Математические заметки

том 76 выпуск 5 ноябрь 2004

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ С ГРАНИЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ ИЗ ПРОСТРАНСТВ С ВЕСОМ

Г. М. Айрапетян

Исследуется задача Дирихле в полуплоскости в весовых пространствах, когда весовая функция имеет единственную особенность в бесконечно удаленной точке.

Библиография: 13 названий.

1. Пусть B_1 – класс гармонических функций $u(z)$ в верхней полуплоскости $G^+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, удовлетворяющих для любого $y_0 > 0$ неравенству

$$|u(z)| < C \exp |z|^\gamma, \qquad \gamma < 1, \quad \operatorname{Im} z > y_0 > 0, \tag{1}$$

где C – постоянная, не зависящая от $x = \operatorname{Re} z$, но зависящая, вообще говоря, от y_0. В работе рассматривается задача Дирихле в классе B_1 в следующей постановке: определить действительную гармоническую функцию $u(x,y) \in B_1$ так, чтобы имело место граничное условие

$$\lim_{y \to +0} \|u(x,y) - f(x)\|_{L^1(\rho)} = 0, \tag{2}$$

где $\rho(x)$ – измеримая неотрицательная функция на действительной оси такая, что $\rho(x) \in L^\infty(-A, A)$, $\rho^{-1}(x) \in L^\infty(-A, A)$ для любого $A > 0$.

Число

$$\alpha = \sup\bigl\{\beta : \rho(x)(1 + |x|)^\beta \in L^\infty(-\infty, +\infty)\bigr\} < \infty \tag{3}$$

будем называть *порядком особенности* $\rho(x)$ в бесконечно удаленной точке. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $0 \leqslant \alpha < \infty$.

Граничные задачи в классах аналитических функций и тесно связанная с ними теория сингулярных интегралов в весовых пространствах $L^p(d\mu)$ ($d\mu = \rho(x)\,dx + d\mu_s$, где $d\mu_s$ – сингулярная часть) исследованы в многочисленных работах (см. [1]–[8]). Было установлено, что для ограниченности сингулярного оператора в пространствах $L^p(d\mu)$, $p > 1$, необходимо и достаточно, чтобы мера $d\mu$ была абсолютно непрерывной и $\rho(x)$ удовлетворяла условию Макенхаупта (см. [6]). Отметим, что если мера удовлетворяет этому условию, то функция f из класса $L^p(d\mu)$ является также абсолютно интегрируемой по мере Лебега, т.е. принадлежит классу L^1. Однако граничные задачи в классах аналитических функций и, в частности, задача Дирихле, когда граничные условия понимаются в смысле средней сходимости $L^p(d\mu)$ (см. [9]–[12]), допускают такое же полное исследование в весовых пространствах при нарушении условия Макенхаупта. Задача Дирихле в единичном круге, когда весовая функция имеет конечное число особенностей конечного порядка, исследована в [9]. Там же описаны весовые функции, обеспечивающие разрешимость этой задачи для любой функции $f \in L^p(\rho(x)\,dx)$. Задача Дирихле для RO-меняющейся (определение см. ниже) в особых точках весовой функции исследована в [10]. Задача (2) в полуплоскости в случае степенной весовой функции (вида $O(|x-x_0|^\alpha)$, где α – неотрицательное целое число) была исследована в [11].

В настоящей работе задача (2) исследуется в предположении, что $\rho(x)$ RO-меняющаяся в бесконечно удаленной точке.

Функцию $g(x)$, определенную в (A_0,∞), будем называть *RO-меняющейся в бесконечно удаленной точке слева* [13], если ее можно представить в виде

$$g(x)=\exp\biggl(g_1(x)+\int_{A_1}^{x}\frac{g_2(t)}{t}\,dt\biggr),\qquad x\in(A_0,\infty), \tag{4}$$

