

УДК 539.3

**НЕКЛАССИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА УПРУГО ЗАЩЕМЛЁННОЙ
ПО КРАЮ ЧАСТИЧНО НАГРУЖЁННОЙ КРУГЛОЙ ОРТОТРОПНОЙ
ПЛАСТИНКИ**

Киракосян Р.М., Степанян С.П.

Ключевые слова: цилиндрическая ортотропия, круглая пластинка, упругое защемление, частичное нагружение, обжатие, разрыв первого рода.

Keywords: cylindrical orthotropy, round plate, elastically fastened, partial loading, reduction, first kind discontinuity.

Բանալի բառեր: գլանային օրթոտրոպ, կլոր սալ, առաձգական ամրակցում, սեղմում, առաջին սեռի խզում

Կիրակոսյան Ռ.Մ., Ստեփանյան Ս.Պ.

Եզրում առաձգական ամրակցված, մասնակիորեն բեռնավորված, կլոր, օրթոտրոպ սալի ոչ դասական եզրային խնդիրը

Լուծվում է եզրում առաձգական ամրակցված օրթոտրոպ կլոր սալի ծուման խնդիրը, ընդլայնական սահքի և սեղմման հաշվառմամբ, երբ սալի կենտրոնական մասում ազդում է հավասարաչափ բաշխված բեռ:

Սալի բեռնավորված մասի համար վերցվում է հայտնի լուծումը Համբարձումյան ([1], էջ.177,178), որը կայարունակի երկու ինտեգրման հաստատուն, եթե հաշվի առնենք, որ սալի կենտրոնում անկյունային կետ չկա: Բավարարելով եզրում առաձգական ամրակցման պայմանները, դեֆորմացվող սալի ողորկությունը և M_r , ծող մոմենտի անխզելիությունը սալի բեռնավորված և ոչ բեռնավորված եզրի վրա, ստացվում է ինտեգրման հինգ հաստատունների նկատմամբ հանրահաշվական հավասարումների համակարգ: Լուծելով այդ համակարգը, որոշվում են բոլոր անհայտ ֆունկցիաները:

Գիտարկվել է թվային օրինակ: Սալի ստացված անչափ հաշվարկային մեծությունների արդյունքում կատարվել է եզրակացություն: Մասնավորապես ցույց է տրվում, որ սեղմման հաշվառման դեպքում M_0 ծող մոմենտը սալի բեռնավորված և ոչ բեռնավորված մասերի բաժանման սահմանի վրա ունի առաջին սեռի խզում:

Kirakosyan R.M., Stepanyan S.P.

Non- classical boundary value problems of elastically fastened on the edge, partially loaded, round orthotropic plate

The problem of bending of orthotropic circular plate resiliently clamped along the contour is solved by taking into account the transverse shear and compression when a uniformly distributed load acts in the central part of the plate..For the loaded part of the plate the well-known solution of Hambardzumyan ([1], str.177,178) is taken, which, by taking into account the absence of corner point in the plate centre, contains two constants of integration. To satisfy the conditions of the boundary elastic fixation, the smoothness of the deforming plate, and the continuity of the bending moment M_r at the boundary of separation of loaded and non-loaded parts of the plate, a linear system of equations is obtained with respect to the five integration constants. By solving this system all the

unknown functions are found. A numerical example has been considered. A conclusion has been made based on the obtained dimensionless calculation values of the plate. In particular it has been shown that in the case of taking into account the compression the bending moment M_0 has a first kind discontinuity on the boundary of separation of loaded and non-loaded parts of the plate.

Решается задача изгиба упруго-зашемлённой по контуру ортотропной круглой пластинки при учёте влияния поперечного сдвига и обжатия, когда на центральной части пластинки действует равномерно распределённая поперечная нагрузка.

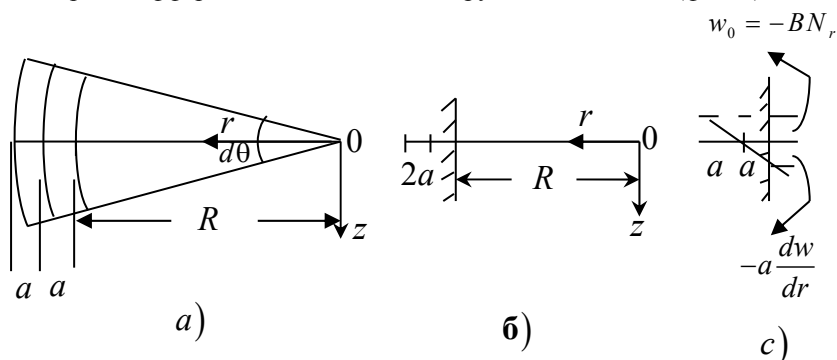
Для нагружённой части пластинки берётся известное решение С.А. Амбарцумяна ([1], стр.177,178), которое после учёта отсутствия угловой точки центра содержит две неизвестные постоянные интегрирования. Удовлетворив условиям упругого защемления контура, гладкости деформированной пластинки и неразрывности изгибающего момента M_r на границе раздела нагружённой и ненагружённой частей, получается система алгебраических уравнений относительно остальных пяти неизвестных постоянных интегрирования. Решая эту систему, определяются все неизвестные функции.

Рассмотрен численный пример. На основе полученных безразмерных значений расчётных величин пластинки делаются заключения. В частности, отмечается, что при учёте обжатия изгибающий момент M_θ на границе раздела нагружённой и ненагружённой частей пластинки имеет разрыв первого рода.

Введение. Обширное применение упруго-зашемлённых опор в строительных сооружениях привело к практической необходимости их исследования. В научной литературе, например, в книгах [2] и [3], обычно рассматриваются теоретические модели упруго-зашемлённых опор, не указывая их конкретные конструкции. Это часто приводит к некорректным понятиям. Например, на стр. 29 книги [3] в качестве условий упругого защемления края пластинки написаны: условие прямой пропорциональности производной прогиба к изгибающему моменту и условие равенства нулю прогиба. Эти условия, на самом деле, не являются условиями чисто упруго-зашемлённой опоры, а скорее, условиями комбинации упруго-зашемлённой опоры и шарнирной опоры, когда последняя опирается на абсолютно жёсткое основание.

Вопросам упруго-зашемлённых опор тонкостенных элементов конструкций и их применениям посвящены также работа Г.З. Геворгяна [4] и работы авторов настоящей статьи ([5]- [13]). В этих работах чётко указывается конструкция опор, с помощью которой и определяются их условия.

Постановка задач. 1. В правой системе цилиндрических координат r, θ, z рассмотрим дифференциальный элемент круглой пластинки (фиг. 1).



Фиг.1

Краевая часть пластинки вставлена в упругий массив, образуя упруго-зашемлённую опору. Длина этой части по радиусу $2a$ достаточно мала относи-

тельно радиуса пластинки R . Из-за малой длины будем считать, что вставленная часть пластинки, подобно абсолютно твёрдому элементу, может поступательно перемещаться и вращаться как одна целая. Поэтому в её пределах будем считать значение $\frac{dw}{dr}$ постоянным (r – радиальная координата, w – прогиб пластинки при изгибе). Отметим также, что из-за малости $2a$ расстояние центра тяжести вставленной части равно a .

На единичной длине опорного сечения $r = R$ при изгибе пластинки возникают поперечная сила N_r и изгибающие моменты M_r, M_θ .

Под действием момента поперечной силы aN_r и момента M_r вставленная часть будет вращаться на некоторый угол. Будем считать, что тангенс этого угла $\frac{dw}{dr}$ прямо пропорционален сумме этих моментов. Так как $\frac{dw}{dr}$, N_r и M_r имеют одинаковый знак, то можно написать

$$\left. \frac{dw}{dr} \right|_{r=R} = D(aN_r + M_r). \quad (1.1)$$

Положительная постоянная D – обратная величина жёсткости упруго-зашемлённой опоры на вращение. В СИ она измеряется единицей H^{-1} .

Прогиб пластинки опорного сечения $r = R$ состоит из двух частей. Одна из них возникает от вращения вставленной части, а другая – от её поступательного вертикального перемещения. По аналогии с гипотезой Фусса-Винклера можно считать, что вторая часть w_0 опорного прогиба прямо пропорциональна поперечной

силе N_r . Так как знак прогиба w отличается от знаков $\frac{dw}{dr}$ и N_r , то в итоге можно написать

$$w|_{r=R} = -\left(a \frac{dw}{dr} + BN_r \right) C. \quad (1.2)$$

Положительная постоянная B – обратная величина жёсткости упруго-зашемлённой опоры на вертикальное перемещение. В СИ она измеряется единицей $m^2 H^{-1}$.

Таким образом, условия упруго-зашемлённой опоры осесимметрично изгибаемой круглой пластинки имеют вид (1.1) и (1.2).

2. Получение связи параметров. Пользуясь гипотезой Фусса-Винклера и рисунками $a)–c)$ фиг.1, определим значения параметров рассмотренной упруго-зашемлённой опоры B и D , когда торец вставленной части, как обычно, не контактирует с упругим массивом.

Так как упругий массив на верхнюю и нижнюю поверхности вставленной части действует нормальными напряжениями одинакового направления, прямо

пропорциональными вертикальному перемещению w_0 , то из условия равновесия с учётом (1.2) можно написать:

$$2k \cdot w_0 \cdot d\theta \int_0^{2a} (R+x)dx = 4kaw_0 (R+a) d\theta = \frac{w_0 R d\theta}{B} \Rightarrow B = \frac{R}{4ka(R+a)}, \quad (2.1)$$

где k – коэффициент пропорциональности. В СИ она измеряется единицей $H \cdot M^{-3}$.

Из условия равновесия моментов относительно центра вставленной части пластинки с учётом (1.1) получим:

$$\begin{aligned} 2k \frac{dw}{dr} d\theta \left[\int_0^a (R+a+x)xdx + \int_0^a (R+a-x)xdx \right] &= \frac{4}{3} ka^3 (R+a) d\theta = \\ &= \frac{dw}{dr} \frac{R}{D} d\theta \Rightarrow D = \frac{3R}{4ka^3 (R+a)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Из (2.1) и (2.2) следует связь между параметрами упруго-защемлённой опоры D и B

$$D = \frac{3B}{a^2}. \quad (2.3)$$

3. Решение задачи. Рассмотрим ортотропную круглую пластинку радиуса R и постоянной толщины h . Координатная плоскость $r\theta$ совпадает со срединной плоскостью пластинки, а главные направления анизотропии материала параллельны координатным линиям. Край пластинки $r=R$ имеет рассмотренную упруго-защемлённую опору.

На центральной части пластинки $0 \leq r < \varepsilon$ действует равномерно распределённая поперечная нагрузка интенсивности $q = P / \pi \varepsilon^2$, а остальная часть пластинки $\varepsilon < r \leq R$ свободна от нагрузок.

В рамках уточнённой теории С.А. Амбарцумяна [1] рассмотрим задачу изгиба пластинки при учёте влияния деформации поперечного сдвига и обжатия.

Расчётные величины пластинки w , N_r , M_r и M_θ интервала $\varepsilon < r \leq R$ обозначим индексом «1», а интервала $0 \leq r < \varepsilon$ – индексом «2».

Пользуясь [1] (с.73, 74), получим следующие разрешающие уравнения задачи: при $\varepsilon < r \leq R$

$$r \frac{d^3 w_1}{dr^3} + \frac{d^2 w_1}{dr^2} - \frac{n^2}{r} \frac{dw_1}{dr} = \frac{P}{2\pi D_r} - \frac{3(1-n^2)a_r}{5\pi h} \frac{P}{r^2}, \quad (3.1)$$

при $0 \leq r < \varepsilon$

$$r \frac{d^3 w_2}{dr^3} + \frac{d^2 w_2}{dr^2} - \frac{n^2}{r} \frac{dw_2}{dr} = \frac{Pr^2}{2\pi D_r \varepsilon^2} + \frac{P}{\pi \varepsilon^2} \left[(A_2 - A_1) \frac{h^2}{10D_r} + \frac{3a_r}{5h} (n^2 - 1) \right] \quad (3.2)$$

Здесь

$$D_r = \frac{B_r h^3}{12}, \quad n^2 = \frac{D_\theta}{D_r} = \frac{E_\theta}{E_r} \quad (3.3)$$

$E_0, E_r, B_r, a_r, A_1, A_2$ – общеизвестные механические параметры ортотропного тела [1].
Общие решения уравнений (3.1) и (3.2) имеют вид [1]:

$$w_1 = c_1 + c_2 r^{1+n} + c_3 r^{1-n} + \frac{p \cdot r^2}{4\pi(1-n^2)D_r} - \frac{3pa_r}{5\pi h} \ln \frac{r}{R} \quad (3.4)$$

$$w_2 = c_4 + c_5 r^{1+n} + b_1 r^2 + b_2 r^4 \quad (3.5)$$

Здесь c_i – постоянные интегрирования,

$$b_1 = \frac{Ph^2}{20\pi\varepsilon^2(1-n^2)} \left[\frac{6a_r(n^2-1)}{h^3} + \frac{A_2 - A_1}{D_r} \right], \quad b_2 = \frac{P}{8(9-n^2)\pi\varepsilon^2 D_r} \quad (3.6)$$

Изгибающие моменты определяются с помощью выражений [1] (стр.73):

$$M_{r1} = -D_r \left[\frac{d^2 w_1}{dr^2} + \frac{v_\theta}{r} \frac{dw_1}{dr} - \frac{3Pa_r(1-v_\theta)}{5\pi h r^2} \right] \quad (3.7)$$

$$M_{\theta1} = -n^2 D_r \left[\frac{1}{r} \frac{dw_1}{dr} + v_r \frac{d^2 w_1}{dr^2} + \frac{3Pa_r(1-v_r)}{5\pi h r^2} \right] \quad (3.8)$$

$$M_{r2} = -D_r \left[\frac{d^2 w_2}{dr^2} + \frac{v_\theta}{r} \frac{dw_2}{dr} + \frac{3Pa_r(1+v_\theta)}{5\pi\varepsilon^2 h} + \frac{A_1 h^2 P}{10\pi\varepsilon^2 D_r} \right] \quad (3.9)$$

$$M_{\theta2} = -n^2 D_r \left[\frac{1}{r} \frac{dw_2}{dr} + v_r \frac{d^2 w_2}{dr^2} + \frac{3Pa_r(1+v_r)}{5\pi\varepsilon^2 h} + \frac{A_2 h^2 P}{10\pi\varepsilon^2 n^2 D_r} \right] \quad (3.10)$$

$$\left(\Phi_1 = -\frac{6P}{\pi h^3} \frac{1}{r}, \quad \Phi_2 = -\frac{6Pr}{\pi h^3 \varepsilon^2}, \quad N_{r1} = -\frac{P}{2\pi r}, \quad N_{r2} = -\frac{Pr}{2\pi\varepsilon^2} \right) \quad (3.11)$$

Для определения постоянных интегрирования c_i нужно использовать условия упругого защемления (1.1), (1.2) гладкости деформированной пластинки и непрерывности изгибающего момента M_r при $r = \varepsilon$

$$w_1 = w_2, \quad \frac{dw_1}{dr} = \frac{dw_2}{dr}, \quad M_{r1} = M_{r2} \quad \text{при } r = \varepsilon \quad (3.12)$$

Последнее условие (3.12) вытекает из закона равенства действия и противодействия нагруженной и ненагруженной частей пластинки при отсутствии внешнего сосредоточенного момента M_r . Отметим, что при $r = \varepsilon$ равенство изгибающих моментов $M_{\theta1}$ и $M_{\theta2}$ не обязательно, поскольку эти моменты не являются действием и противодействием отмеченных частей пластинки.

4. Основные обозначения и получение системы разрешающих уравнений.

Примем обезразмеривающие обозначения:

$$w_i = \bar{w}_i h, \quad h = mR, \quad r = \rho R, \quad \varepsilon = kR, \quad B_r a_r = \chi, \quad a = sh,$$

$$P = B_r h^2 \bar{P}, \quad c_1 = \bar{c}_1 h, \quad c_2 = \bar{c}_2 R^{-n}, \quad c_3 = \bar{c}_3 R^n, \quad c_4 = \bar{c}_4 h, \\ c_5 = \bar{c}_5 R^{-n}, \quad D = \frac{\alpha h}{D_r}, \quad B = \frac{\beta h^3}{12}, \quad \left(\frac{D}{B} = \frac{3}{a^2}, \Rightarrow B = \frac{\alpha s^2 h^3}{3 D_r} \right), \quad (4.1)$$

$$N_{ri} = \bar{N}_{ri} h B_r, \quad M_{ri} = \bar{M}_{ri} B_r h^2, \quad M_{\theta i} = \bar{M}_{\theta i} B_r h^2, \quad b_1 = \frac{\bar{b}_1}{h}, \quad b_2 = \frac{\bar{b}_2}{h^3}$$

С учётом (3.4) ÷ (3.11) в обозначениях (4.1) получим:

$$\bar{w}_1 = \bar{c}_1 + \frac{\bar{c}_2}{m} \rho^{1+n} + \frac{\bar{c}_3}{m} \rho^{1-n} + \frac{3\bar{P}\rho^2}{\pi m^2 (1-n^2)} - \frac{3\chi\bar{P}}{5\pi} \ln \rho \quad (4.2)$$

$$\bar{w}_2 = \bar{c}_4 + \frac{\bar{c}_5}{m} \rho^{1+n} + \frac{\bar{b}_1 \rho^2}{m^2} + \frac{\bar{b}_2 \rho^4}{m^4}, \quad \bar{N}_1 = -\frac{m\bar{P}}{2\pi\rho} \quad (4.3)$$

$$\bar{N}_{r1} = -\frac{m\bar{P}}{2\pi\rho}, \quad \bar{N}_{r2} = -\frac{m\bar{P}}{2\pi k^2} \rho \quad (4.4)$$

$$\bar{M}_{r1} = -\frac{m}{12} \left[(1+n)(n+v_\theta) \rho^{n-1} \cdot \bar{c}_2 + (1-n)(v_\theta - n) \rho^{-n-1} \cdot \bar{c}_3 + \frac{6(1+v_\theta)\bar{P}}{\pi m (1-n^2)} \right] \quad (4.5)$$

$$\bar{M}_{\theta 1} = -\frac{mn^2}{12} \left[(1+n)(1+nv_r) \rho^{n-1} \cdot \bar{c}_2 + (1-n)(1-nv_r) \rho^{-n-1} \cdot \bar{c}_3 + \frac{6(1+v_r)\bar{P}}{\pi m (1-n^2)} \right] \quad (4.6)$$

$$\bar{M}_{r2} = -\frac{m}{12} \left\{ (1+n)(n+v_\theta) \rho^{n-1} \bar{c}_5 + \frac{2(1+v_\theta)}{m} \bar{b}_1 + \right. \\ \left. + \frac{4(3+v_\theta)\rho^2}{m^3} \bar{b}_2 + \frac{3m\bar{P}}{5\pi k^2} [\chi(1+v_\theta) + 2A_1] \right\} \quad (4.7)$$

$$\bar{M}_{\theta 2} = -\frac{mn^2}{12} \left\{ (1+n)(1+nv_r) \rho^{n-1} \bar{c}_5 + \frac{2(1+v_r)}{m} \bar{b}_1 + \right. \\ \left. + \frac{4(1+3v_r)\rho^2}{m^3} \bar{b}_2 + \frac{3m\bar{P}}{5\pi k^2 n^2} [(1+v_r)n^2\chi + 2A_2] \right\} \quad (4.8)$$

Здесь

$$\bar{b}_1 = \frac{3m^2\bar{P}}{10\pi k^2 (1-n^2)} [\chi(n^2 - 1) + 2(A_2 - A_1)], \quad \bar{b}_2 = \frac{3m^2\bar{P}}{2(9-n^2)\pi k^2} \quad (4.9)$$

Условия упруго-зашемлённой опоры и условия при $r = \varepsilon$ в обозначениях (4.1) примут вид:

$$\begin{aligned}
& (1+n)[1+(n+v_0)\alpha m]\bar{c}_2 + (1-n)[1+(v_0-n)\alpha m]\bar{c}_3 = \\
1) & = \frac{3\bar{P}}{5\pi m(1-n^2)} \left\{ \chi m^2(1-n^2) - 10 - 10\alpha m [sm(1-n^2) + (1+v_0)] \right\}, \\
& m\bar{c}_1 + [1+ms(1+n)]\bar{c}_2 + [1+ms(1-n)]\bar{c}_3 = \\
2) & = \frac{\bar{P}}{5\pi m(1-n^2)} \left\{ 10(1-n^2)\alpha s^2 m^3 - 15 - 3ms[10 - \chi m^2(1-n^2)] \right\}, \quad (4.10) \\
& m\bar{c}_1 + k^{1+n} \cdot \bar{c}_2 + k^{1-n} \cdot \bar{c}_3 - m\bar{c}_4 - k^{1+n} \cdot \bar{c}_5 = \frac{\bar{b}_1 k^2}{m} + \frac{\bar{b}_2 k^4}{m^3} - \\
3) & - \frac{3k^2 \bar{P}}{\pi m(1-n^2)} + \frac{3\chi m \bar{P}}{5\pi} \ln k, \\
& (1+n)k^n \cdot \bar{c}_2 + (1-n)k^{-n} \cdot \bar{c}_3 - (1+n)k^n \cdot \bar{c}_5 = \frac{2\bar{b}_1 k}{m} + \frac{4\bar{b}_2 k^3}{m^3} - \\
4) & - \frac{6k\bar{P}}{\pi m(1-n^2)} + \frac{3\chi m \bar{P}}{5\pi k}, \\
& (1+n)(n+v_0)k^{n-1} \cdot \bar{c}_2 + (1-n)(v_0-n)k^{-n-1} \cdot \bar{c}_3 - (1+n)(n+v_0)k^{n-1} \cdot \bar{c}_5 = \\
5) & = \frac{6(1+v_0)\bar{P}}{\pi m(1-n^2)} + \frac{2(1+v_0)\bar{b}_1}{m} + \frac{4(3+v_0)k^2 \bar{b}_2}{m^3} + \frac{3m\bar{P}}{5\pi k^2} [\chi(1+v_0) + 2A_1]
\end{aligned}$$

Определив постоянные \bar{c}_i , можно вычислить безразмерные значения всех расчётных величин пластинки.

5. Численные результаты. Рассмотрим численный пример.

Пользуясь линейностью задачи, положим $\bar{P} = 1$. В каждом конкретном случае, умножив решение на действительное значение \bar{P} , получим истинные безразмерные значения расчётных величин.

Пусть

$$n = \sqrt{2} (E_\theta = 2E_r), E_z = \frac{2E_r}{3}, \chi = 10, m = 0.25, k = 0.5, s = 0.5, \quad (5.1)$$

$$v_r = 0.15 (v_r = v_{\theta r}), v_{zr} = 0.4, v_{\theta z} = 0.2, \alpha = 0.1, 1 \text{ и } 10$$

Из условий симметрии механических свойств ортогодного тела ([1], стр. 23 условия (4.16)) получим:

$$v_\theta = 0.3 (v_\theta = v_{r\theta}), v_{rz} = 0.267, v_{z\theta} = 0.6 \quad (5.2)$$

Тогда, из формул [1] (стр. 47, (5.2)) находим:

$$A_1 = -0.513, \quad A_2 = -0.754 \quad (5.3)$$

Принятые механические параметры удовлетворяют условиям положительности энергии деформирования ортотропного тела [1], (стр. 24 условия (4.18)), поскольку

$$\mu_{12} = \mu_{21} = -0.212, \quad \mu_{13} = \mu_{31} = -0.327, \quad \mu_{23} = \mu_{32} = -0.346,$$

$$\left| \frac{\mu_{13} - \mu_{12}\mu_{32}}{\sqrt{1-\mu_{12}^2}\sqrt{1-\mu_{23}^2}} \right| = 0.436 \quad (5.4)$$

Рассмотрим следующие частные случаи:

1. $\chi = A_1 = A_2 = 0$ (пренебрегаются влияния поперечного сдвига и обжатия)
2. $\chi = 10, \quad A_1 = -0.513, \quad A_2 = -0.754$ (учитываются эти влияния одновременно)
3. $\chi = 10, \quad A_1 = A_2 = 0$ (учитывается только влияние поперечного сдвига)
4. $\chi = 0, \quad A_1 = -0.513, \quad A_2 = -0.754$ (учитывается только влияние обжатия).

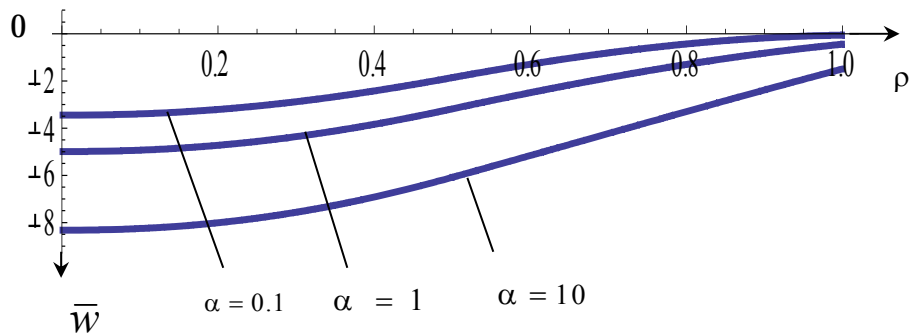
Для этих частных случаев в табл. 1 приведены безразмерные значения прогиба \bar{w} , а в табл. 2 и 3 – изгибающих моментов \bar{M}_r и \bar{M}_θ в некоторых точках пластинки. Для наглядности, на фигурах 2÷4 представлены графики изменения безразмерных величин прогиба и изгибающих моментов вдоль радиуса пластинки в случае 2.

Таблица 1

\bar{w}		ρ					
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\alpha = 0.1$	1	1.990	1.969	1.878	1.708	1.466	1.173
	2	3.452	3.396	3.209	2.881	2.424	1.859
	3	3.520	3.463	3.271	2.936	2.468	1.891
	4	1.922	1.902	1.816	1.654	1.422	1.142
$\alpha = 1.0$	1	3.281	3.255	3.148	2.946	2.651	2.282
	2	4.994	4.934	4.727	4.361	3.839	3.185
	3	5.077	5.015	4.804	4.429	3.897	3.228
	4	3.198	3.174	3.072	2.877	2.594	2.239
$\alpha = 10$	1	6.113	6.080	5.942	5.674	5.275	4.759
	2	8.325	8.256	8.011	7.566	6.920	6.087
	3	8.436	8.365	8.115	7.661	7.003	6.154
	4	6.002	5.971	5.838	5.579	5.192	4.691
\bar{w}		ρ					
		0.6	0.7	0.8	0.9	1	
$\alpha = 0.1$	1	0.862	0.568	0.319	0.139	0.050	
	2	1.291	0.811	0.434	0.178	0.059	
	3	1.310	0.821	0.439	0.179	0.059	
	4	0.844	0.558	0.314	0.137	0.049	
$\alpha = 1.0$	1	1.872	1.451	1.047	0.682	0.377	
	2	2.497	1.864	1.301	0.823	0.444	
	3	2.527	1.884	1.314	0.831	0.448	
	4	1.842	1.431	1.034	0.674	0.373	
$\alpha = 10$	1	4.151	3.480	2.770	2.041	1.308	
	2	5.162	4.229	3.299	2.383	1.492	
	3	5.214	4.269	3.328	2.402	1.502	
	4	4.099	3.441	2.742	2.022	1.298	

Таблица 2

$\bar{M}_r \cdot 10^2$		ρ					
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\alpha = 0.1$	1	0	4.52	5.23	4.90	3.77	1.89
	2	0.16	4.09	4.59	4.13	2.87	0.89
	3	0.00	3.89	4.39	3.91	2.65	0.67
	4	0.16	4.72	5.44	5.12	3.99	2.13
$\alpha = 1.0$	1	0	5.32	6.29	6.17	5.19	3.45
	2	0.16	5.05	5.88	5.64	4.58	2.77
	3	0.00	4.86	5.68	5.44	4.37	2.56
	4	0.16	5.51	6.49	6.37	5.39	3.67
$\alpha = 10$	1	0	6.90	8.39	8.65	7.99	6.53
	2	0.16	6.94	8.41	8.63	7.95	6.46
	3	0.00	6.78	8.23	8.46	7.77	6.29
	4	0.16	7.07	8.57	8.83	8.17	6.71
$\bar{M}_r \cdot 10^2$		ρ					
		0.6	0.7	0.8	0.9	1	
$\alpha = 0.1$	1	-0.09	-1.75	-3.19	-4.50	-5.70	
	2	-1.25	-3.03	-4.58	-5.97	-7.25	
	3	-1.41	-3.16	-4.69	-6.07	-7.34	
	4	0.07	-1.62	-3.09	-4.41	-5.61	
$\alpha = 1.0$	1	1.59	0.05	-1.30	-2.51	-3.63	
	2	0.77	-0.87	-2.30	-3.58	-4.75	
	3	0.62	-0.98	-2.39	-3.66	-4.82	
	4	1.74	0.15	1.21	-2.44	-3.56	
$\alpha = 10$	1	4.91	3.58	2.43	1.41	0.47	
	2	4.75	3.37	2.18	1.13	0.17	
	3	4.64	3.30	2.14	1.09	0.15	
	4	5.01	3.65	2.48	1.44	0.49	

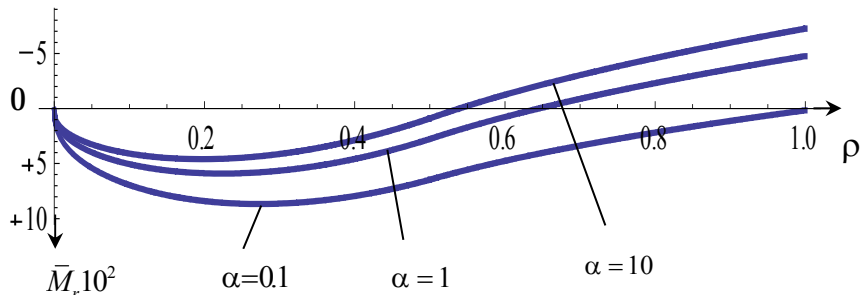


Фиг.2

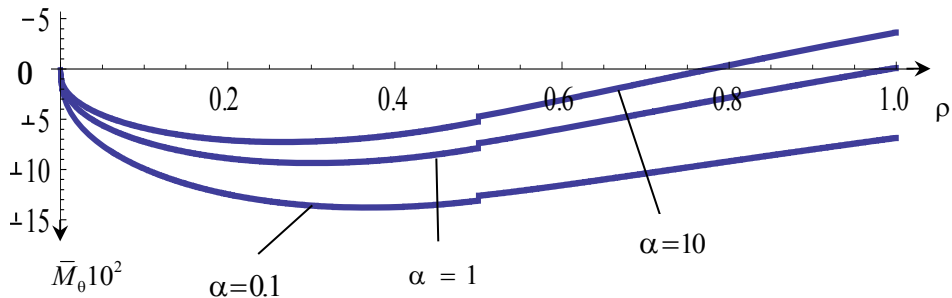
Таблица 3

$\bar{M}_0 \cdot 10^2$		ρ						
		0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5-	0.5+
$\alpha = 0.1$	1	0	6.56	8.04	8.38	7.89	6.69	6.69
	2	0.16	5.88	7.08	7.22	6.57	5.22	4.74
	3	0.00	5.67	6.85	6.98	6.32	4.96	4.96
	4	0.16	6.77	8.27	8.62	8.15	6.96	6.48
$\alpha = 1.0$	1	0	7.69	9.55	10.17	9.91	8.90	8.90
	2	0.16	7.24	8.89	9.36	8.98	7.87	7.39
	3	0.00	7.04	8.68	9.14	8.75	7.63	7.63
	4	0.16	7.89	9.76	10.39	10.14	9.14	8.66
$\alpha = 10$	1	0	9.92	12.5	13.7	13.9	13.2	13.2
	2	0.16	9.92	12.46	13.59	13.74	13.09	12.62
	3	0.00	9.74	12.29	13.41	13.56	12.91	12.91
	4	0.16	10.09	12.69	13.87	14.05	13.44	12.96

$\bar{M}_0 \cdot 10^2$		ρ				
		0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\alpha = 0.1$	1	5.07	3.39	1.76	0.17	-1.34
	2	3.09	1.35	-0.37	-2.04	-3.63
	3	3.20	1.40	-0.35	-2.04	-3.65
	4	4.96	3.34	1.73	0.18	-1.32
$\alpha = 1.0$	1	7.45	5.93	4.43	2.98	1.59
	2	5.94	4.39	2.84	1.34	-0.11
	3	6.08	4.48	2.89	1.37	-0.09
	4	7.31	5.85	4.38	2.96	1.58
$\alpha = 10$	1	12.1	10.9	9.71	8.53	7.39
	2	11.6	10.4	9.19	8.00	6.85
	3	11.7	10.5	9.30	8.09	6.93
	4	11.9	10.79	9.60	8.44	7.31



Фиг.3



Фиг.4

Заключение. Результаты решения приводят к заключениям:

1. С возрастанием параметра α жёсткости упруго-зашемлённой опоры уменьшаются и прогибы пластинки всюду увеличиваются. При этом, относительные поправки прогибов уменьшаются. Как и следовало ожидать, учёт поперечного сдвига приводит к заметному увеличению, а учёт обжатия, наоборот, к незначительному уменьшению прогиба пластинки.

2. При учёте обжатия (случаи 2 и 4) изгибающие моменты M_r и M_θ в центре пластинки равны и отличны от нуля. В случае же 1 и 3 эти моменты равны нулю. При учёте обжатия изгибающий момент \bar{M}_θ на границе раздела нагружённой и ненагружённой частей пластинки имеет разрыв первого рода. Величина этого разрыва не зависит от значения параметра α .

В заключение отметим, что если независимо от значения радиуса нагружённой части $r = \varepsilon$ ($\rho = k$) сумму нагрузки считать постоянной ($\tilde{p} = \text{const}$), то при $\varepsilon \rightarrow 0$ ($k \rightarrow 0$) получим решение задачи для случая, когда в центре пластинки действует сосредоточенная сила. Однако, при учёте поперечного сдвига с приближением к центру пластинки прогиб и его производная стремятся к бесконечности и полученное решение становится неприемлемым [11]. В случае же $\varepsilon = R$ ($k = 1$) получим решение задачи пластинки, целиком нагружённой равномерно распределённой нагрузкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с. Ambartsumian S. A. Theory of anisotropic plates M. Nauka, 1987. 360p. (in Russian)
2. Прочность, устойчивость, колебания. /Справочник под ред. Биргера И.А. и Пановко Я.Г. Т. 3. Изд. Машиностроение, 1964. 564с. Strength, stability, vibrations Birger I.A., Panivko V3, 1964. 564p. (in Russian).
3. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки, под редакцией Г.С. Шапиро. М.: Изд. Наука, Физматлит., 1966. 632с. Timoshenko S., Voinowsky-Krieger S. Plates and shells. McGraw-Hill, New York. 1959. 623p.
4. Геворгян Г.З. Об изгибных колебаниях ортотропных полос переменной толщины с учётом поперечных эффектов при условиях упругой заделки. Актуальные проблемы механики сплошной среды. //Труды IV международной конференции 21-26 сентября 2015, Цахкадзор, Армения, с.129-133. Gevorgyan G.Z. Vibrations of orthotropic strips of variable thickness taking into account the transverse shear under conditions of elastic joints. Proceedings of IV international conference "Topical Problems of Continuum Mechanics", Yerevan-2015, pp.129-133 (in Russian).
5. Киракосян Р.М. Упруго-зашемлённая опора для осесимметрично изгибаемых круглых пластин. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. //Труды VIII международной конференции, сентябрь 22-26, 2014, Горис-Степанакерт, с.261-265. Kirakosyan R. M. Elastically-fixed support for an axisymmetrical bending circular plates. Proceedings of VIII international conference "The problems of dynamics of interaction of deformable media", September 22-26, 2014, Goris-Stepanakert, pp.172-176 (in Russian).

6. Степанян С.П. Неклассическая задача изгиба балки линейно-переменной толщины при наличии упруго-зашемлённой опоры. Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред. //Труды VIII международной конференции, сентябрь 22-26, 2014, Горис-Степанакерт, с.408-412. Stepanyan S. P. Nonclassical problem of beam bending linearly variable thickness under the presence of elastically restrained supports. Proceedings of VIII international conference "The problems of dynamics of interaction of deformable media", September 22-26, 2014, Goris-Stepanakert, pp.408-412 (in Russian).
7. Киракосян Р.М. Неклассическая задача изгиба ортотропной балки с упруго-зашемлённой опорой. // Докл. НАН Армении. 2014. Т.114. № 2. С.101-107.. R. M. Kirakosyan Non-Classical Problem of a Bend Orthotropic Beams with the Elastic Clamped Support. NAS RA Reports, 2014, Volume 114, № 2, pp. 101-107
8. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Неклассическая задача изгиба ортотропной балки переменной толщины с упруго-зашемлённой опорой. //Докл. НАН Армении. 2014. Т.114. № 3. С.205-212. Kirakosyan R. M., Stepanyan S. P. Non Classical Problem of Bending of an Orthotropic Beam of Variable Thickness with Elastically Clamped Support. NAS RA Reports, 2014, Volume 114, № 3, pp. 205-212
9. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Устойчивость стержня при наличии упруго-зашемлённой опоры. //Докл. НАН Армении. 2014. Т.114. № 4. С.309-315. Kirakosyan R. M. , Stepanyan S. P. Stability of the Rod in the Presence of Elastic Clamped Support. NAS RA Reports, 2014, Volume 114, No 4, pp. 309-315
10. Razmik M. Kirakosyan, Seyran P. Stepanyan. On a Model of Elastic Clamped Support of Plate-Strip. //International scientific Journal, Modeling of Artificial Intelligence. 2015. Vol.6. Is. 2, pp.67-74.
11. Киракосян Р.М. Об одной неклассической задаче изгиба упруго-зашемлённой круглой пластинки. //Докл. НАН Армении. 2015. Т.115. №4. С.284-289. Kirakosyan R. M. On One Nonclassical Problem of a Bend of an Elastically Fastened Round Plate . NAS RA Reports, 2015, Volume 115, No 4, pp. 284-289
12. Степанян С.П. Задача термоупругости ортотропной пластинки-полосы переменной толщины при наличии упруго- зашемлённой опоры. //Докл. НАН Армении. 2016. Т.116. №1. С.26-33. S. P. Stepanyan Thermo-Elasticity Problem of an Orthotropic Plate-Strip of Variable Thickness at the Presence of an Elastically Fastened Support. NAS RA Reports, 2016, Volume 116, No 1, pp. 26-33.
13. Киракосян Р.М., Степанян С.П. Задача изгиба упруго-зашемлённой ортотропной круглой пластинки, опирающейся на упругом основании. //Докл. НАН Армении. 2016. Т.116. №2. С.120-127. R. M. Kirakosyan, S. P. Stepanyan. The Problem of Bending Resiliently Clamped Orthotropic Circular Plate Resting on the Elastic Foundation. NAS RA Reports, 2016, Volume 116, No 2, pp. 120-127.

Сведения об авторах:

Киракосян Размик Макарович – доктор техн. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН РА. **E-mail:** Kirakosyan Razmik@ mechins.sci.am

Степанян Сейран Павлович – к.ф.-м.н, доцент кафедры численного анализа и мат. моделирования факультета информатики и прикладной математики ЕГУ.

Тел: (+374 93) 524883, **E-mail:** seyran.stepanyan@ysu.am

Поступила в редакцию 11.10.2015