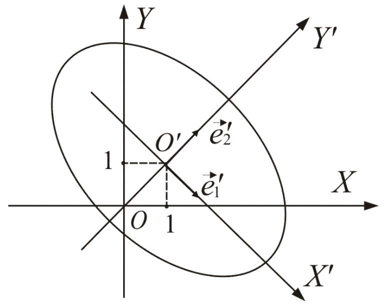
Այժմ կատարելով $OX'Y'$ կոորդինատային համակարգի զուգահեռ տեղափոխություն $x'=x''$, $y'=y''-\sqrt{2}$ բանաձևերով, կստանանք նոր՝ $O'X''Y''$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգ, որի նկատմամբ կորի հավասարումն է՝ $x''^2+4y''^2=16$ կամ $\dfrac{x''^2}{16}+\dfrac{y''^2}{4}=1$:

Այնպես, որ կորը էլիպս է, որի կիսառանցքներն են համապատասխանաբար 4 և 2:

Կորդինատների ձևափոխության բանաձևերից գտնում ենք $O'=(1;1)$, իսկ բազիսային վեկտորներն են՝

$$\vec{e_1'}=\left\{1/\sqrt{2};-1/\sqrt{2}\right\},\ \vec{e_2'}=\left\{1/\sqrt{2};1/\sqrt{2}\right\}:$$

Կորի դիրքը սկզբնական կոորդինատային համակարգի նկատմամբ հետևյալն է՝



Խնդիր 24. Որոշել $6xy-8y^2+12x-26y-29=0$ կորի տեսակը, կանոնական հավասարումը և գտնել կանոնական կոորդինատային համակարգ, կիրառելով կոորդինատային համակարգի ձևափոխություն:
Կատարել գծագիր:

Լուծում: Նախորդ խնդրի լուծման նմանությամբ, նախ ազատվենք $6xy$ միանդամից կատարելով կոորդինատների համակարգի պտույտ O սկզբնակետի շուրջը: Այդ նպատակով հավասարման մեջ տեղադրենք

$$x=x'\cos\varphi-y'\sin\varphi,\quad y=x'\sin\varphi+y'\cos\varphi$$

և պարզեցնենք այն.

$$6(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)(x'\sin\varphi+y'\cos\varphi)\ -8(x'\sin\varphi+y'\cos\varphi)^2+$$
$$+12(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)-26(x'\sin\varphi++y'\cos\varphi)-29=0;$$

կամ

$$(6\cos\varphi\sin\varphi-8\sin^2\varphi)x'^2+(6\cos^2\varphi-16\cos\varphi\sin\varphi-$$
$$-6\sin^2\varphi)x'y' \;-(6\sin\varphi\cos\varphi+8\cos^2\varphi)y'^2+(12\cos\varphi-$$
$$-26\sin\varphi)x'-(12\cos\varphi+26\cos\varphi)y'-29=0:$$

Որոշենք պտույտի φ անկյունը.

$6\cos^2\varphi-16\cos\varphi\sin\varphi-6\sin^2\varphi=0$ հավասարումից ունենք $3tg^2\varphi+8tg\varphi-3=0,$ որտեղից $tg\varphi=1/3$ կամ $tg\varphi=-3:$ Ընտրելով $tg\varphi=\dfrac{1}{3},\ 0<\varphi<\dfrac{\pi}{2},$ կստանանք $\cos\varphi=3/\sqrt{10},\ \ \sin\varphi=1/\sqrt{10}:$ Գտնելով նոր հավասարման գործակիցները՝

$$(6\cos\varphi\sin\varphi-8\sin^2\varphi)=6\cdot\frac{3}{10}-8\cdot\frac{1}{10}=1,$$

$$(-6\sin\varphi\cos\varphi-8\cos^2\varphi)=-6\cdot\frac{3}{10}-8\cdot\frac{9}{10}=-9,$$

$$(12\cos\varphi-26\sin\varphi)=\frac{36}{\sqrt{10}}-\frac{26}{\sqrt{10}}=\sqrt{10},$$

$$(-12\cos\varphi-26\cos\varphi)=-\frac{12}{\sqrt{10}}-\frac{78}{\sqrt{10}}=-\frac{90}{\sqrt{10}}=-9\sqrt{10}$$