где $A_1>A_0$, а $g_1(x)$ и $g_2(x)$ – измеримые и ограниченные функции на (A_0,∞). Аналогично определяется класс функций *RO-меняющихся в бесконечно удаленной точке справа*. Если функция в бесконечно удаленной точке является RO-меняющейся слева и RO-меняющейся справа, то скажем, что функция *RO-меняющаяся в бесконечно удаленной точке.* Функцию $\rho(x)$ отнесем к *классу R*, если функция

$$\rho_1(x)=(1+|x|)^\alpha\rho(x) \tag{5}$$

RO-меняющаяся в бесконечно удаленной точке, причем функция $g_2(x)$ из представления (4) удовлетворяет соотношениям

$$\varlimsup_{|x|\to\infty} g_2(x)<1-\{\alpha\},\qquad \varliminf_{|x|\to\infty} g_2(x)>-\{\alpha\}, \tag{6}$$

если α – нецелое число, и

$$\varlimsup_{|x|\to\infty} g_2(x)\leqslant 0,\qquad \varliminf_{|x|\to\infty} g_2(x)>-1, \tag{7}$$

если α – целое число.

2. Лемма 1. *Пусть $k>0$ – целое число. Тогда*

$$\bigl|(x+iy)^k-(x-iy)^k\bigr|<Cy(y^{k-1}+|x|^{k-1}). \tag{8}$$

Если $|x|>2ky$, то

$$\bigl|(x+iy)^k-(x-iy)^k\bigr|>C_1y|x|^{k-1}, \tag{9}$$

где $C,C_1>0$ – некоторые постоянные.

Доказательство. Пусть $|x| > y$. Тогда $|x+iy| < 2|x|$, $|x-iy| < 2|x|$ и

$$\left|(x+iy)^k - (x-iy)^k\right| < 2y \sum_{j=0}^{k-1} |x+iy|^j |x-iy|^{k-j-1} < Cy|x|^{k-1}.$$

Если $|x| < y$, то $|x+iy| < 2|y|$, $|x-iy| < 2|y|$ и $|(x+iy)^k - (x-iy)^k| < Cy^k$, и (8) доказано. Предположим $|x| > 2ky$; тогда

$$\begin{aligned}\left|(x+iy)^k - (x-iy)^k\right| &= |x+iy|^k \left|1 - \left(\frac{x-iy}{x+iy}\right)^k\right| \\ &= y|x+iy|^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \left|\frac{x-iy}{x+iy}\right|^j (\cos j\varphi + i\,\sin j\varphi),\end{aligned}$$

где $\varphi = 2\arg(x-iy)$. Из условия $|x| > 2ky$ следует, что $\cos j\varphi > 0$, $j = 0, 1, \dots, k-1$; следовательно, (9) доказано.

Функцию $g(x)$ на промежутке (a, b) будем называть *почти монотонно возрастающей*, если существует $A > 0$ такое, что для любых $x' < x''$ из этого промежутка $g(x') < Ag(x'')$. Аналогично определяется *почти монотонно убывающая функция*. В следующей лемме собраны свойства функции $\rho(x) \in R$.

Лемма 2. *Пусть $\rho(x) \in R$. Справедливы следующие утверждения.*

a) *Пусть α – нецелое число. Тогда существуют $\delta_0 \in (0, 1-\{\alpha_0\})$, $\delta_1 \in (-\{\alpha_0\}, 0)$ такие, что для любого $\delta > \delta_0$ и для любого числа A функция $|x+i|^\delta \rho_1(x)$ почти монотонно возрастает в промежутке (A, ∞) и почти монотонно убывает в промежутке $(-\infty, A)$. Соответственно $|x+i|^{-\delta}\rho_1(x)$ почти монотонно убывает на (A, ∞) и почти монотонно возрастает на $(-\infty, A)$ для любого $\delta < \delta_1$.*

b) *Если α – целое число, то для любого числа A функция $|x+i|\rho_1(x)$ почти монотонно возрастает на (A, ∞) и почти монотонно убывает на $(-\infty, A)$; $|x+i|^\delta \rho_1(x)$ почти монотонно убывает на (A, ∞) и почти монотонно возрастает на $(-\infty, A)$ для любого $\delta < 0$.*

c) *Для любого $\delta > 0$*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_1(x)\,dx}{(1+|x|)^{1+\delta}} < \infty. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть согласно (6) δ_0 выбрано так, чтобы имело место

$$\varlimsup_{|x|\to\infty} g_2(x) < \delta_0 < 1 - \{\alpha_k\}.$$

Тогда если $A < x' < x''$, то при $\delta > \delta_0$ из (4) имеем

$$\begin{aligned}\frac{|x'+i|^\delta \rho_1(x')}{|x''+i|^\delta \rho_1(x'')} &= e^{g(x')-g(x'')} \exp\left(\int_{x'}^{x''} \frac{\delta - g_2(t)}{t}\,dt\right) \\ &< A \exp\left(\int_{x'}^{x''} \frac{\delta - g_2(t)}{t}\,dt\right).\end{aligned}$$

Поэтому $|x'+i|^\delta \rho_1(x')(|x''+i|^\delta \rho_1(x'')^{-1} < C$.

Аналогично доказываются остальные утверждения a), b) леммы. Утверждение c) непосредственно следует из определения класса R.

Лемма 3. *Пусть*

$$g(x) = \exp\left(\int_A^x \frac{g_2(t)\,dt}{t}\right),$$

где $g_2(x)$ – ограниченная функция на (A, ∞). Тогда если $y \in (2^{-1}x, 2x)$, то

$$\left|\frac{g(x) - g(y)}{x - y}\right| < C\left|\frac{g(x)}{x}\right|.$$

Доказательство. Из определения функции $g(x)$ имеем

$$\left|\frac{g(x) - g(y)}{x - y}\right| = \left|\frac{g(x)}{x - y}\right|\left(1 - \exp\left(\int_x^y \frac{g_2(t)\,dt}{t}\right)\right).$$

Так как $2^{-1} < yx^{-1} < 2$, то

$$\int_x^y \frac{g_2(t)\,dt}{t} < A\ln 2.$$

Поэтому

$$\left|\frac{g(x) - g(y)}{x - y}\right| < C\left|\frac{g(x)}{x - y}\right|\left|\int_x^y \frac{g_2(t)\,dt}{t}\right|$$
$$< C\left|\frac{g(x)}{x - y}\right|\left|\ln\frac{y}{x}\right| = C\left|\frac{g(x)}{x - y}\right|\left|\ln\left(1 - \frac{y - x}{x}\right)\right|.$$

Учитывая, что $|y - x|\,|x|^{-1} < 1$, завершаем доказательство леммы.

Лемма 4. *Пусть $\rho(x) \in R$. Тогда*

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)} \frac{|t + i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\rho_1(x)\,dx}{((x - t)^2 + y^2)|x + i|^{\{\alpha_0\}}} < \infty, \tag{11}$$

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)} \frac{|t + i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\rho_1(x)\,dx}{|t - x - iy|\,|x + i|^{1+\{\alpha_0\}}} < \infty. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $t \in (0, \infty)$. В силу леммы 2 существует $\delta \in (0, 1 - \{\alpha_0\})$ такое, что функция $|x + i|^\delta\rho_1(x)$ почти монотонно возрастает на $(0, \infty)$. Поэтому

$$\frac{|t + i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)} \int_{-\infty}^{2^{-1}t} \frac{y\rho_1(x)\,dx}{((x - t)^2 + y^2)|x + i|^{\{\alpha_0\}}}$$
$$< C\left(1 + \frac{|t + i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)} \int_0^{2^{-1}t} \frac{y|x + i|^\delta\rho_1(x)\,dx}{|t + i|^2|x + i|^{\delta+\{\alpha_0\}}}\right) < C_1.$$

Так как $\rho(x) \in R$, то $\rho_1(x)$ представима в виде (4). Не нарушая общности, можно предположить, что $g_1(x) \equiv 0$. Применяя лемму 3, получим

$$\frac{|t + i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)} \int_{2^{-1}t}^{2t} \frac{y\rho_1(x)\,dx}{((x - t)^2 + y^2)|x + i|^{\{\alpha_0\}}}$$
$$= \left|\frac{|t + i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)} \int_{2^{-1}t}^{2t} \frac{y(\rho_1(x) - \rho_1(t))\,dx}{((x - t)^2 + y^2)|x + i|^{\{\alpha_0\}}} + \int_{2^{-1}t}^{2t} \frac{y|t + i|^{\{\alpha_0\}}\,dx}{((x - t)^2 + y^2)|x + i|^{\{\alpha_0\}}}\right|$$
$$< A\left(1 + \int_{2^{-1}t}^{2t} \frac{y|t + i|^{\{\alpha_0\}}|x - t|\,dx}{((x - t)^2 + y^2)|x + i|^{\{\alpha_0\}}}\right) < A_1\left(1 + \frac{y}{t}\ln\frac{t^2 + y^2}{y^2}\right) < A_2.$$

В силу леммы 2 $\delta \in (-\{\alpha\}, 0)$ можем подобрать так, чтобы функция $|x+i|^{\delta}\rho_1(x)$ была почти монотонно убывающей на $(0,\infty)$, и поэтому

$$\frac{|t+i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)}\int_{2t}^{\infty}\frac{y\rho_1(x)\,dx}{((x-t)^2+y^2)|x+i|^{\{\alpha_0\}}} < C\int_{2t}^{\infty}\frac{y|t+i|^{\{\alpha\}+\delta}\,dx}{((x-t)^2+y^2)|x+i|^{\{\alpha_0\}+\delta}} < C_1.$$

Утверждение (11) леммы при $t \in (0,\infty)$ доказано. Аналогично устанавливаются другие утверждения.

3. Пусть $\rho'(x) = (1+|x|)^{-n_0}$, $x \in (-\infty,\infty)$, где $n_0 = [\alpha]+1$. Если $u(x,y)$ удовлетворяет условию (2), то из леммы 2 следует, что

$$\lim_{y\to+0}\|u(x,y)-f(x)\|_{L^1(\rho')} = 0; \tag{13}$$

поэтому $u(x,y)$ можно представить в виде (см. [12])

$$u(x,y) = u_0(x,y) + u_1(x,y), \tag{14}$$

где

$$u_0(x,y) = \operatorname{Re}\sum_{p=0}^{n_0} ia_p z^p, \tag{15}$$

$$\begin{aligned} u_1(x,y) = {}&\operatorname{Re}\biggl(\frac{(z+i)^{n_0-1}}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\,dt}{(t+i)^{n_0-1}(t-z)}\biggr)\\ &+\operatorname{Re}\biggl(\frac{(z-i)^{n_0-1}}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)\,dt}{(t-i)^{n_0-1}(t-z)}\biggr), \end{aligned} \tag{16}$$

причем a_p, $p = 0,1,\dots,n_0$, – произвольные действительные числа.

Скажем, что функция $\rho(x)$ удовлетворяет *условию* R_0, если α – нецелое число, либо α – целое число и выполняется соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho_1(x)\,dx}{1+|x|} < \infty. \tag{17}$$

Теорема 1. *Пусть $\rho(x) \in R$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

a) *Если $\rho(x)$ удовлетворяет условию R_0, то общее решение однородной задачи* (2) *можно представить в виде* (15).

b) *Пусть $\rho(x)$ не удовлетворяет условию R_0. Тогда общее решение однородной задачи* (2) *можно представить в виде* (15) *при $a_{n_0} = 0$.*

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ – произвольное решение однородной задачи (2). Так как $\rho'(x)(\rho(x))^{-1} \in L^{\infty}(-\infty,\infty)$, из (2) при $f \equiv 0$ имеем

$$\lim_{y\to+0}\|u(x,y)\|_{L^1(\rho')} = 0, \tag{18}$$

поэтому $u(x,y)$ представима в виде (15), где a_p – некоторые действительные числа. Для доказательства утверждения a) теоремы нам предстоит доказать, что функция (15) удовлетворяет однородному условию (2) для любого действительного числа a_p. Сначала предположим, что число α нецелое. Достаточно рассмотреть функцию $u(x,y) = \operatorname{Re} iz^{n_0-1}$. Так как в окрестности бесконечно удаленной точки $\rho_1(x) < C|x|^\varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, в силу леммы 1 с некоторой постоянной C_1

$$\begin{aligned}\|u(x,y)\|_{L'(\rho)} &< \int_{-\infty}^{\infty} \bigl|(x+iy)^{n_0-1} - (x-iy)^{n_0-1}\bigr|\rho(x)\,dx \\ &< C_1 y\biggl(1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+|x|)^{1+\{\alpha_0\}-\varepsilon}}\biggr).\end{aligned} \tag{19}$$

Взяв $\varepsilon < \{\alpha_0\}$, получим

$$\lim_{y\to+0} \|\operatorname{Re} iz^{n_0-1}\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Если α_0 – целое число, $u(x,y) = \operatorname{Re} iz^{n_0-1}$ и имеет место условие (17), то

$$\|u(x,y)\|_{L^1(\rho)} < Cy\biggl(1 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_1(x)\,dx}{1+|x|}\biggr) \tag{20}$$

и $\|u(x,y)\|_{L^1(\rho)} \to 0$ при $y \to +0$.

Рассмотрим случай, когда нарушено условие (17). Тогда функция $u(x,y) = \operatorname{Re} iz^{n_0-1}$ в силу леммы 1 при $|x| > 2n_0 y$ удовлетворяет неравенству $u(x,y) > ay|x|^{n_0-2}$ и поэтому не принадлежит классу $L^1(\rho)$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $\rho(x) \in R$. Тогда задача (2) разрешима для любой функции $f(x) \in L^1(\rho)$. Общее решение можно представить в виде*

$$u(x,y) = u_0(x,y) + u_1(x,y), \tag{21}$$

где $u_0(x,y)$ – общее решение однородной задачи, а $u_1(x,y)$ определяется формулой (16).

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ удовлетворяет условию (2). Тогда выполняется (13) и $u(x,y)$ представима в виде (19). Нам следует установить, что для любой функции $f \in L^1(\rho)$ функция $u(x,y)$ из (19) удовлетворяет условию (2). Учитывая теорему 1, достаточно установить, что функция $u_1(x,y)$ из (16) удовлетворяет условию (2) при любой $f \in L^1(\rho)$. Для этого предварительно докажем оценку

$$\|u_1(x,y)\|_{L^1(\rho)} < A\|f\|_{L^1(\rho)}. \tag{22}$$

Заметим, что $u_1(x,y) = I_1(x,y) + I_2(x,y)$, где

$$\begin{aligned}I_1(x,y) &= \frac{(z+i)^{n_0-1}}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)\,dt}{(t+i)^{n_0-1}(t-z)} - \frac{(\overline{z}+i)^{n_0-1}}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)\,dt}{(t+i)^{n_0-1}(t-\overline{z})}, \\ I_2(x,y) &= \frac{(\overline{z}-i)^{n_0-1}}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)\,dt}{(t-i)^{n_0-1}(t-z)} - \frac{(z-i)^{n_0-1}}{4\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)\,dt}{(t-i)^{n_0-1}(t-\overline{z})}.\end{aligned}$$

Далее, имеем $I_1(x,y) = I_1^{(1)}(x,y) + I_2^{(2)}(x,y)$, где

$$I_1^{(1)}(x,y) = \frac{(z+i)^{n_0-1} - (\overline{z}+i)^{n_0-1}}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)\,dt}{(t+i)^{n_0-1}(t-z)},$$

$$I_1^{(2)}(x,y) = \frac{(\overline{z}+i)^{n_0-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)\,dt}{(t+i)^{n_0-1}(t-x)^2+y^2}.$$

Учитывая лемму 1, получим

$$\begin{aligned}
&\int_{\infty}^{\infty} |I_1^{(1)}(x,y)|\rho(x)\,dx \\
&\quad = \sup_{g\in B_0}\left|\int_{\infty}^{\infty} \left((z+i)^{n_0-1} - (\overline{z}+i)^{n_0-1}\right) \int_{\infty}^{\infty} \frac{f(t)\,dt}{(t+i)^{n_0-1}(t-x-iy)} g(x)\,dx\right| \\
&\quad < C\int_{\infty}^{\infty} |f(t)|\rho(t)\frac{|t+i|^{\{\alpha\}}}{\rho_1(t)} \int_{\infty}^{\infty} \frac{y(y^{n_0-2}+|x|^{n_0-2})|x|^{1-\{\alpha\}}\rho_1(x)}{|x+i|^{n_0}|t-x-iy|}\,dx\,dt \\
&\quad < C_1\int_{\infty}^{\infty} |f(t)|\rho(t)\frac{|t+i|^{\{\alpha_0\}}}{\rho_1(t)} \int_{\infty}^{\infty} \frac{y\rho_1(x)}{|x+i|^{1+\{\alpha_0\}}|t-x-iy|}\,dx\,dt,
\end{aligned}$$

где $B_0 = \{g : \|g\|_{L^\infty(\rho^{-1})} \leqslant 1\}$. Отсюда, учитывая (12), получаем оценку

$$\|I_1^{(1)}(x,y)\|_{L^1(\rho)} < C\|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Повторяя те же выкладки и применяя (11), получим

$$\|I_1^{(2)}(x,y)\|_{L^1(\rho)} < C\|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Следовательно,

$$\|I_1(x,y)\|_{L^1(\rho)} < C\|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\|I_2(x,y)\|_{L^1(\rho)} < C\|f\|_{L^1(\rho)}.$$

Тем самым, оценка (20) доказана. Докажем, что из (20) следует, что функция (16) удовлетворяет условию (2). Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & |x| > n, \\ f(x), & |x| < n. \end{cases}$$

Получим последовательность функций $f_n(x)$ такую, что

$$\|f_n(x) - f(x)\|_{L^1(\rho)} \to 0.$$

Обозначив функцию (16) при $f(x) = f_n(x)$ через $u_n(x,y)$, будем иметь (см. [8])

$$\lim_{y\to+0} \|u_n(x,y) - f_n(x)\|_{L^1(\rho)} = 0.$$

Далее, используя оценку (20), получим

$$\begin{aligned}
\|u(x,y) - f(x)\|_{L^1(\rho)} &< \|u(x,y) - u_n(x,y)\|_{L^1(\rho)} + \|u_n(x,y) - f_n(x)\|_{L^1(\rho)} \\
&\quad + \|f_n(x) - f(x)\|_{L^1(\rho)} \\
&< C\|f_n(x) - f(x)\|_{L^1(\rho)} + \|u_n(x,y) - f_n(x)\|_{L^1(\rho)}.
\end{aligned}$$

Из (21) и (22) теперь следует, что $u(x,y)$ удовлетворяет условию (2). Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Хведелидзе Б. В. О разрывной задаче Римана–Привалова для нескольких функций // Сообщение АН Груз. ССР. 1956. Т. 17. №10. С. 865–872.

[2] Rosenblum M. Summability of Fourier series in $L_p(d\mu)$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 165. P. 326–342.

[3] Товмасян Н. Е. О существовании и единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в классе функций, имеющих особенности на границе // Сиб. матем. ж. 1961. Т. 2. №2. С. 25–57.

[4] Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинёв, 1973.

[5] Hunt R. A., Muckenhoupt B., Wheeden R. L. Weighted norm inequalities for the conjugate functions and Hilbert transform // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 176. P. 227–251.

[6] Хведелидзе Б. В. Методы интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной // Современные проблемы математики. Т. 7. М., 1975.

[7] Прёсдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. М.: Мир, 1979.

[8] Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.

[9] Kazarian K. S. Weighted norm inequalities for some classes of singular integrals // Studia Math. 1987. V. 86. P. 97–130.

[10] Айрапетян Г. М. Задача Дирихле в пространствах с весом // Изв. НАН Армении. Матем. 2001. Т. 36. №3. С. 12–35.

[11] Айрапетян Г. М. О задаче Дирихле в полуплоскости в пространствах с весом // Изв. НАН Армении. Матем. 2001. Т. 36. №6. С. 7–15.

[12] Айрапетян Г. М. О задаче Гильберта в смысле L^p-сходимости, $p > 1$ // Докл. РАН. 1993. Т. 328. №4. С. 421–423.

[13] Сенета Е. Правильно меняющиеся функции. М.: Наука, 1985.

Государственный инженерный университет Армении
E-mail: hhairapet@seua.am

Поступило
24.01.2003