ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ԳԻՏԱԿԱՆ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ ЕРЕВАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Բնական գիտություններ 1, 1980 Естественные науки

Физика

Д. М. СЕДРАКЯН, К. М. ШАХАБАСЯН

УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА-ЛАНДАУ ДЛЯ ДВУКОМПОНЕНТНОЙ ФЕРМИ-ЖИДКОСТИ
2. УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ПРОТОННОГО ТОКА

При помощи функций Грина получены выражение для сверхпроводящего протонного тока в «пре»-фазе нейтронной звезды и уравнение для магнитного поля внутри звезды. Показано, что учет вращения приведет к возникновению в местах нахождения нейтронных вихревых нитей протонных вихревых нитей. Магнитное поле, которое в центре вихря равно $10^{12} \div 10^{14}$ гс, быстро спадает на расстоянии 10^{-11} см. Кроме того, вращение приводит к возникновению слабого однородного магнитного поля.

Вывод уравнения для тока

В работе [1] нами впервые получены уравнения для температурных функций Грина и «аномальных» средних протонов и нейтронов с учетом сильного взаимодействия между ними. При получении этих уравнений использовался метод, предложенный в [2, 3]. Далее эти уравнения были преобразованы в интегральные уравнения для фурье-компонент и решены методом итераций в приближении малых Δ, Δ_1 и g_3^2. Здесь Δ и Δ_1 — щели протонов и нейтронов соответственно, g_3— постоянная нейтронно-протонного взаимодействия. Для фурье-компоненты функции Грина протонов $G_\omega(\vec{r}, \vec{r}')$ получаем следующее выражение [1]:

$$G_\omega(\vec{r}, \vec{r}') = \tilde{G}_\omega(\vec{r}, \vec{r}') - \int\int d\vec{m}\, d\vec{l}\, \Delta(\vec{l})\Delta^*(\vec{m})\tilde{G}_\omega(\vec{r}, \vec{l})\tilde{G}_{-\omega}(\vec{m}, \vec{l})\tilde{G}_\omega(\vec{m}, \vec{r}') -$$

$$-2g_3^2T^2 A(\vec{r}, \vec{r}') + 2g_3^2T^2 B(\vec{r}, \vec{r}') + 2g_3^2T^2 C(\vec{r}, \vec{r}'), \tag{1}$$

а коэффициенты $A(\vec{r}, \vec{r}')$, $B(\vec{r}, \vec{r}')$ и $C(\vec{r}, \vec{r}')$ приводятся в [1]. Для исследования электромагнитных свойств нейтронно-протонной сверхтекучей ферми-жидкости в «пре»-фазе нейтронной звезды нам потребуется выражение для сверхпроводящего протонного тока. Величина плотности тока $\vec{j}_p$ в данной точке есть термодинамическое среднее от квантово-механического выражения для оператора тока $\hat{\vec{j}}_p(x)$ во вторичном квантовании [3]:

$$\hat{\vec{j}}_p(x)=\frac{ie}{m_p}(\nabla_{\vec{r}'}-\nabla_{\vec{r}})_{\vec{r}'\to\vec{r}}\tilde{\bar{\Psi}}(x')\tilde{\Psi}(x)-\frac{e^2\vec{A}(x)}{m_p}\tilde{\bar{\Psi}}(x)\tilde{\Psi}(x). \tag{2}$$

Поэтому $\vec{j}_p(x)$ может быть записана через гриновскую функцию протонов следующим образом:

$$\vec{j}_p(x)=2\left\{\frac{ie}{2m_p}(\nabla_{\vec{r}'}-\nabla_{\vec{r}})G(x,x')-\frac{e^2\vec{A}(x)}{m_p}G(x,x')\right\}_{\vec{r}'\to\vec{r},\tau'=\tau+0} \tag{3}$$

Из условия локальной нейтральности имеем

$$T\sum_\omega\{2g_3^2T^2[B(\vec{r},\vec{r}')+C(\vec{r},\vec{r}')-A(\vec{r},\vec{r}')]-$$

$$-\int\int d\vec{m}\,d\vec{l}\,\Delta(\vec{l})\,\Delta^*(\vec{m})\tilde{G}_\omega(\vec{r},\vec{l})\tilde{G}_{-\omega}(\vec{m},\vec{l})\tilde{G}_\omega(\vec{m},\vec{r}')\}_{\vec{r}'\to\vec{r}}=0. \tag{4}$$

Кроме того, потребуем выполнения условия $\vec{j}_p=0$ при $\Delta=0$, так как в противном случае будет существовать сверхпроводящий ток, обусловленный нормальными протонами, находящимися в постоянном магнитном поле. Из этого условия получаем следующее соотношение:

$$2T\sum_\omega\left\{\frac{ie}{2m_p}(\nabla_{\vec{r}'}\ \nabla_{\vec{r}})[\tilde{G}_\omega(\vec{r},\vec{r}')-2g_3^2T^2A(\vec{r},\vec{r}')]-\frac{e^2}{m_p}\vec{A}(\vec{r})\,\tilde{G}_\omega(\vec{r},\vec{r}')\right\}_{\vec{r}'\to\vec{r}}=$$