կստանանք $x'^2-9y'^2+\sqrt{10}x'-9\sqrt{10}y'-29=0,$

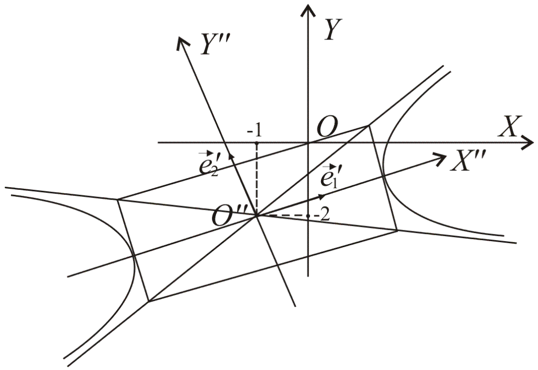
կամ $\left(x'+\sqrt{10}/2\right)^2-9\left(y'+\sqrt{10}/2\right)^2=9:$ Այժմ կատարելով կոորդինատային $OX'Y'$ համակարգի զուգահեռ տեղափոխություն $x'=x''-\sqrt{10}/2,\quad y'=y''-\sqrt{10}/2$ բանաձևերով կստանանք նոր՝ $O'X''Y''$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգ, որի նկատմամբ կորի հավասարումն է՝ $x''^2-9y''^2=9,$ կամ $\dfrac{x''^2}{9}-y''^2=1:$

Այսպիսով կորը հիպերբոլ է, որի իրական և կեղծ կիսառանցքներն են համապատասխանաբար 3 և 1:

Կորդինատների ձևափոխության բանաձևերից գտնում ենք $O' = (-1; -2)$, իսկ բազիսային վեկտորներն են՝

$$\vec{e_1'} = \left\{3/\sqrt{10}\,; 1/\sqrt{10}\right\},\ \vec{e_2'} = \left\{-1/\sqrt{10}\,; 3/\sqrt{10}\right\}:$$

Կորի դիրքը սկզբնական կոորդինատային համակարգի նկատմամբ հետևյալն է՝



Երկրորդ կարգի կորի տեսակը և կանոնական հավասարումը կարող է որոշվել նաև օրթոգոնալ ինվարիանտների միջոցով:

Դիցուք կորը OXY ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգի նկատմամբ տրված է

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$$

հավասարումով:

Մեկ այլ՝ $O'X'Y'$ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգի նկատմամբ այդ կորի հավասարում կարելի է ստանալ նախկին հավասարումից, նրա մեջ կատարելով տեղադրում կոորդինատների համակարգի ձևափոխության $\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_1 \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_2 \end{cases}$ բանաձևերով՝

$$F'(x', y') = F(c_{11}x' + c_{12}y' + c_1, c_{21}x' + c_{22}y' + c_2) =$$

$$= a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a'_0 = 0:$$

Կորի հավասարման վեց գործակիցներից կախված $\mathrm{I}=\mathrm{I}(a_{11},a_{12},a_{22},a_1,a_2,a_0)$ ֆունկցիան կոչվում է երկրորդ կարգի կորի *օրթոգոնալ ինվարիանտ ֆունկցիա* (կամ պարզապես *օրթոգոնալ ինվարիանտ*), եթե այն ամեն մի երկրորդ կարգի կորի համար չի փոխում իր արժեքը մի ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգից ցանկացած այլ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգի անցնելիս՝ $\mathrm{I}(a_{11},a_{12},a_{22},a_1,a_2,a_0)=\mathrm{I}(a'_{11},a'_{12},a'_{22},a'_1,a'_2,a'_0)$:

Հետևյալ երեք ֆունկցիաները՝

$$S=a_{11}+a_{22},\qquad \delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix},\qquad \Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_1\\ a_{21} & a_{22} & a_2\\ a_1 & a_2 & a_0\end{vmatrix}$$

երկրորդ կարգի կորի օրթոգոնալ ինվարիանտներ են:

Եթե երկրորդ կարգի կորն այնպիսին է, որ նրա համար $\delta=\Delta=0$, ապա հետևյալ՝ $K=\begin{vmatrix}a_{11} & a_1\\ a_1 & a_0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22} & a_2\\ a_2 & a_0\end{vmatrix}$ ֆունկցիան նույնպես չի փոխում իր արժեքը մի ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգից ցանկացած այլ ուղղանկյուն կոորդինատային համակարգի անցնելիս: Այդ ֆունկցիան կոչվում է *կիսաինվարիանտ ֆունկցիա*:

Երկրորդ կարգի կորի տեսակը և կանոնական հավասարումը լիովին որոշվում են S, δ, Δ ինվարիանտների և K կիսաինվարիանտի միջոցով:

Հետևյալ՝ $\lambda^2-S\lambda+\delta=0$ հավասարումը կոչվում է կորի *բնութագրիչ հավասարում*:

Ստորև աղյուսակում բերվում է բոլոր կորերի կանոնական հավասարումների գործակիցների որոշումը ինվարիանտների և կիսաինվարիանտի միջոցով:

Բոլոր խմբերում λ_1-ը և λ_2-ը $\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0$ բնութագրիչ հավասարման արմատներն են			
	միակենտրոն կորեր	պարաբոլական կորեր	
	$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a_0' = 0$	$\lambda_2 y''^2 + 2a_1' x'' = 0$	$\lambda_2 y''^2 + a_0' = 0$
δ	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$	0	0
Δ	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot a_0'$	$-\lambda_2 \cdot a_1'^2 \neq 0$	0
K	պետք չի գալիս	պետք չի գալիս	$\lambda_2 \cdot a_0'$
	$a_0' = \Delta/\delta$	$a_1' = \pm\sqrt{-\Delta/S}$	$a_0' = K/S$

Կորի տեսակը որոշվում է հետևյալ աղյուսակով

№	Տեսակը	Հայտանիշը
1.	Էլիպս	$\delta > 0\,, S \cdot \Delta < 0$
2.	Կեղծ էլիպս	$\delta > 0\,, S \cdot \Delta > 0$
3.	Հատվող կեղծ ուղիղների զույգ	$\delta > 0\,, \Delta = 0$
4.	Հիպերբոլ	$\delta < 0, \Delta \neq 0$
5.	Հատվող իրական ուղիղների զույգ	$\delta < 0, \quad \Delta = 0$
6.	Պարաբոլ	$\delta = 0\,, \ \Delta \neq 0$
7.	Զուգահեռ իրական ուղիղների զույգ	$\delta = \Delta = 0, K < 0$
8.	Զուգահեռ կեղծ ուղիղների զույգ	$\delta = \Delta = 0, K > 0$
9.	Համընկած ուղիղների զույգ	$\delta = \Delta = K = 0$

Խնդիր 25. Օրթոգոնալ ինվարիանտների միջոցով պարզել

$$5x^2+4xy+8y^2-32x-56y+80=0$$

հավասարումով տրված կորի տեսակը, կանոնական հավասարումը, գտնել կորի դիրքը սկզբնական կոորդինատային համակարգի նկատմամբ և կատարել գծագիր:

Լուծում: Հաշվելով կորի S, δ, Δ ինվարիանտները, կստանանք՝

$$S=5+8=13, \quad \delta=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}=36,$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 2 & -16 \\ 2 & 8 & -28 \\ -16 & -28 & 80 \end{vmatrix}=-1296:$$ Քանի որ $\delta\neq 0$, ուստի

կորը միակենտրոն կոր է և ունի

$$\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2+a_0'=0$$

տեսքի հավասարում կանոնական կոորդինատային համակարգում: Մյուս կողմից՝ $\delta>0,\ S\cdot\Delta<0$, ուստի կորը էլիպս է: Կորի բնութագրիչ հավասարումից՝ $\lambda^2-13\lambda+36=0$, ստանում ենք $\lambda_1=4,\ \lambda_2=9$, իսկ $a_0'=\Delta/\delta=-36$: Հետևաբար կորի կանոնական հավասարումն է՝

$$\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1,$$ որտեղից՝ $a=3,\ b=2$: Կանոնական

կոորդինատային $(O';\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}')$ համակարգի O' սկզբնակետը էլիպսի կենտրոնն է, որի կոորդինատները գտնում ենք

$$\begin{cases} 5x+2y-16=0 \\ 2x+8y-28=0 \end{cases}$$ համակարգից՝ $O'=(2;\,3)$:

Կորի $O'X'$ և $O'Y'$ առանցքների ուղղությունները գտնում ենք որպես կորի գլխավոր ուղղություններ՝

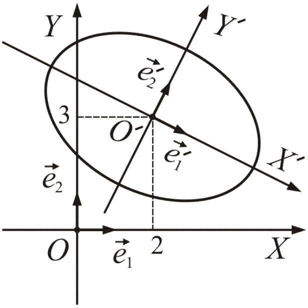
$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)\alpha + a_{12}\beta = 0\\ a_{21}\alpha + (a_{22}-\lambda)\beta = 0\end{cases}$ համակարգից: Վերցնելով $\lambda = 4$ արժեքը $\begin{cases}-\alpha + 2\beta = 0\\ 2\alpha + 4\beta = 0\end{cases}$ համակարգից ստանում ենք $\alpha:\beta = 2:-1$: Նորմավորելով $\{2;-1\}$ վեկտորը, ստանում ենք՝

$\vec{e_1'} = \left\{\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right\}$:Նման ձևով, վերցնելով $\lambda = 9$ արժեքը $\begin{cases}-4\alpha + 2\beta = 0\\ 2\alpha - \beta = 0\end{cases}$ համակարգից ստանում ենք $\alpha:\beta = 1:2$:

Նորմավորելով $\{1;2\}$ վեկտորը, ստանում ենք՝

$\vec{e_2'} = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$:

Կորի դիրքը սկզբնական կոորդինատային համակարգի նկատմամբ պատկերված է նկարում:



Խնդիր 26. Օրթոգոնալ ինվարիանտների միջոցով պարզել $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$ կորի տեսակը, կանոնական հավասարումը, գտնել կանոնական կոորդինատային համակարգի դիրքը սկզբնական կոորդինատային համակարգի նկատմամբ և կատարել գծագիրը:

Լուծում: Հաշվելով կորի S, δ, Δ ինվարիանտները, ստանում ենք՝

$$S=4+1=5,\ \ \delta=\begin{vmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=0,$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}4 & -2 & -1\\ -2 & 1 & -7\\ -1 & -7 & 7\end{vmatrix}=-225:$$

Քանի որ $\delta=0$ և $\Delta\neq 0$, ուստի կորը պարաբոլ է: Գտնենք նրա կիզակետային պարամետրը և գրենք կանոնական հավասարումը.

$$p=\sqrt{-\Delta/S^3}=\sqrt{225/125}=3/\sqrt{5}$$

և հետևաբար՝ $y'^2=6x'/\sqrt{5}$:

Կազմենք պարաբոլի առանցքի հավասարումը: Դրա համար նախ գտնենք նրա գլխավոր ուղղությունները: Բնութագրիչ հավասարման՝ $\lambda^2-5\lambda=0$ արմատներն են $\lambda_1=0,\ \lambda_2=5$:

Հաջորդաբար տեղադրելով

$$\begin{cases}(4-\lambda)\alpha-2\beta=0\\ -2\alpha+(1-\lambda)\beta=0\end{cases}$$

համակարգի մեջ

$\lambda_1=0$ և $\lambda_2=5$ կստանանք գլխավոր ուղղությունները ներկայացնող երկու վեկտոր՝ $\{1;\ 2\}$ և $\{-2;\ 1\}$: Դրանցից առաջինը ասիմպտոտական ուղղության վեկտոր է: Հետևաբար պարաբոլի առանցքը երկրորդ գլխավոր ուղղությանը համալուծ տրամագիծն է: Ուստի նրա հավասարումն է՝

$-2(4x-2y-1)+(-2x+y-7)=0$ կամ $2x-y+1=0$:

Գտնենք պարաբոլի O' գագաթի կոորդինատները որպես

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ 4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0 \end{cases}$$

համակարգի լուծում: Կստանանք՝ $O' = (-1/5;\ 3/5)$:

Պարաբոլի $O'X'$ առանցքի ուղղությունը համուղղված է $\{1;\ 2\}$ կամ $\{-1;\ -2\}$ վեկտորներից մեկին: Պարզելու համար գտնենք պարաբոլի հատման կետերը OY և OX առանցքների հետ: Քանի որ

$$\begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0 \end{cases}$$

համակարգն ունի երկու լուծում, իսկ

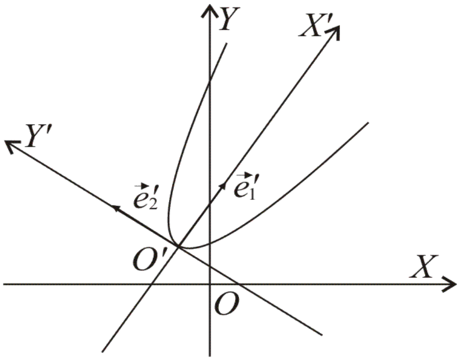
$$\begin{cases} y = 0 \\ 4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0 \end{cases}$$

համակարգը լուծում չունի, հետևաբար $O'X'$ առանցքը համուղղված է $\{1;\ 2\}$ վեկտորին:

Կորդինատային $O'X'Y'$ համակարգի $\vec{e_1'}$ և $\vec{e_2'}$ բազիսային վեկտորները գտնելու համար, նորմավորելով գլխավոր ուղղությունները ներկայացնող վեկտորները կունենանք՝

$$\vec{e_1'} = \left\{1/\sqrt{5};\ 2/\sqrt{5}\right\} \quad \text{և} \quad \vec{e_2'} = \left\{-2/\sqrt{5};\ 1/\sqrt{5}\right\}:$$

Այս ամենի հիման վրա կարող ենք կատարել գծագիր.



Խնդիր 27. Ապացուցել, որ

$$3x^2-14xy+8y^2-x-6y-2=0$$

կորը հատվող ուղիղների զույգ է: Գրել այդ ուղիղների հավասարումները:

Լուծում: Հաշվելով կորի S, δ, Δ ինվարիանտները, ստանում ենք՝

$S=11$, $\delta=-25$, $\Delta=0$: Քանի որ $\delta<0$ և $\Delta=0$, ուստի կորը հատվող իրական ուղիղների զույգ է:

Դիտարկելով $3x^2-14xy+8y^2=0$ օժանդակ կորը, նրա համար նույնպես ստանում ենք $S=11$, $\delta=-25$, $\Delta=0$, ուստի այդ կորը ևս հատվող իրական ուղիղների զույգ է:

Բացի այդ, այս երկու կորերն ունեն նույն ասիմպտոտական $\{\alpha;\beta\}$ ուղղությունները, որոնք որոշվում են միևնույն՝ $3\alpha^2-14\alpha\beta+8\beta^2=0$ հավասարումից: Նկատենք ,որ հատվող ուղիղների զույգի դեպքում կորի ասիմպտոտական ուղղությունները համընկնում են այդ կորի կազմի մեջ մտնող ուղիղների ուղղորդ վեկտորների ուղղությունների հետ:

Հետևաբար այս կորերից մեկի կազմի մեջ մտնող ուղիղները համագիծ են մյուս կորի կազմի մեջ մտնող ուղիղներին:

Վերլուծելով $3x^2-14xy+8y^2$ եռանդամը գծային արտադրիչների արտադրյալի՝

$$3x^2-14xy+8y^2=(3x-2y)(x-4y),$$

գտնում ենք երկրորդ կորի կազմի մեջ մտնող ուղիղների հավասարումները՝ $3x-2y=0,\ x-4y=0$:

Այժմ սկզբնական կորի կազմի մեջ մտնող ուղիղների հավասարումները կարող ենք որոնել $3x-2y+C_1=0$, $x-4y+C_2=0$ տեսքով:

Երկրորդ կարգի կորերի միակության թեորեմից հետևում է, որ

$(3x-2y+C_1)(x-4y+C_2)=k(3x^2-14xy+8y^2-x-6y-2), k\neq 0$:

Այս հավասարությունից, Լագրանժի անորոշ գործակիցների եղանակով, ստանում ենք $k=1$, $3C_2+C_1=-1,\ -2C_2-4C_1=-6,\ C_1C_2=-2$,

որտեղից էլ՝ $C_1=2,\ C_2=-1$:

Պատ.՝ $3x-2y+2=0,\ x-4y-1=0$: