Известия НАН Армении, Математика, том 51, н. 5, 2016, стр. 3-12.

ОПЕРАТОРЫ ТИПА БЕРГМАНА НА ПРОСТРАНСТВАХ СО СМЕШАННОЙ НОРМОЙ В ШАРЕ ИЗ $\mathbb{C}^n$

К. АВЕТИСЯН, Н. ГАПОЯН

Ереванский Государственный Университет
E-mails: *avetkaren@ysu.am*; *nell.85@list.ru*

Аннотация. В статье рассмотрены введенные Шилдсом и Вильямсом операторы типа Бергмана, зависящие от нормальной пары весовых функций. Доказано, что существуют значения параметра β, при которых эти операторы ограничены на пространствах $L(p,q,\beta)$ со смешанной нормой в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$.

MSC2010 number: 47B38, 32A37.

Ключевые слова: единичный шар из $\mathbb{C}^n$; нормальная весовая функция; нормальная пара; пространства со смешанной нормой; операторы Бергмана[1].

1. Введение и обозначения

Пусть $B = B_n := \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \ |z| < 1\}$ — открытый единичный шар в $\mathbb{C}^n$, и $S := \partial B$ — его граница, единичная сфера. Скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$ обозначим через $\langle z, w\rangle := z_1\overline{w}_1 + \dots + z_n\overline{w}_n, \quad z, w \in \mathbb{C}^n$. Всюду далее будем полагать $z = r\zeta,\ w = \rho\eta \in B,\ 0 \le r, \rho < 1,\ \zeta, \eta \in S, \quad r = |z| = \sqrt{\langle z, z\rangle}$.

Множество всех голоморфных функций в шаре B обозначим через $H(B)$. Для функции $f(z) = f(r\zeta)$, заданной в шаре B, ее интегральные средние порядка p на сфере $|z| = r$ обозначены как обычно, через

$$M_p(f;r) = \big\|f(r\cdot)\big\|_{L^p(S;d\sigma)}, \qquad 0 \le r < 1,\ 0 < p \le \infty,$$

где $d\sigma$ — $(2n-1)$-мерная поверхностная мера Лебега на сфере S, нормированная так, что $\sigma(S) = 1$. Класс функций $f \in H(B)$ с "нормой" $\|f\|_{H^p} = \sup\limits_{0<r<1} M_p(f;r)$ есть обычное пространство Харди $H^p(B)$ в единичном шаре B.

Определим пространство $L(p,q,\beta)\big(0 < p, q \le \infty,\ \beta \in \mathbb{R}\big)$ со смешанной нормой как пространство тех измеримых функций $f(z) = f(r\zeta)$ в шаре B, для которых

---

[1]Настоящее исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке Центра Математических Исследований Ереванского Государственного Университета

конечна квазинорма

$$\|f\|_{L(p,q,\beta)} = \|f\|_{p,q,\beta} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_0^1 (1-r)^{\beta q - 1} M_p^q(f;r)\, dr \right)^{1/q}, & 0 < q < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}\limits_{0<r<1} (1-r)^{\beta} M_p(f;r), & q = \infty. \end{cases}$$

Подпространства $L(p,q,\beta)$, состоящие из голоморфных функций, обозначим через $H(p,q,\beta) := H(B) \cap L(p,q,\beta),\ \beta > 0$. Если $1 \le p, q \le \infty$, то $L(p,q,\beta), H(p,q,\beta)$ являются банаховыми пространствами с нормой $\|\cdot\|_{p,q,\beta}$. При $p = q < \infty$ пространства $H(p,p,\beta)$ совпадают с весовыми классами Бергмана, а при $q = \infty$ их часто называют весовыми пространствами Харди.

Пространства со смешанной нормой для голоморфных в единичном круге функций были введены Харди и Литтлвудом в [1], [2] и развиты в дальнейшем Флеттом [3]. Смотри также монографии [4], [5], посвященные весовыми пространствам Бергмана $H(p,p,\beta)$ в единичном круге.

Много работ посвящено пространствам $L(p,q,\beta)$ со смешанной нормой или их подпространствам, состоящим из голоморфных, плюригармонических или гармонических функций в круге, шаре из $\mathbb{C}^n$ или $\mathbb{R}^n$. Пространства $H(p,q,\beta)$ для голоморфных функций в единичном шаре $B \subset \mathbb{C}^n$ и бергмановские операторы на них подробно исследованы, в работах [6]–[10], а для голоморфных и n-гармонических функций в полидиске из $\mathbb{C}^n$ смотри, например [11].

Символы $C(\alpha, \beta, \dots), c_\alpha$ и т.п. всюду будут обозначать положительные постоянные, различные в разных местах и зависящие только от указанных индексов $\alpha, \beta, \dots$. Через dV обозначим лебегову меру на B, нормированную так, что $V(B) = 1$. В полярных координатах будем иметь $dV(z) = 2n\, r^{2n-1} dr d\sigma(\zeta)$.

Вместо стандартных степенных весовых функций Шилдс и Вильямс [12] впервые предложили использовать более общие нормальные весовые функции. Фактически это те весовые функции, которые имеют степенные миноранты и мажоранты с положительными показателями.

Определение 1.1. *(Нормальная весовая функция,* [12]*) Положительная непрерывная функция* $\varphi(r),\ 0 \le r < 1$, *называется нормальной, если найдутся постоянные* $0 < a < b$ *и* $0 \le r_0 < 1$ *такие, что имеют место*

$$\frac{\varphi(r)}{(1-r)^a} \searrow 0 \qquad \text{и} \qquad \frac{\varphi(r)}{(1-r)^b} \nearrow +\infty \qquad \text{при} \quad r \to 1^-, \quad r_0 \le r < 1. \tag{1.1}$$

Здесь и далее монотонность функций всегда будем подразумевать в широком, нестрогом смысле. Индексы a и b для нормальной функции φ определяются неоднозначно.

Типичными примерами нормальных функций являются функции вида

$$\varphi_{c,d}(r) = (1-r)^c \left(\log \frac{e}{1-r}\right)^d, \qquad c>0,\ d\in\mathbb{R},$$

причем при $c=0$ функция $\varphi_{0,d} = \left(\log \frac{e}{1-r}\right)^d$ уже не будет нормальной.

Определение 1.2. *(Нормальная пара,* [12]*) Скажем, что пара функций* $\{\varphi,\psi\}$ *составляет нормальную пару, если функция* φ *нормальна, и существует число* $\alpha > b-1$ *(индекс пары) такое, что*

$$\varphi(r)\,\psi(r) = (1-r^2)^\alpha, \qquad 0\le r<1. \tag{1.2}$$

Ввиду условия $\alpha > b-1$ функция ψ будет интегрируемой на интервале $(0,1)$. Как показано в [12], для нормальной функции φ всегда найдется ее нормальная пара, а при более строгом условии $\alpha > b$ функция ψ сама также будет нормальной с индексами $\alpha-b$ и $\alpha-a$.

Расширим область определения таких радиальных весовых функций до шара B, положив $\varphi(z) := \varphi(|z|) = \varphi(r),\ \psi(z) := \psi(|z|) = \psi(r)$.

Посредством нормальных весовых функций Шилдс и Вильямс [12] в единичном круге $\mathbb{D} = B_1$ предложили обобщения операторов Бергмана, которые для шара B определены в работах А. И. Петросяна [13], [14] в виде

$$Q_{\varphi,\psi}(f)(z) := \int_B \frac{\psi(z)\,\varphi(w)}{(1-\langle z,w\rangle)^{n+1+\alpha}}\, f(w)\, dV(w), \qquad z\in B, \tag{1.3}$$

$$\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f)(z) := \int_B \frac{\psi(z)\,\varphi(w)}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+\alpha}}\, f(w)\, dV(w), \qquad z\in B. \tag{1.4}$$

В частном случае $\varphi(r) = (1-r^2)^\alpha,\ \psi\equiv 1$ операторы (1.3), (1.4) сводятся к классическим проекторам Бергмана, см. [4]–[10]. В случае $\varphi(r) = (1-r^2)^c,\ \psi(r) = (1-r^2)^d,\ c+d=\alpha$ операторы типа Бергмана (1.3), (1.4) также хорошо известны, см. [7]–[11].

В настоящей статье мы доказываем, что существуют значения параметра β, при которых общие операторы (1.3), (1.4) ограничены на пространствах $L(p,q,\beta)$ со смешанной нормой в шаре B.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть* $1 \le p, q \le \infty$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\{\varphi, \psi\}$ *— нормальная пара функций с индексами* a *и* b $(0 < a < b)$ *и с индексом пары* α $(\alpha > b-1)$ *в смысле Определений 1.1–1.2.*

Если $b - \alpha < \beta < 1 + a$, *то операторы* $Q_{\varphi,\psi}$ *и* $\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}$ *ограниченно действуют из пространства* $L(p,q,\beta)$ *в себя, т.е.*

$$Q_{\varphi,\psi} : L(p,q,\beta) \longrightarrow L(p,q,\beta), \tag{1.5}$$

$$\widetilde{Q}_{\varphi,\psi} : L(p,q,\beta) \longrightarrow L(p,q,\beta). \tag{1.6}$$

Замечание 1.1. *В частном случае* $1 \le p = q = 1/\beta < \infty$, *т.е. для невесового класса* $L(p,p,1/p)$, *Теорема 1.1 установлена в* [13], [14], *но другим методом с использованием так называемого теста Шура* ([4]–[7]), *который не подходит в нашем случае. Еще более частные случаи операторов Бергмана со степенными весами изучены в* [5]–[10].

Замечание 1.2. *В Теореме 1.1 мы фактически обобщаем результат из* [13], [14] *в трех направлениях: во-первых, предполагаем все значения* $1 \le p \le \infty$, *во-вторых, рассматриваем весовые пространства, в-третьих, вместо пространств Бергмана рассматриваем более общие пространства* $L(p,q,\beta)$ *со смешанной нормой. При этом вместо неподходящего теста Шура мы применяем обобщения неравенства Харди.*

2. Неравенства Харди и другие интегральные неравенства

Широко известны классические неравенства Харди (см. [3], [15]):

$$\int_0^1 x^{-\beta-1} \left(\int_0^x h(t)\,dt \right)^p dx \le C(p,\beta) \int_0^1 x^{p-\beta-1}\, h^p(x)\,dx, \tag{2.1}$$

$$\int_0^1 (1-r)^{\beta-1} \left(\int_0^r h(t)\,dt \right)^p dr \le C(p,\beta) \int_0^1 (1-r)^{p+\beta-1}\, h^p(r)\,dr, \tag{2.2}$$

$$\int_0^1 (1-r)^{-\beta-1} \left(\int_r^1 h(t)\,dt \right)^p dr \le C(p,\beta) \int_0^1 (1-r)^{p-\beta-1}\, h^p(r)\,dr, \tag{2.3}$$

где $1 \le p < \infty$, $\beta > 0$, $h(r) \ge 0$.

Отметим, что неравенство (2.3) выводится из (2.1) линейной заменой переменных интегрирования.

Для последующих доказательств нам понадобятся также обобщения неравенств (2.2) и (2.3).

Лемма 2.1. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $\gamma > 0$, $h(r) \ge 0$. *Для положительной непрерывной функции* $\varphi(r)$, $0 \le r < 1$, *найдутся постоянные* $b \in \mathbb{R}$, $\gamma - pb > 0$, *и* $0 \le r_0 < 1$ *такие, что*

$$\frac{\varphi(r)}{(1-r)^b} \nearrow \qquad \text{при} \quad r_0 \le r < 1. \tag{2.4}$$

Тогда

$$\int_0^1 \frac{(1-r)^{\gamma-1}}{\varphi^p(r)} \left(\int_0^r h(t)\,dt\right)^p dr \le C(p,\gamma,b,r_0) \int_0^1 \frac{(1-r)^{p+\gamma-1}}{\varphi^p(r)}\, h^p(r)\,dr. \tag{2.5}$$

Доказательство. Применим неравенство Харди (2.2) по отношению к функции $\frac{(1-r)^b}{\varphi(r)}\, h(r)$ и с индексом $\beta = \gamma - pb > 0$,

$$\int_0^1 (1-r)^{\gamma-pb-1} \left(\int_0^r \frac{(1-t)^b}{\varphi(t)}\, h(t)\,dt\right)^p dr \le C \int_0^1 (1-r)^{p+\gamma-pb-1} \left(\frac{(1-r)^b}{\varphi(r)}\, h(r)\right)^p dr,$$

где постоянная C зависит лишь от p, γ, b. Ввиду условия (2.4), монотонного убывания функции $\frac{(1-r)^b}{\varphi(r)}$ на интервале $(r_0, 1)$ и непрерывности на $[0,1)$ получаем

$$\int_0^1 (1-r)^{\gamma-pb-1} \frac{(1-r)^{pb}}{\varphi^p(r)} \left(\int_0^r h(t)\,dt\right)^p dr \le C(p,\gamma,b,r_0) \int_0^1 \frac{(1-r)^{p+\gamma-1}}{\varphi^p(r)}\, h^p(r)\,dr,$$

что совпадает с (2.5). □

Замечание 2.1. *Схожее с неравенством* (2.5) *другое неравенство типа Харди с участием нормальных весовых функций можно найти в* [10].

Нам понадобится также другая разновидность неравенства (2.5).

Лемма 2.2. *Пусть* $1 \le p < \infty$, $\gamma > 0$, $h(r) \ge 0$. *Для положительной непрерывной функции* $\varphi(r)$, $0 \le r < 1$, *найдутся постоянные* $a \in \mathbb{R}$, $\gamma - pa < 0$, *и* $0 \le r_0 < 1$ *такие, что*

$$\frac{\varphi(r)}{(1-r)^a} \searrow \qquad \text{при} \quad r_0 \le r < 1. \tag{2.6}$$

Тогда

$$\int_0^1 \frac{(1-r)^{\gamma-1}}{\varphi^p(r)} \left(\int_r^1 h(t)\,dt\right)^p dr \le C(p,\gamma,a,r_0) \int_0^1 \frac{(1-r)^{p+\gamma-1}}{\varphi^p(r)}\, h^p(r)\,dr. \tag{2.7}$$

Доказательство. Применим неравенство Харди (2.3) по отношению к функции $\frac{(1-r)^a}{\varphi(r)}\, h(r)$ и с индексом $-\beta = \gamma - pa < 0$,

$$\int_0^1 (1-r)^{\gamma-pa-1} \left(\int_r^1 \frac{(1-t)^a}{\varphi(t)}\, h(t)\,dt\right)^p dr \le C \int_0^1 (1-r)^{p+\gamma-pa-1} \left(\frac{(1-r)^a}{\varphi(r)}\, h(r)\right)^p dr,$$

где постоянная C зависит лишь от p, γ, a. Ввиду условия (2.6), монотонного возрастания функции $\frac{(1-r)^a}{\varphi(r)}$ на интервале $(r_0, 1)$ и непрерывности на $[0,1)$ получаем

$$\int_0^1 (1-r)^{\gamma-pa-1} \frac{(1-r)^{pa}}{\varphi^p(r)} \left(\int_r^1 h(t)\,dt\right)^p dr \le C(p,\gamma,a,r_0) \int_0^1 \frac{(1-r)^{p+\gamma-1}}{\varphi^p(r)} h^p(r)\,dr,$$

что совпадает с (2.7). □

Лемма 2.3. *([6], [7]) Для $\alpha > 0$ справедлива оценка*

$$\int_S \frac{d\sigma(\xi)}{|1-\langle z,\xi\rangle|^{n+\alpha}} \le \frac{C(\alpha,n)}{(1-|z|)^\alpha}, \qquad z \in B.$$

Лемма 2.4. *([12]) При $m > \beta > 0$ справедливо неравенство*

$$\int_0^1 \frac{(1-\rho)^{\beta-1}}{(1-r\rho)^m}\,d\rho \le \frac{C(\beta,m)}{(1-r)^{m-\beta}}, \qquad 0 \le r < 1.$$

Следующая лемма является вариантом схожих оценок из [9], [12] – [14].

Лемма 2.5. *Пусть φ — нормальная функция с индексами a и b $(0 < a < b)$ и с индексом пары α $(\alpha > b-1)$ в смысле Определений 1.1–1.2.*

Если $b - \alpha < \beta < 1 + a$, то

$$\int_0^1 \frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}(1-\rho)^\beta}\,d\rho \le C(\alpha,\beta,a,b,r_0)\,\frac{\varphi(r)}{(1-r)^{\alpha+\beta}}, \qquad 0 \le r < 1. \tag{2.8}$$

Доказательство. Условие $\beta < 1 + a$ обеспечивает сходимость интеграла (2.8). Достаточно доказать неравенство (2.8) для r, близких к 1. Возьмем r, $r_0 < r < 1$, и разобьем интеграл (2.8) на три части,

$$J := \int_0^1 \frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}(1-\rho)^\beta}\,d\rho =$$
$$= \left(\int_0^{r_0} + \int_{r_0}^r + \int_r^1\right) \frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}(1-\rho)^\beta}\,d\rho =: J_1 + J_2 + J_3.$$

Интеграл J_1 ограничен некоторой постоянной $C(\alpha,\beta,r_0)$. Для оценок интегралов J_2 и J_3 используем условия нормальности (1.1) и Лемму 2.4,

$$J_2 = \int_{r_0}^r \frac{\varphi(\rho)}{(1-\rho)^b}\,\frac{(1-\rho)^b}{(1-r\rho)^{1+\alpha}(1-\rho)^\beta}\,d\rho \le \frac{\varphi(r)}{(1-r)^b} \int_{r_0}^r \frac{(1-\rho)^{b-\beta}}{(1-r\rho)^{1+\alpha}}\,d\rho \le$$
$$\le C(\alpha,\beta,b)\,\frac{\varphi(r)}{(1-r)^b}\,\frac{1}{(1-r)^{\alpha+\beta-b}} = C(\alpha,\beta,b)\,\frac{\varphi(r)}{(1-r)^{\alpha+\beta}}.$$

Поскольку $\beta > b - \alpha > a - \alpha$, то аналогичным образом получаем

$$J_3 = \int_r^1 \frac{\varphi(\rho)}{(1-\rho)^a}\,\frac{(1-\rho)^a}{(1-r\rho)^{1+\alpha}(1-\rho)^\beta}\,d\rho \le \frac{\varphi(r)}{(1-r)^a} \int_r^1 \frac{(1-\rho)^{a-\beta}}{(1-r\rho)^{1+\alpha}}\,d\rho \le$$
$$\le C(\alpha,\beta,a)\,\frac{\varphi(r)}{(1-r)^a}\,\frac{1}{(1-r)^{\alpha+\beta-a}} = C(\alpha,\beta,a)\,\frac{\varphi(r)}{(1-r)^{\alpha+\beta}},$$

что завершает доказательство леммы 2.5. □

3. Ограниченность операторов типа Бергмана на пространствах со смешанной нормой

Лемма 3.1. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $\alpha > -1$, $\{\varphi, \psi\}$ *— пара положительных весовых функций. Тогда имеет место оценка*

$$M_p\big(\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f); r\big) \le C(p,n,\alpha)\,\psi(r) \int_0^1 \frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}}\, M_p(f;\rho)\, d\rho, \quad 0 \le r < 1. \tag{3.1}$$

Доказательство. Перейдем к полярным координатам в интегральном представлении $\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f)(z)$,

$$\big|\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f)(z)\big| \le \psi(z) \int_B \frac{\varphi(w)}{|1-\langle z,w\rangle|^{n+1+\alpha}}\, |f(w)|\, dV(w) =$$
$$= 2n\,\psi(z) \int_0^1 \left[\int_S \frac{|f(\rho\eta)|}{|1-\langle z,\rho\eta\rangle|^{n+1+\alpha}}\, d\sigma(\eta)\right] \varphi(\rho)\, \rho^{2n-1}\, d\rho,$$

и перепишем его в виде

$$\big|\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f)(r\zeta)\big| \le 2n\,\psi(r) \int_0^1 \left[\int_S \frac{|f(\rho\eta)|}{|1-\langle r\zeta,\rho\eta\rangle|^{n+1+\alpha}}\, d\sigma(\eta)\right] \varphi(\rho)\, \rho^{2n-1}\, d\rho = \tag{3.2}$$
$$= 2n\,\psi(r) \int_0^1 g(r,\rho,\zeta)\, \varphi(\rho)\, \rho^{2n-1}\, d\rho,$$

где обозначено

$$g(r,\rho,\zeta) = \int_S \frac{|f(\rho\eta)|}{|1-\langle r\zeta,\rho\eta\rangle|^{n+1+\alpha}}\, d\sigma(\eta).$$

Если $p = \infty$, то немедленно получаем из (3.2) по Лемме 2.3,

$$M_\infty\big(\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f); r\big) \le 2n\,\psi(r) \int_0^1 M_\infty(f;\rho) \sup_{\zeta\in S}\left[\int_S \frac{d\sigma(\eta)}{|1-\langle r\zeta,\rho\eta\rangle|^{n+1+\alpha}}\right] \varphi(\rho)\, \rho^{2n-1}\, d\rho \le$$
$$\le C(n,\alpha)\,\psi(r) \int_0^1 \frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}}\, M_\infty(f;\rho)\, d\rho.$$

Если $p = 1$, то интегрированием (3.2) немедленно получаем требуемое неравенство (3.1), воспользовавшись теоремой Фубини и Леммой 2.3.

Если $1 < p < \infty$, то из неравенства Гельдера и Леммы 2.3 получаем

$$g(r,\rho,\zeta) \le \left(\int_S \frac{|f(\rho\eta)|^p\, d\sigma(\eta)}{|1-\langle r\zeta,\rho\eta\rangle|^{n+1+\alpha}}\right)^{1/p} \left(\int_S \frac{d\sigma(\eta)}{|1-\langle r\zeta,\rho\eta\rangle|^{n+1+\alpha}}\right)^{1/p'} \le$$
$$\le \frac{C(p,n,\alpha)}{(1-r\rho)^{(1+\alpha)/p'}} \left(\int_S \frac{|f(\rho\eta)|^p\, d\sigma(\eta)}{|1-\langle r\zeta,\rho\eta\rangle|^{n+1+\alpha}}\right)^{1/p},$$

где p' — сопряженный индекс, $1/p + 1/p' = 1$. Далее проинтегрируем по переменной ζ на сфере S и вновь воспользуемся Леммой 2.3,

$$\begin{aligned}\big\|g(r,\rho,\cdot)\big\|^p_{L^p(S;d\sigma)} &\le \frac{C(p,n,\alpha)}{(1-r\rho)^{(1+\alpha)p/p'}} \int_S \left(\int_S \frac{d\sigma(\zeta)}{|1-\langle r\zeta,\rho\eta\rangle|^{n+1+\alpha}}\right) |f(\rho\eta)|^p\, d\sigma(\eta) \le \\ &\le \frac{C(p,n,\alpha)}{(1-r\rho)^{(1+\alpha)p/p'}(1-r\rho)^{1+\alpha}} \int_S |f(\rho\eta)|^p\, d\sigma(\eta) = \\ &= \frac{C(p,n,\alpha)}{(1-r\rho)^{(1+\alpha)p}}\, M_p^p(f;\rho),\end{aligned}$$

или

$$\big\|g(r,\rho,\cdot)\big\|_{L^p(S;d\sigma)} \le \frac{C(p,n,\alpha)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}}\, M_p(f;\rho). \tag{3.3}$$

Теперь вернемся к неравенству (**??**) и применим неравенство Минковского, а затем — оценку (3.3),

$$\begin{aligned}M_p\big(\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f);r\big) &\le 2n\,\psi(r)\int_0^1 \big\|g(r,\rho,\cdot)\big\|_{L^p(S;d\sigma)}\,\varphi(\rho)\,\rho^{2n-1}\,d\rho \le \\ &\le C(p,n,\alpha)\,\psi(r)\int_0^1 \frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}}\, M_p(f;\rho)\,d\rho,\end{aligned}$$

что завершает доказательство леммы 3.1. □

Доказательство Теоремы 1.1. Поскольку $\big|Q_{\varphi,\psi}(f)(z)\big| \le \widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(|f|)(z)$, то достаточно доказать лишь ограниченность (1.6) оператора $\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(|f|)$.

Вначале положим $1 \le q < \infty$. По Лемме 3.1 имеем

$$M_p\big(\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f);r\big) \le C(p,n,\alpha)\,\psi(r)\int_0^1 \frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}}\, M_p(f;\rho)\,d\rho, \quad 0 \le r < 1. \tag{3.4}$$

Проинтегрируем теперь по радиальной переменной так, чтобы получить смешанную норму,

$$\begin{aligned}\big\|\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f)\big\|^q_{L(p,q,\beta)} &= \int_0^1 (1-r)^{\beta q-1} M_p^q\big(\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f);r\big)\,dr \le \\ &\le C\int_0^1 (1-r)^{\beta q-1}\,\psi^q(r)\left[\int_0^1 \frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}}\, M_p(f;\rho)\,d\rho\right]^q dr.\end{aligned}$$

Далее воспользуемся условием (1.2) Определения 1.2 нормальной пары, а затем разобьем интеграл на две части,

$$\begin{aligned}\big\|\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f)\big\|^q_{L(p,q,\beta)} &\le C\int_0^1 \frac{(1-r)^{\alpha q+\beta q-1}}{\varphi^q(r)}\left[\int_0^1 \frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}}\, M_p(f;\rho)\,d\rho\right]^q dr = \\ &\le C\int_0^1 \frac{(1-r)^{\alpha q+\beta q-1}}{\varphi^q(r)}\left[\left(\int_0^r + \int_r^1\right) \frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}}\, M_p(f;\rho)\,d\rho\right]^q dr =: \\ &=: I_1 + I_2.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Интегралы I_1 и I_2 оценим по отдельности, используя неравенства типа Харди из Лемм 2.1 и 2.2.

По отношению к интегралу I_1 можно применить неравенство (2.5), ибо условие $\alpha q+\beta q-bq>0$ равносильно $\beta>b-\alpha$,

$$\begin{aligned} I_1 &= C\int_0^1 \frac{(1-r)^{\alpha q+\beta q-1}}{\varphi^q(r)}\left[\int_0^r \frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}}\,M_p(f;\rho)\,d\rho\right]^q dr \le \\ &\le C\int_0^1 \frac{(1-r)^{\alpha q+\beta q-1+q}}{\varphi^q(r)}\left[\frac{\varphi(r)}{(1-r^2)^{1+\alpha}}\,M_p(f;r)\right]^q dr \le \\ &\le C\int_0^1 (1-r)^{\beta q-1}M_p^q(f;r)\,dr = \\ &= C(n,p,q,\beta,\alpha,b,r_0)\,\|f\|^q_{L(p,q,\beta)}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

По отношению к интегралу I_2 можно применить неравенство (2.7), ибо условие $\beta q-q-aq<0$ равносильно $\beta<1+a$,

$$\begin{aligned} I_2 &= C\int_0^1 \frac{(1-r)^{\alpha q+\beta q-1}}{\varphi^q(r)}\left[\int_r^1 \frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}}\,M_p(f;\rho)\,d\rho\right]^q dr \le \\ &\le C\int_0^1 \frac{(1-r)^{\beta q-q-1}}{\varphi^q(r)}\left[\int_r^1 \varphi(\rho)\,M_p(f;\rho)\,d\rho\right]^q dr \le \\ &\le C\int_0^1 \frac{(1-r)^{\beta q-q-1+q}}{\varphi^q(r)}\Big[\varphi(r)\,M_p(f;r)\Big]^q dr = \\ &= C\int_0^1 (1-r)^{\beta q-1}M_p^q(f;r)\,dr = \\ &= C(n,p,q,\beta,\alpha,a,r_0)\,\|f\|^q_{L(p,q,\beta)}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Неравенства (3.5) – (3.7) вместе дают требуемое неравенство

$$\big\|\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f)\big\|_{L(p,q,\beta)} \le C\,\|f\|_{L(p,q,\beta)},$$

где постоянная $C=C(n,p,q,\beta,\alpha,a,b,r_0)>0$ зависит лишь от указанных параметров.

Теперь положим $q=\infty$. Из неравенства (3.4) с применением Леммы 2.5 получаем

$$\begin{aligned} M_p\big(\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f);r\big) &\le C(p,n,\alpha)\,\psi(r)\int_0^1 \frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}(1-\rho)^\beta}\,(1-\rho)^\beta\,M_p(f;\rho)\,d\rho \le \\ &\le C\,\psi(r)\,\|f\|_{L(p,\infty,\beta)}\int_0^1 \frac{\varphi(\rho)}{(1-r\rho)^{1+\alpha}(1-\rho)^\beta}\,d\rho \le \\ &\le C\,\psi(r)\,\|f\|_{L(p,\infty,\beta)}\frac{\varphi(r)}{(1-r)^{\alpha+\beta}} \le \\ &\le C(p,n,\alpha,\beta,a,b,r_0)\,\|f\|_{L(p,\infty,\beta)}\frac{1}{(1-r)^\beta}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\left\|\widetilde{Q}_{\varphi,\psi}(f)\right\|_{L(p,\infty,\beta)} \le C\,\|f\|_{L(p,\infty,\beta)},$$

где постоянная $C = C(p,n,\alpha,\beta,a,b,r_0) > 0$ зависит лишь от указанных параметров. Теорема 1.1 доказана.

Abstract. The paper considers Bergman type operators introduced by Shields and Williams depending on normal pair of weight functions. We prove that there exist values of parameters β for which these operators are bounded on mixed norm spaces $L(p,q,\beta)$ on the unit ball in $\mathbb{C}^n$.

Список литературы

[1] G.H. Hardy and J.E. Littlewood, "Some properties of fractional integrals (II)", Math. Z., **34**, 403 – 439 (1932).
[2] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, "Theorems concerning mean values of analytic or harmonic functions", Quart. J. Math. (Oxford), **12**, 221 – 256 (1941).
[3] T. M. Flett, "The dual of an inequality of Hardy and Littlewood and some related inequalities", J. Math. Anal. Appl., **38**, 746 – 765 (1972).
[4] A. E. Djrbashian and F. A. Shamoian, Topics in the Theory of A^p_α Spaces, Teubner–Texte zur Math., b. 105, Teubner, Leipzig (1988).
[5] H. Hedenmalm, B. Korenblum and K. Zhu, Theory of Bergman Spaces, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (2000).
[6] W. Rudin, Function Theory in the Unit Ball of $\mathbb{C}^n$, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1980).
[7] K. Zhu, Spaces of holomorphic functions in the unit ball, Graduate Texts in Mathematics, **226**, Springer-Verlag, New York (2005).
[8] M. Jevtić, "Bounded projections and duality in mixed-norm spaces of analytic functions", Complex Variables Theory Appl., **8**, 293 – 301 (1987).
[9] G. Ren and J. Shi, "Bergman type operators on mixed norm spaces with applications", Chinese Ann. Math., Ser. B, **18**, no. 3, 265 – 276 (1997).
[10] J. H. Shi and G. B. Ren, "Boundedness of the Cesàro operator on mixed norm spaces", Proc. Amer. Math. Soc., **126**, 3553 – 3560 (1998).
[11] K. Avetisyan, "Continuous inclusions and Bergman type operators in n-harmonic mixed norm spaces on the polydisc", J. Math. Anal. Appl., **291**, 727 – 740 (2004).
[12] A. L. Shields and D. L. Williams, "Bounded projections, duality, and multipliers in spaces of analytic functions", Trans. Amer. Math. Soc., **162**, 287 – 302 (1971).
[13] А.И. Петросян, "Ограниченные проекторы в пространствах функций, голоморфных в единичном шаре", Известия НАН Армении, Математика, **46**, no. 5, 53 – 64 (2011).
[14] A. I. Petrosyan and N. T. Gapoyan, "Bounded projectors on L^p spaces in the unit ball", Proc. Yerevan State Univ., Phys. Math. Sci., no. 1, 17 – 23 (2013).
[15] И. Стейн, Г. Вейс, Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах, Мир, М. (1974).

Поступила 15 января 2016