$$=0. \tag{5}$$

Разлагая в (3) $\tilde{G}_\omega(\vec{r},\vec{m})$ в ряд по степеням $\vec{A}(\vec{l}-\vec{m})$, а $\Delta(\vec{l})$ и $\Delta_1(\vec{l})$ — по степеням $(\vec{r}-\vec{l})$ и сохраняя члены первого порядка, имеем с учетом (4) и (5)

$$\vec{j}_p=\left[\frac{ie}{m_p}\left(\Delta\frac{\partial\Delta^*}{\partial\vec{r}}-\Delta^*\frac{\partial\Delta}{\partial\vec{r}}\right)-\frac{4e^2}{m_p}|\Delta|^2\vec{A}\right][C_p+M_p+L_p|\Delta_1|^2]+$$

$$+\frac{ie}{m_p}\left(\Delta_1\frac{\partial\Delta_1^*}{\partial\vec{r}}-\Delta_1^*\frac{\partial\Delta_1}{\partial\vec{r}}\right)|\Delta|^2N_p, \tag{6}$$

$$M_p=\frac{2}{3}g_3^2T^3\sum_{\omega,\omega_1,\omega_2}\int d\vec{l}d\vec{m}d\vec{s}d\vec{r}_1\{(\vec{s}\vec{K}_1+\vec{r}_1\vec{K}_2)D_{\omega_2}(\vec{r}_1-\vec{l})D_{\omega-\omega_1+\omega_2}(\vec{l}-\vec{r}_1)+$$

$$+[\vec{s}\vec{K}_3+(\vec{s}-\vec{m})\vec{K}_4+\vec{r}_1\vec{K}_5]D_{\omega_2}(\vec{l}-\vec{r}_1)D_{\omega_1+\omega_2-\omega}(\vec{r}_1-\vec{l})\}, \tag{7}$$

$$L_p=-\frac{2}{3}g_3^4T^5\sum_{\omega,\omega_1,\omega_2}\int d\vec{l}d\vec{m}\,d\vec{s}d\vec{r}_1d\vec{p}d\vec{q}\,\{[\vec{s}\vec{K}_1+\vec{r}_1\vec{K}_2]Q_1+$$

$$+[\vec{s}\vec{K}_3+(\vec{s}-\vec{m})\vec{K}_4+\vec{r}_1\vec{K}_5]Q_2\}, \tag{8}$$

$$N_p=-\frac{1}{3}g_3^2T^3\sum_{\omega,\omega_1,\omega_2}\int d\vec{l}\,d\vec{m}d\vec{s}\,d\vec{r}_1d\vec{p}d\vec{q}\,(\vec{p}-\vec{q})\{[\vec{K}_1+\vec{K}_2]Q_1+$$

$$+[\vec{K}_3+\vec{K}_5+2G_{-\omega}(\vec{s}-\vec{m})\,G_\omega(\vec{s}-\vec{l})\,G_{\omega_1}(\vec{l}-\vec{r}_1)(G_\omega(\vec{r}-\vec{m})\,\nabla G_\omega(\vec{r}_1-\vec{r})-$$

$$-G_\omega(\vec{r}_1-\vec{r})\nabla G_\omega(\vec{r}-\vec{m}))]Q_2\}. \tag{9}$$

Таким образом, учет взаимодействия приводит к появлению тока «увлечения» и изменению эффективной массы протона.

Здесь коэффициенты $\vec{K}_1$, $\vec{K}_2$, $\vec{K}_3$, $\vec{K}_4$, $\vec{K}_5$, Q_1 и Q_2 выражаются следующим образом через гриновские функции свободных протонов и свободных нейтронов $G_\omega(\vec{r}-\vec{l})$ и $D_\omega(\vec{r}-\vec{l})$:

$$\vec{K}_1=G_{-\omega}(\vec{l}-\vec{m})\,G_{-\omega_1}(\vec{r}_1-\vec{l})G_{-\omega}(\vec{s}-\vec{r}_1)[G_\omega(\vec{r}-\vec{m})\nabla G_\omega(\vec{s}-\vec{r})-$$

$$-G_\omega(\vec{s}-\vec{r})\nabla G_\omega(\vec{r}-\vec{m})],$$

$$\vec{K}_2=G_{-\omega}(\vec{l}-\vec{m})G_{-\omega_1}(\vec{s}-\vec{l})G_{\omega_1}(\vec{s}-\vec{r}_1)[G_\omega(\vec{r}-\vec{m})\nabla G_\omega(\vec{r}_1-\vec{r})-$$

$$-G_\omega(\vec{r}_1-\vec{r})\nabla G_\omega(\vec{r}-\vec{m})],$$

$$\vec{K}_3=G_{-\omega}(\vec{s}-\vec{r}_1)G_{\omega_1}(\vec{l}-\vec{m})G_{-\omega_1}(\vec{r}_1-\vec{m})[G_\omega(\vec{r}-\vec{l})\nabla G_\omega(\vec{s}-\vec{r})-$$

$$-G_\omega(\vec{s}-\vec{r})\nabla G_\omega(\vec{r}-\vec{l})],$$

$$K_4=G_\omega(\vec{r}_1-\vec{m})\,G_{-\omega}(\vec{s}-\vec{m})G_{\omega_1}(\vec{l}-\vec{r}_1)[G_\omega(\vec{r}-\vec{l})\nabla G_\omega(\vec{s}-\vec{r})-$$

$$-G_\omega(\vec{s}-\vec{r})\nabla G_\omega(\vec{r}-\vec{l})],$$

$$K_5=G_{\omega_1}(\vec{l}-\vec{m})G_{-\omega_1}(\vec{s}-\vec{m})G_{\omega_1}(\vec{s}-\vec{r}_1)[G_\omega(\vec{r}-\vec{l})\nabla G_\omega(\vec{r}_1-\vec{r})-$$

$$-G_\omega(\vec{r}_1-\vec{r})\nabla G_\omega(\vec{r}-\vec{l})],$$

$$Q_1=D_{\omega_2}(\vec{r}_1-\vec{l})D_{\omega-\omega_1+\omega_2}(\vec{l}-\vec{q})D_{-\omega+\omega_1-\omega_2}(\vec{p}-\vec{q})D_{\omega-\omega_1+\omega_2}(\vec{p}-\vec{r}_1)+$$

$$+D_{\omega-\omega_1+\omega_2}(\vec{l}-\vec{r}_1)D_{\omega_2}(\vec{r}_1-\vec{q})\,D_{-\omega_2}(\vec{p}-\vec{q})D_{\omega_2}(\vec{p}-\vec{l})+$$

$$+D_{\omega_2}(\vec{r}_1-\vec{q})D_{-\omega_2}(\vec{l}-\vec{q})D_{-\omega+\omega_1-\omega_2}(\vec{p}-\vec{l})D_{\omega-\omega_1+\omega_2}(\vec{p}-\vec{r}_1), \tag{10}$$

$$Q_2=D_{\omega_2}(\vec{l}-\vec{r}_1)D_{\omega_1+\omega_2-\omega}(\vec{r}_1-\vec{q})D_{-\omega_1-\omega_2+\omega}(\vec{p}-\vec{q})D_{\omega_1+\omega_2-\omega}(\vec{p}-\vec{l})+$$

$$+D_{\omega_1+\omega_2-\omega}(\vec{r}_1-\vec{l})\,D_{\omega_2}(\vec{l}-\vec{q})D_{-\omega_2}(\vec{p}-\vec{q})D_{\omega_2}(\vec{p}-\vec{r}_1)+$$

$$+D_{-\omega_2}(\vec{p}-\vec{l})D_{\omega_2}(\vec{p}-\vec{r}_1)D_{\omega-\omega_1-\omega_2}(\vec{l}-\vec{q})D_{-\omega+\omega_1+\omega_2}(\vec{r}_1-\vec{q}).$$

Коэффициент C_p, впервые полученный в работе [4], имеет следующий вид:

$$C_p=\frac{1}{3}T\sum_{\omega}\int([G_\omega(\vec{m}-\vec{r})\nabla G_\omega(\vec{r}-\vec{l})-G_\omega(\vec{r}-\vec{l})\times$$

$$\times\nabla G_\omega(\vec{m}-\vec{r})]\vec{m})G_{-\omega}(\vec{m}-\vec{l})d\vec{m}d\vec{l}.$$

Если пренебречь взаимодействием между протонами и нейтронами (то есть положить постоянную g_3 равной нулю), то коэффициенты M_p, L_p, N_p обратятся в нуль, и мы получим выражение для тока Гинзбурга-Ландау [4].

Вычисление коэффициентов

Вычисление коэффициентов удобно производить в компонентах Фурье. После соответствующего преобразования получаем

$$M_p=\frac{2}{3}g_3^2T^3\sum_{\omega,\omega_1,\omega_2}\int\frac{d\vec{p}_1d\vec{p}_2d\vec{p}_3d\vec{p}_4}{(2\pi)^9}\delta(\vec{p}_1+\vec{p}_3-\vec{p}_2-\vec{p}_4)\{G_\omega^2(p_1)G_{-\omega_1}(p_2)\times$$

$$\times[G_{-\omega}^2(p_1)D_{\omega-\omega_1+\omega_2}(p_4)+G_{-\omega}(p_1)G_{\omega_1}(p_2)D_{\omega-\omega_1+\omega_2}(p_4)+$$

$$+G_{-\omega}(p_1)G_{\omega_1}(p_2)D_{\omega_1+\omega_2-\omega}(p_4)+$$

$$+G_{\omega_1}^2(p_1)D_{\omega_1+\omega_2-\omega}(p_4)]\,D_{\omega_2}(p_3)\left(3+\frac{2p_1^2}{m_p}G_\omega(p_1)\right)-$$

$$-\frac{2p_1^2}{m_p}G_\omega^3(p_1)G_{-\omega}^2(p_1)G_{\omega_1}(p_2)D_{\omega_2}(p_3)D_{\omega_1+\omega_2-\omega}(p_4)\},\qquad(11)$$

$$L_p=-\frac{2}{3}g_3^2T^3\sum_{\omega,\omega_1,\omega_2}\int\frac{d\vec{p}_1d\vec{p}_2d\vec{p}_3d\vec{p}_4}{(2\pi)^9}\delta(\vec{p}_1+\vec{p}_3-\vec{p}_2-\vec{p}_4)\{G_\omega^2(p_1)G_{-\omega_1}(p_2)\times$$

$$\times[(G_{-\omega}^2(p_1)+G_{-\omega}(p_1)G_{\omega_1}(p_2))(D_{\omega-\omega_1+\omega_2}(p_4)D_{-\omega+\omega_1-\omega_2}(p_4)+$$

$$+D_{-\omega_2}(p_3)D_{-\omega+\omega_1-\omega_2}(p_4)+D_{-\omega_2}(p_3)D_{\omega_2}(p_3))D_{\omega-\omega_1+\omega_2}(p_4)+$$

$$+(G_{-\omega}(p_1)G_{\omega_1}(p_2)+G_{\omega_1}^2(p_2))(D_{-\omega_2}(p_3)D_{\omega_2}(p_3)+D_{-\omega_2}(p_3)D_{-\omega_1-\omega_2+\omega}(p_4)+$$

$$+D_{\omega_1+\omega_2-\omega}(p_4)D_{-\omega_1-\omega_2+\omega}(p_4))D_{\omega_1+\omega_2-\omega}(p_4)]\left(3+\frac{2p_1^2}{m_p}G_\omega(p_1)\right)-$$

$$-\frac{2p_1^2}{m_p}G_\omega^3(p_1)G_{-\omega}^2(p_1)G_{\omega_1}(p_2)D_{\omega_1+\omega_2-\omega}(p_4)(D_{-\omega_2}(p_3)D_{\omega_2}(p_3)+$$

$$+D_{-\omega_2}(p_3)D_{-\omega_1-\omega_2+\omega}(p_4)+D_{\omega_1+\omega_2-\omega}(p_4)D_{-\omega_1-\omega_2+\omega}(p_4)\}D_{\omega_2}(p_3),\qquad(12)$$

$$N_p=-\frac{1}{3}g_3^2T^3\sum_{\omega,\omega_1,\omega_2}\int\frac{d\vec{p}_1d\vec{p}_2d\vec{p}_3d\vec{p}_4}{(2\pi)^9}\delta(\vec{p}_1+\vec{p}_3-\vec{p}_2-\vec{p}_4)\{G_\omega^2(p_1)G_{-\omega_1}(p_2)\times$$

$$\times\Big[\big(G^2_{\omega_1}(p_2)+G_{-\omega}(p_1)G_{\omega_1}(p_2)\big)\Big(D^2_{\omega-\omega_1-\omega_2}(p_4)\big(D_{\omega_1+\omega_2-\omega}(p_4)+$$

$$+D_{-\omega_2}(p_3)\big)\frac{2\vec{p}_1\vec{p}_4}{m_n}+D^2_{-\omega_2}(p_3)\big(D_{\omega_2}(p_3)+D_{\omega-\omega_1-\omega_2}(p_4)\big)\frac{2\vec{p}_1\vec{p}_3}{m_n}\Big)\times$$

$$\times D_{\omega_1+\omega_2-\omega}(p_4)-\big(G_{-\omega}(p_1)G_{\omega_1}(p_2)+G^2_{-\omega}(p_1)\big)\Big(D_{-\omega+\omega_1-\omega_2}(p_4)\times$$

$$\times\big(D_{\omega-\omega_1+\omega_2}(p_4)+D_{-\omega_2}(p_3)\big)\frac{2\vec{p}_1\vec{p}_4}{m_n}+D^2_{-\omega_2}(p_3)\big(D_{-\omega+\omega_1-\omega_2}(p_4)+$$

$$+D_{\omega_2}(p_3)\big)\frac{2\vec{p}_1\vec{p}_3}{m_n}\Big)D_{\omega-\omega_1+\omega_2}(p_4)\Big]+2G^3_{\omega}(p_1)G_{-\omega}(p_1)G_{\omega_1}(p_2)D_{\omega_1+\omega_2-\omega}(p_4)\times$$

$$\times\Big[\frac{2\vec{p}_1\vec{p}_3}{m_n}D^2_{-\omega_2}(p_3)\big(D_{\omega-\omega_1-\omega_2}(p_4)+D_{\omega_2}(p_3)\big)+$$

$$+\frac{2\vec{p}_1\vec{p}_4}{m_n}D^2_{\omega-\omega_1-\omega_2}(p_4)\big(D_{\omega_1+\omega_2-\omega}(p_4)+D_{-\omega_2}(p_3)\big)\Big]\Big\}D_{\omega_2}(p_3).$$

Здесь $G_\omega(p)$ и $D_\omega(p)$ — компоненты Фурье температурных гриновских функций протонов и нейтронов, равные [3]

$$G_\omega(p)=\frac{1}{i\omega-\xi_p},\quad D_\omega(p)=\frac{1}{i\omega-\xi_n},\tag{13}$$

где ξ_p и ξ_n — кинетические энергии протонов и нейтронов, отсчитываемые от поверхности Ферми. Для вычисления коэффициентов (12) заменим δ-функцию ее интегральным представлением

$$\delta(\Sigma\vec{p})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\Sigma\vec{p}\vec{r}}\,d\vec{r}.\tag{14}$$

Имея в виду малость интервала изменения импульса p по сравнению с p_F, заменим в интеграле (14) p_1 и p_2 на p_{Fp}, а p_3 и p_4 на p_{Fn}, после чего во всех коэффициентах произойдет разделение переменных. Интегралы по координате и угловые части интегралов по импульсам вычисляются элементарно. Ту же замену p на p_F производим во всех выражениях типа $\vec{p}_i\vec{p}_k$. Интегрирование по импульсам сводится к интегрированию по ξ, причем члены, содержащие нечетное число функций Грина, равны нулю.

Тройные суммы по n, n_1 и n_2 преобразуем в суммы по n, k и n_2 $(k=n-n_1)$. Сначала суммируем по n_2 и интегрируем по ξ_3 и ξ_4, далее суммируем по n и интегрируем по ξ_1 и ξ_2. При суммировании по n и n_2 была использована следующая формула [5]:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(n-a)^s(n-b)^p}=-\pi\sum_{z=a,b}\operatorname{Res}\frac{\operatorname{ctg}\pi z}{(z-a)^s(z-b)^p},\tag{15}$$

где a и b — произвольные, отличные от целого комплексные числа, s и p — целые числа, $s \geqslant 0$, $p \geqslant 0$. После выполнения всех этих действий получаем для коэффициентов следующие выражения:

$$L_p = \frac{g_3^2 m_p m_n^2 p_{F_p}^3}{384\pi^8 \hbar^9 (k_B T)^3} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{16}{(2l+1)(2l+2k+1)} - \frac{8}{(2l+2k+1)^2} \right] \times$$

$$\times \left\{ -\frac{\pi^2}{2k^2} + \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{24}{(2l+2k+1)^4} - \frac{16}{(2l+1)(2l+2k+1)^3} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{16}{(2l+1)^3 (2l+2k+1)} \right] \right\},$$

$$N_p = \frac{g_3^2 m_p^2 m_n p_{F_p}^3}{2304\pi^6 \hbar^9 (k_B T)^3} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\pi}{k} + 3{,}41 \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon_p}{\pi k\, k_B T} - \right. \tag{16}$$

$$- \frac{16}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(2l+2k+1)^3} - \frac{1}{(2l+1)(2l+2k+1)^2} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{(2l+1)^2 (2l+2k+1)} \right] \right\} \times$$

$$\times \left\{ \frac{\pi}{k} + 3{,}41 \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon_n}{\pi k\, k_B T} - \frac{16}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(2l+1)^2 (2l+2k+1)} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{(2l+1)(2l+2k+1)^2} + \frac{1}{(2l+2k+1)^3} \right] \right\},$$

$$M_p = 0,$$

где ε_p и ε_n — энергетические ширины эффективной области взаимодействия для протонов и нейтронов, равные [6] соответственно $\varepsilon_p = \hbar p_{F_p} / m_p f_p$ и $\varepsilon_n = \hbar p_{F_n} / m_n f_n$, f_n — длина рассеяния нейтронов, равная $f_n = 6 \cdot 10^{-1}$ см, f_p — длина рассеяния протонов $f_p = 4 \cdot 10^{-13}$см. Здесь $\varepsilon_p = 6$ **Мэв** для плотности протонов $n_p = 8{,}2 \cdot 10^{36}$ **см**$^{-3}$ и $\varepsilon_n = 0{,}935$ **Мэв** для плотности нейтронов в «пре»-фазе [7] $n_n = 10^{38}$ **см**$^{-3}$, k_B — постоянная Больцмана, $\hbar$ — постоянная Планка.

Суммы по k и l быстро сходятся, поэтому можно ограничиться несколькими первыми членами. После подстановки постоянных получаем

$$L_p = \frac{0{,}256 g_3^2 m_p m_n^2 p_{F_p}^3}{\pi^8 \hbar^9 (k_B T)^3} = 3{,}26 \cdot 10^2 \frac{n_p}{(k_B T)^3} \text{эрг}^{-4} \cdot \textbf{см}^{-3}. \tag{17}$$

$$N_p = \frac{0{,}1 g_3^2 m_p^2 m_n p_{F_p}^3}{p^6 \hbar^9 (k_B T)^3} = 1{,}62 \cdot 10^3 \frac{n_p}{(k_B T)^3} \text{эрг}^{-4} \cdot \textbf{см}^{-3}.$$

Значение коэффициента C_p приводится в [4]:

$$C_p = \frac{7\zeta(3) n_n}{16\pi^2 (k_B T)^2} \text{эрг}^{-2} \textbf{см}^{-3}. \tag{18}$$

где ζ (3) представляет собой ζ-функцию Римана.

Используя определение (30) и введя потенциальные сверхтекучие скорости протонов и нейтронов обычным образом

$$\vec{v}_{ps}=\frac{\hbar}{2m_p}\nabla\varphi,\qquad \vec{v}_{ns}=\frac{\hbar}{2m_n}\nabla\varphi_1, \tag{19}$$

получим для протонного тока следующее выражение

$$\vec{j}_p=\frac{em_pn_{ps}}{m_{1p}}\vec{v}_{ps}-\frac{e^2n_{ps}}{cm_{1p}}\vec{A}+\frac{eN_pm_nn_{ns}n_{ps}}{4C_pC_nm_p}\vec{v}_{ns}, \tag{20}$$

где

$$m_{1p}=\frac{m}{1+\frac{L_p\psi_{10}^2}{2C_pC_n}}.$$

Ток «увлечения» (последнее слагаемое формулы (20)) пропорционален сверхтекучей скорости нейтронов, а коэффициент перед скоростью дает плотность заряда протонов, движущихся со скоростью v_{ns}. Плотность протонов, движущихся со скоростью $\vec{v}_{ps}$, уменьшается по сравнению с плотностью невзаимодействующих протонов N_{ps} на величину плотности «увлечения», то есть

$$\frac{m_pn_{ps}}{m_{1p}}=N_{ps}-\frac{N_pm_nn_{ns}n_{ps}}{4C_pC_nm_p}. \tag{21}$$

Используя функцию Грина нейтронов $D_\omega(\vec{r},\vec{r}')$, можно аналогичным образом получить поток массы нейтронов:

$$\vec{j}_n=\frac{m_n^2n_{ns}}{m_{1n}}\vec{v}_{ns}+\frac{N_pm_nn_{ps}n_{ns}}{4C_pC_n}\left(\vec{v}_{ps}-\frac{e}{m_pc}\vec{A}\right), \tag{22}$$

где

$$m_{1n}=\frac{m_n}{1+\frac{L_n\psi_0^2}{2C_pC_n}},\qquad L_n=\frac{0{,}256g_3^2m_p^2m_np_{Fn}^3n_p^{1/3}}{\pi^8\hbar^9(k_BT)^3n_n^{1/3}}. \tag{23}$$

Сравнивая (22) с (20), легко заметить, что плотность «увлечения» нейтронов равна плотности «увлечения» протонов. Это равенство вытекает также из общих термодинамических соображений, приведенных в работе [12]. Используя те же соображения, что и при выводе формулы (21), получаем

$$n_{ns}=\frac{N_{ns}}{\frac{m_n}{m_{1n}}+\frac{N_pn_{os}}{4C_pC_n}}. \tag{24}$$

Исходя из выражения (20) и определения «щелей», находим следующее представление для свободной энергии (с точностью до членов $\vec{A}_1^2$):

$$F=F_n+\int\Big\{\alpha_p|\psi|^2+\alpha_p'|\psi|^2|\psi_1|^2+\frac{1}{2}(\beta_p+\beta_p'|\psi_1|^2)|\psi|^4+\alpha_n|\psi_1|^2+\frac{1}{2}(\beta_n+$$

$$+\beta_n'|\psi|^2)|\psi_1|^4+\frac{1}{4m_{1p}}\left|\left[-i\hbar\nabla-\frac{2e}{c}(\vec{A}+\vec{A}_1)\right]\psi\right|^2+\frac{1}{4m_{1n}}|(-i\hbar\nabla)\psi_1|^2+$$

$$+\frac{H^2}{8\pi}\Big\}dv, \qquad (25)$$

где F_n — энергия нормального состояния, $\vec{A}_1$ — эффективное магнитное поле, обусловленное взаимодействием нейтронов с протонами:

$$\vec{A}_1=-\frac{i\hbar m_{1p}cN_p}{8m_p eC_pC_n}(\psi_1\nabla\psi_1^*-\psi_1^*\nabla\psi_1). \qquad (26)$$

Варьируя свободную энергию (25) по ψ^* и ψ_1^*, получаем уравнения Гинзбурга-Ландау для волновых функций протонов и нейтронов:

$$\frac{1}{4m_{1p}}\left\{-i\hbar\nabla-\frac{2e}{c}(\vec{A}+\vec{A}_1)\right\}^2\psi+(\alpha_p+\alpha_p'|\psi_1|^2)\psi+(\beta_p+\beta_p'|\psi_1|^2)|\psi|^2\psi=0, \qquad (27)$$

$$\frac{1}{4m_{1n}}\{-i\hbar\nabla+\vec{A}_p\}^2\psi_1+(\alpha_n+\alpha_p'|\psi|^2)\psi_1+(\beta_n+\beta_n'|\psi|^2)|\psi_1|^2\psi_1=0,$$

$$\vec{n}\left\{-i\hbar\nabla-\frac{2e}{c}(\vec{A}+\vec{A}_1)\right\}\psi|_\Sigma=0,$$

где

$$\vec{A}_p=\frac{i\hbar m_{1n}N_p}{4m_pC_pC_n}\left(\psi\nabla\psi^*-\psi^*\nabla\psi+\frac{4ie\vec{A}}{\hbar c}|\psi|^2\right).$$

Здесь $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности Σ. Значения коэффициентов α_p, β_p, α_n, β_n приведены в [4]. Используя формулы (21), (24), (27), находим следующие выражения коэффициентов α_p', β_p', β_n':

$$\alpha_p'=-\frac{0{,}3g_3^2m_p^2m_n^2(kT)^3}{\hbar^8n_nn_p^{2/3}}, \qquad (28)$$

$$\beta_p'=\beta_p\left[\frac{5L_p}{2C_pC_n}+\frac{\alpha_p'}{\alpha_p}\right], \qquad \beta_n'=\beta_n\left[\frac{L_n+N_p}{2C_pC_n}+\frac{\alpha_p'}{\alpha_n}\right].$$

Уравнение для магнитного поля

Действуя оператором вихря на обе части уравнения Максвелла

$$\mathrm{rot}\vec{H}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}_p,$$

получим уравнение для магнитного поля внутри звезды:

$$\vec{H} + \lambda^2 \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = \Phi_0 \vec{e}\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_p) + \Phi_1 \vec{e}\, \delta(\vec{r} - \vec{r}_n), \tag{29}$$

где

$$\Phi_0 = \frac{\pi\hbar c}{e}, \quad \Phi_1 = \frac{\Phi_0 N \psi_{10}^2}{2C_n C_p\left(1 + \frac{L\psi_{10}^2}{2C_n C_p}\right)},$$

$$\lambda^2 = \frac{\lambda_0^2}{1 + \frac{L\psi_{10}^2}{2C_n C_p}}, \quad \lambda_0^2 = \frac{m_p c^2}{8\pi e^2 \psi_0^2}.$$

Здесь Φ_0 и Φ_1 — потоки магнитных полей, создаваемые вихревыми нитями протонов и нейтронов соответственно, λ — глубина проникновения магнитного поля, λ_0 — лондоновская глубина проникновения, $\vec{e}$ — единичный вектор, направленный вдоль нити. При получении уравнения (29) мы ввели волновые функции протонов и нейтронов следующим образом

$$\psi = \sqrt{2C_p}\,\Delta = \psi_0 e^{i\varphi} = \sqrt{\frac{n_{0s} e^{i\varphi}}{2}}, \qquad \psi_1 = \sqrt{2C_n}\,\Delta_1 = \psi_{10} e^{i\varphi_1} = \sqrt{\frac{n_{ns}}{2}} e^{i\varphi_1}, \tag{30}$$

где ψ_0, ψ_{10}, φ и φ_1 — соответственно модули и фазы волновых функций протонов и нейтронов.

Первое слагаемое в правой части уравнения (29) приведет к появлению в точке $\vec{r}_p$ протонной вихревой нити с потоком Φ_0. Для ее возникновения потребуется внешнее магнитное поле, равное [8]

$$H_{c1} = \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2} \ln\frac{\lambda}{\xi}.$$

Оценки для «пре»-фазы нейтронных звезд дают $\lambda = 1{,}55 \cdot 10^{-11}$ см, $\xi = 3{,}8 \cdot 10^{-12}$ см и, следовательно, $H_{c1} = 9 \cdot 10^{13}$ гс. Такие вихревые нити появились бы, если бы во время эволюции нейтронных звезд переход протонов в сверхтекучее состояние сопровождался существованием мощных источников, генерирующих поля порядка $10^{13} \div 10^{14}$ гс. Интересно отметить, что после появления такой вихревой сети магнитное поле будет стационарным, благодаря сверхтекучим протонным токам.

Второе слагаемое правой части уравнения (29) приводит к появлению магнитного поля, пронизывающего нейтронные вихревые нити в точках $\vec{r}_n$. Поток магнитного поля нейтронного вихря равняется Φ_1, и он появляется, благодаря «увлечению» протонов нейтронами. Изменение эффективной массы протонов приводит к незначительному изменению глубины проникновения λ.

Поскольку нейтронные звезды, точнее пульсары вращаются, то необходимо учесть влияние вращения на поведение нейтронно-протонной сверхтекучей жидкости. Учет вращения в уравнениях для протонных функций Грина и в других формулах теории сверхпроводимости сводится к замене векторного потенциала $\vec{A}$ на величину $\vec{A}'$, равную [9, 10].

$$\vec{A}'=\vec{A}+\frac{m_p c}{e}\vec{U}. \quad (31)$$

Здесь $\vec{U}=[\vec{\Omega}\vec{r}]$, $\vec{\Omega}$ — угловая скорость вращения, m_p — масса свободного протона. Для плотности тока во вращающейся системе координат имеем следующее выражение [9]:

$$\vec{j}=2\left[\frac{ie}{2m_p^*}(\nabla_{\vec{r}'}-\nabla_{\vec{r}})G(x,\ x')-\frac{e^2}{m_p^*}\vec{A}'G(x,x')\right]_{\vec{r}'\to\vec{r},\ \tau'\to\tau+0}. \quad (32)$$

Здесь $m_p^*=2m_p$ — масса протонной пары. Учет вращения приводит к изменению фазы функций Грина нейтронов

$$\tilde{D}_\omega(\vec{r},\vec{r}')=e^{im_n\vec{U}(\vec{r}-\vec{r}')}D_\omega(\vec{r}-\vec{r}'), \quad (33)$$

где $D_\omega(\vec{r}-\vec{r}')$ — функция Грина свободных нейтронов. Используя (31) — (33), получаем уравнение Лондонов во вращающейся системе координат:

$$\vec{H}'+\lambda_1^2\mathrm{rot\,rot}\vec{H}'=\Phi_0\vec{e}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_p)+\Phi_1\vec{e}\,\delta(\vec{r}-\vec{r}_n), \quad (34)$$

где

$$\vec{H}'=\mathrm{rot}\vec{A}+\frac{2m_pc}{e}\vec{\Omega},\ \lambda_1=\sqrt{2}\lambda.$$

Уравнение (34) можно интерпретировать как уравнение для неподвижного сверхпроводника [10], находящегося во внешнем однородном магнитном поле

$$\vec{H}_0'=\frac{2m_0c}{e}\vec{\Omega}.$$

Это заключение представляет собой обобщение теоремы Лармора на случай двухкомпонентной сверхтекучей ферми-жидкости. Легко заметить, что это поле довольно слабое и порядка $2.10^{-4}\Omega$ гс. Даже при $\Omega=200$ сек$^{-1}$ оно порядка 4.10^{-2} гс. Это поле на много порядков меньше критического поля и, следовательно, не может создать протонные вихревые нити.

В заключение приведем некоторые оценки магнитного поля для модели вращающейся нейтронной звезды с плотностью нейтронов $n_n=10^{38}$ см$^{-3}$, плотностью протонов $n_p=8\cdot10^{36}$ см$^{-3}$ и с угловой скоростью вращения $\Omega=200$ сек$^{-1}$. Так как плотность нейтронов на два порядка выше плотности протонов, то последние не повлияют на образование нейтронных вихрей. Их плотность можно оценить по формуле [11]

$$n=\frac{2\Omega}{\varkappa}=2\cdot10^5\ \text{см}^{-2},$$

где $\varkappa=\pi\hbar/m_p$. Учитывая, что через каждый нейтронный вихрь проходит поток Φ_1, то среднее магнитное поле $H_0=n\Phi_1$, где $\Phi_1=0{,}03\times$

$\times 10^{-7}$ **гс·см^2** при $T=10^8$ °K, $\Delta_1=0{,}1$ **Мэв** и $\Phi_1=3\cdot 10^{-7}$ **гс·см^2** при $T=10^8$ °K, $\Delta_1=1$ **Мэв**. Среднее магнитное поле в первом случае порядка 10^{-3} **гс**, а во втором случае порядка 10^{-1} **гс**. Это поле довольно маленькое, но что замечательно ,оно сильно неоднородно. Действительно, в центре вихря на площади порядка 10^{-21} **см^2** поле достигает довольно больших значений, оцениваемых формулой

$$H=\frac{\Phi_1}{2\pi\lambda^2}\ln\frac{\lambda}{\xi}.$$

Для случая $\Delta_1=1$ **Мэв**, $H=2{,}7\cdot 10^{14}$ **гс**, а для $\Delta_1=0{,}1$ **Мэв** поле порядка $2{,}7\cdot 10^{12}$ **гс**. При удалении от центра вихря оно экспоненциально спадает до нуля.

Таким образом, вращение нейтронной звезды приводит к появлению довольно плотной сети нейтронных вихревых нитей, центры которых пронизывают магнитный поток с напряженностью поля в центре $10^{12}\div 10^{14}$ **гс**.

В заключение благодарим проф. Г. С. Саакяна и участников семинара кафедры теоретической физики ЕГУ за полезные обсуждения.

Кафедра общей физики,
Кафедра теоретической физики *Поступила 25.06.1979*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Седракян Д. М., Шахабасян К. М., Варданян Г. А.**, Уч. записки ЕГУ, № 2, 1979.
2. **Горьков Л. П.**, ЖЭТФ, **34**, 735, 1958.
3. **Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е.**, Методы квантовой теории поля в статистической физике, Физматгиз, М., 1962.
4. **Горьков Л. П.**, ЖЭТФ, **36**, 1918, 1959.
5. **Корн Г., Корн Т.**, Справочник по математике для научных работников и инженеров, изд-во «Наука», М., 1977.
6. **Брук Ю. М.**, Астрофизика, **9**, 237, 1973.
7. **Саакян Г. С.**, Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс, изд-во «Наука», М., 1972.
8. **Абрикосов А. А.**, ЖЭТФ, **32**, 1442, 1957.
9. **Веркин Б. И., Кулик И. О.**, ЖЭТФ, **61**, 2067, 1971.
10. **Седракян Д. М., Мкртчян Г. С., Шахабасян К. М.**, Изв. АН Арм. ССР, Физика, **11**, 385, 1976.
11. **Халатников И. М.**, Теория сверхтекучести, изд-во «Наука», М., 1971.
12. **Андреев А. Ф., Башкин Е. П.**, ЖЭТФ, **69**, 317, 1975.

Դ. Մ. ՍԵԴՐԱԿՅԱՆ, Կ. Մ. ՇԱՀԱԲԱՍՅԱՆ

ԵՐԿԿՈՄՊՈՆԵՆՏ ՖԵՐՄԻ-ՀԵՂՈՒԿԻ ԳԻՆԶԲՈՒՐԳ-ԼԱՆԴԱՈՒԻ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԸ

2. Գերհաղորդիչ պրոտոնային հոսանքի հավասարումը

Ամփոփում

Գրինի ֆունկցիաների միջոցով ստացված է գերհաղորդիչ պրոտոնների հոսանքի արտահայտությունը և լոնդոնների հավասարումը մագնիսական դաշտի համար աստղի ներսում։ Ցույց է տրված, որ պտույտի պատճառով կըստեղծվեն նեյտրոնային մրրկային թելեր, որոնք կբերեն պրոտոնային մրրկային թելերի առաջացման նույն կետերում։ Դաշտը թելերի կենտրոններում հավասար է 10^{12}—10^{14} **գս** *և արագ ընկնում է 10^{-11}* **սմ** *հեռավորության վրա։ Պտույտը ստեղծում է նաև թույլ համասեռ հաստատուն մագնիսական դաշտ։*