Ծ Ր Ա Գ Ր Ա Վ Ո Ր Մ Ա Ն Ֆ Ո Ւ Ն Կ Ց Ի Ո Ն Ա Լ Հ Ա Մ Ա Կ Ա Ր Գ Ե Ր

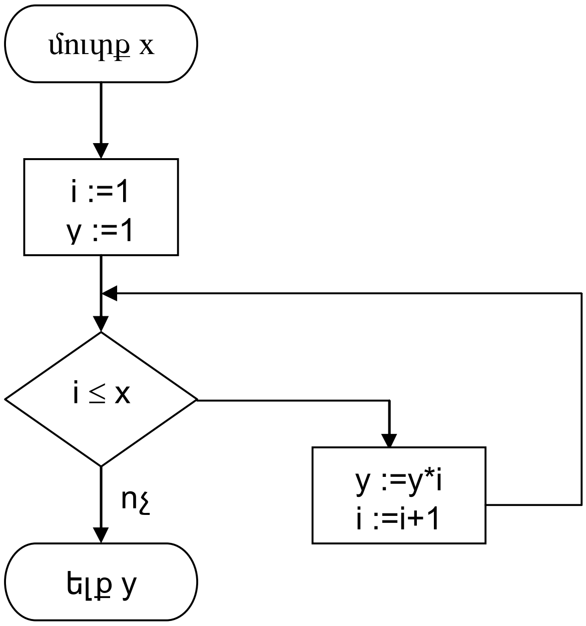
(ուսումնամեթոդական ձեռնարկ)

ԵՊՀ Ինֆորմատիկայի և կիրառական մաթեմատիկայի ֆակուլտետ

Համակարգային ծրագրավորման ամբիոն

Ներածություն

Դիտարկենք x բնական թվի ֆակտորիալի ալգորիթմը:



Ներկայացված ալգորիթմը կարելի է դիտարկել որպես ծրագիր, գրված որևէ պրոցեդուրային լեզվով: Պրոցեդուրային ծրագրի սեմանտիկան (իմաստը) որոշվում է նրա իրականացման պրոցեսով: Այդ պրոցեսը նկարագրելու համար օգտագործվել է բնական թվի Ֆակտորիալը հաշվող ֆունկցիայի սահմանումը: Վերհիշենք այն:

$$\text{Factorial}(x)=\text{if } x=0 \text{ then } 1 \text{ else Factorial}(x-1) * x \qquad (1)$$

Հեշտ է տեսնել, որ այն իրենից ներկայացնում է հավասարում, որի անհայտ փոփոխականը Factorial-ն է: Այն, փաստորեն, հանդիսանում է ֆունկցիոնալ ծրագիր, իսկ նրա լուծումը (! ֆունկցիան) կլինի այդ ֆունկցիոնալ ծրագրի սեմանտիկան (իմաստը): Այսպիսով՝ գրել ծրագիր ֆունկցիոնալ լեզվով, նշանակում է նկարագրել ծրագրավորվող ֆունկցիայի սահմանումը հավասարումների համակարգերի միջոցով: Նշենք, որ ի տարբերություն պրոցեդուրային ծրագրերի, ֆունկցիոնալ ծրագրի սեմանտիկան կախված չէ հաշվարկման պրոցեսից:

Ֆունկցիոնալ ծրագրերի ներկայացման համար կօգտվենք Չարչի λ-նշանակումներից, իսկ դրանց իրականացման համար անհրաժեշտ են β-ռեդեքսի, δ-ռեդեքսի և β, δ-ռեդուկցիաների հասկացությունները: Օրինակների վրա փորձենք ցուցադրել դրանք, իսկ խիստ սահմանումները կտրվեն դասընթացի ընթացքում:

Դիցուք ունենք հետևյալ ֆունկցիան.

$$f(x,y)=+(x,*(2,y)),$$

որտեղ f-ը 2 տեղանի բնական արգումենտներից ֆունկցիա է: Կիրառելով f-ը արգումենտների կոնկրետ՝ 1 և 3, արժեքների վրա կստանանք *f* ֆունկցիայի արժեքը՝ f(1,3), որը հավասար է 7: Այդ արժեքը որոշվում է հավասարության աջ մասում գրված արտահայտությամբ: Ըստ Չարչի λ-նշանակումների նշված ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել առանց նշելու ֆունկցիայի f անունը հետևյալ կերպ.

$$\lambda xy[+(x,*(2,y))],$$

որտեղ λ տառից հետո թվարկվում են այն արգումենտների անունները, որոնցից կախված է ներկայացվող ֆունկցիան, իսկ քառակուսի փակագծերում գրված արտահայտության միջոցով որոշվում է ֆունկցիայի արժեքը:

Այս կերպ սահմանված ֆունկցիայի կիրառումը արգումենտների կոնկրետ՝ 1 և 3, արժեքների վրա գրվում է հետևյալ կերպ.

$$\lambda xy[+(x,*(2,y))](1,3)$$

Գրված արտահայտությունը կոչվում է β-ռեդեքս*: Այն արտահայտությունը, որը ստացվում է տրված β-ռեդեքսում քառակուսի փակագծերի ներսում λ տառից հետո գրված փոփոխականների բոլոր մուտքերը համապատասխան արգումենտի արժեքներով փոխարինելով, կոչվում է β-ռեդեքսի փաթեթ: Այն, տվյալ դեպքում, կունենա հետևյալ տեսքը.

$$+(1,*(2,3))$$

Կատարված քայլը կոչվում է միաքայլ β-ռեդուկցիա (նշ. $\xrightarrow[\beta]{}$):

Հաշվարկը շարունակելու համար կոնկրետ դեպքում մեզ անհրաժեշտ է *(2,3) ենթաարտահայտությունը փոխարինել 6-ով: *(2,3)-ը իրենից ներկայացնում է δ-ռեդեքս, իսկ 6-ը՝ նրա փաթեթը: Այս դեպքում կատարված քայլը կոչվում է միաքայլ δ-ռեդուկցիա (նշ. $\xrightarrow[\delta]{}$): Այն կատարելուց հետո կստանանք +(1,6) արտահայտությունը, որը նույնպես δ-ռեդեքս է, որի փաթեթը 7-ն է:

Այսպիսով դիտարկված ֆունկցիայի հաշվարկը կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ.

$$\lambda xy[+(x,*(2,y))](1,3) \xrightarrow[\beta]{} +(1,*(2,3)) \xrightarrow[\delta]{} +(1,6) \xrightarrow[\delta]{} 7:$$

Օգտվելով λ-նշանակումներից ներկայացնենք (1) ծրագիրը հետևյալ տեսքով.

---

* ռեդեքս (redex) բառն առաջացել է անգլերեն **red**ucible **ex**pression արտահայտությունից

Factorial=λx[if x=0 then 1 else Factorial(x-1)*x] (2)

Այժմ օգտվելով վերը նշված հասկացություններից, ցույց տանք, թե ինչպես կարելի է իրականացնել տրված ծրագիրը ասենք օրինակ x=2 արժեքի համար

Factorial(2)

λx[if x=0 then 1 else Factorial(x-1)*x](2) $\xrightarrow{\beta}$

if 2=0 then 1 else Factorial(2-1)*2 $\xrightarrow{\delta}$

if *false* then 1 else Factorial(2-1)*2 $\xrightarrow{\delta}$

if *false* then 1 else Factorial(1)*2 $\xrightarrow{\delta}$ Factorial(1)*2

λx[if x=0 then 1 else Factorial(x-1)*x](1)*2 $\xrightarrow{\beta}$

(if 1=0 then 1 else Factorial(1-1)*1)*2 $\xrightarrow{\delta}$

(if *false* then 1 else Factorial(1-1)*1)*2 $\xrightarrow{\delta}$

(if *false* then 1 else Factorial (0)*1)*2 $\xrightarrow{\delta}$ (Factorial (0)*1)*2

(λx[if x=0 then 1 else Factorial (x-1)*x](0)*1)*2 $\xrightarrow{\beta}$

(if 0=0 then 1 else Factorial (0-1))*1)*2 $\xrightarrow{\delta}$

(if *true* then 1 else Factorial (0-1))*1)*2 $\xrightarrow{\delta}$ (1*1)*2 $\xrightarrow{\delta}$ 1*2 $\xrightarrow{\delta}$ 2

Գրենք (1) և (2) ծրագրերը ծրագրավորման Lisp լեզվով:

```
(defun Factorial(x) (if (= x 0) 1 (* x (Factorial (- x 1)))))

(defun Factorial() #'(lambda (x) (if (= x 0) 1 (* x (funcall (Factorial) (- x 1))))))
```

ՄԱՍ 1. ՖՈՐՄԱԼԻԶԱՑԻԱ

1.1. Մասնակի կարգավորված բազմություններ

Դիցուք A-ն որևէ բազմություն է և $\sqsubseteq \subset A\times A$ բինար հարաբերություն է A բազմության վրա: Եթե $<a, b> \in \sqsubseteq$, ապա այդ փաստը կգրենք հետևյալ կերպ $a \sqsubseteq b$ և կասենք, որ a-ն փոքր է կամ հավասար b-ից:

Սահմանում. Կասենք, որ $\sqsubseteq$ բինար հարաբերությունը մասնակի կարգ է, եթե այն բավարարում է հետևյալ պայմաններին.

- ցանկացած $a \in A$ համար $a \sqsubseteq a$ (*ռեֆլեքսիվություն*)
- ցանկացած $a,b \in A$ համար, $a \sqsubseteq b$ և $b \sqsubseteq a \Rightarrow a = b$ (*անտիսիմետրիկություն*)
- ցանկացած $a, b, c \in A$ համար $a \sqsubseteq b$ և $b \sqsubseteq c \Rightarrow a \sqsubseteq c$ (*տրանզիտիվություն*):

Սահմանում. $(A, \sqsubseteq)$ զույգը (A բազմությունը՝ նրա վրա սահմանված $\sqsubseteq$ մասնակի կարգի հետ միասին) կանվանենք *մասնակի կարգավորված բազմություն* (մ.կ.բ.):

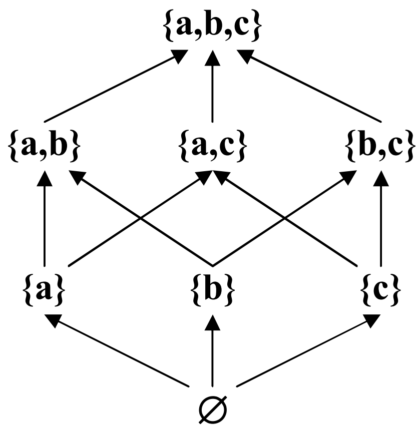
Դիցուք $(A, \sqsubseteq)$-ն մասնակի կարգավորված բազմություն է: Եթե $a \sqsubseteq b$ կամ $b \sqsubseteq a$, ապա կասենք, որ a և b էլեմենտները համեմատելի են, հակառակ դեպքում՝ համեմատելի չեն:

Նշենք, որ մասնակի կարգավորված բազմության ցանկացած ենթաբազմություն մասնակի կարգավորված բազմություն է:

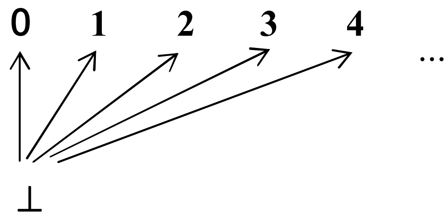
Օրինակ 1. Դիտարկենք N բազմությունը և նրա վրա սահմանված $\leq$ կարգը: $(N,\leq)$-ը մասնակի կարգավորված բազմություն է: Այն դիագրամի տեսքով կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ.

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathbf{1} \longrightarrow \mathbf{2} \longrightarrow \mathbf{3} \longrightarrow \mathbf{4} \longrightarrow \mathbf{\ldots}$$

Օրինակ 2. Դիտարկենք $2^{\{a,b,c\}}$, որը {a,b,c} բազմության բոլոր ենթաբազմությունների բազմությունն է, այսինքն՝ $2^{\{a,b,c\}} = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$: Որպես մասնակի կարգ վերցնենք $\subset$ (լինել ենթաբազմություն), հարաբերությունը: $(2^{\{a,b,c\}}, \subset)$-ը մասնակի կարգավորված բազմություն է: Այն դիագրամի տեսքով կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ.



Օրինակ 3. Դիտարկենք $N \cup \{\perp\}$ բազմությունը: Նրա վրա սահմանենք □ մասնակի կարգը հետևյալ կերպ. ցանկացած $m \in N \cup \{\perp\}$ համար $m \sqsubseteq m$ և $\perp \sqsubseteq m$: ($N \cup \{\perp\}$, □)-ը մասնակի կարգավորված բազմություն է: Այն դիագրամի տեսքով կարելի է ներկայացնել հետևյալ կերպ.



Սահմանում. Դիցուք $(A_1, \sqsubseteq_1)$, ..., $(A_n, \sqsubseteq_n)$ $(n \geq 1)$ մասնակի կարգավորված բազմություններ են: $A_1 \times ... \times A_n$ դեկարտյան արտադրյալի վրա $\sqsubseteq$ մասնակի կարգը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

եթե $\langle a_1,...,a_n\rangle$, $\langle b_1,...,b_n\rangle \in A_1 \times ... \times A_n$, ապա $\langle a_1,...,a_n\rangle \sqsubseteq \langle b_1,...,b_n\rangle$ այն դեպքում, երբ $a_i \sqsubseteq_i b_i$, i=1, ..., n:

Օրինակ 4. Դիտարկենք $(N, \leq)$ և $(N \cup \{\perp\}, \preccurlyeq)$ մասնակի կարգավորված բազմությունները: $(N \times N \cup \{\perp\}, \sqsubseteq)$ մասնակի կարգավորված բազմություն է:

$\langle 1, 2\rangle \not\sqsubseteq \langle 1, 3\rangle$, քանի որ $2 \not\preccurlyeq 3$

$\langle 1, 3\rangle \not\sqsubseteq \langle 1, 2\rangle$, քանի որ $3 \not\preccurlyeq 2$

$\langle 0, 2\rangle \sqsubseteq \langle 1, 2\rangle$, քանի որ $0 \leq 1$ և $2 \preccurlyeq 2$

$\langle 3, \perp\rangle \sqsubseteq \langle 7, 3\rangle$, քանի որ $3 \leq 7$ և $\perp \preccurlyeq 3$

Օրինակ 5. Դիտարկենք $(N, \leq)$ և $(2^{\{a,b,c\}}, \subset)$ մասնակի կարգավորված բազմությունները: $(N \times 2^{\{a,b,c\}}, \sqsubseteq)$ մասնակի կարգավորված բազմություն է:

$\langle 1, \{a\}\rangle \not\sqsubseteq \langle 1, \{b,c\}\rangle$, քանի որ $\{a\} \not\subset \{b,c\}$

$\langle 3, \{b,c\}\rangle \not\sqsubseteq \langle 1, \{a\}\rangle$, քանի որ $\{b,c\} \not\subset \{a\}$

$\langle 2, \{a\}\rangle \sqsubseteq \langle 5, \{a,c\}\rangle$, քանի որ $2 \le 5$ և $\{a\} \subset \{a,c\}$

Սահմանում. Դիցուք $(A, \sqsubseteq_A)$ և $(B, \sqsubseteq_B)$ մասնակի կարգավորված բազմություններ են: Նշանակենք Φ-ով A-ից B բոլոր արտապատկերումների բազմությունը:

$$\Phi = \{ f \mid f : A \to B\}$$

Φ բազմության վրա $\sqsubseteq$ մասնակի կարգը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

եթե $g, h \in \Phi$, ապա $g \sqsubseteq h$ այն դեպքում, երբ ցանկացած $a \in A$ համար

$$g(a) \sqsubseteq_B h(a):$$

Հեշտ է համոզվել, որ սահմանվածը իրոք մասնակի կարգ է:

Օրինակ 6. Դիտարկենք $(2^{\{0,1,2\}}, \subset)$ և $(N, \le)$ մասնակի կարգավորված բազմությունները: $\Phi = \{ f \mid f : 2^{\{0,1,2\}} \to N\}$: $(\Phi, \sqsubseteq)$ մասնակի կարգավորված բազմություն է:

Դիտարկենք հետևյալ արտապատկերումները.

$$g(a)=\overline{\overline{a}},$$

$$h(a)=\sum_{i\in a} i, \text{ եթե } a \ne \varnothing \qquad h(\varnothing) = 0$$

որտեղ $\overline{\overline{a}}$-ն a բազմության հզորությունն է:

$g \not\sqsubseteq h$, քանի որ $g(\{0\})=1$, $h(\{0\})=0$ և $1 \Leftarrow 0$

$h \not\sqsubseteq g$, քանի որ $h(\{2\})=2$, $g(\{2\})=1$ և $2 \Leftarrow 1$

Այժմ դիտարկենք $g(a)=\overline{\overline{a}}$ և $h(a)=1+\sum_{i\in a} i$ արտապատկերումները: Այս դեպքում հեշտ է համոզվել, որ $g \sqsubseteq h$ և $h \not\sqsubseteq g$:

1.2. Լրիվ բազմություններ

Դիցուք $(A, \sqsubseteq)$ մասնակի կարգավորված բազմություն է և $B \subset A$:

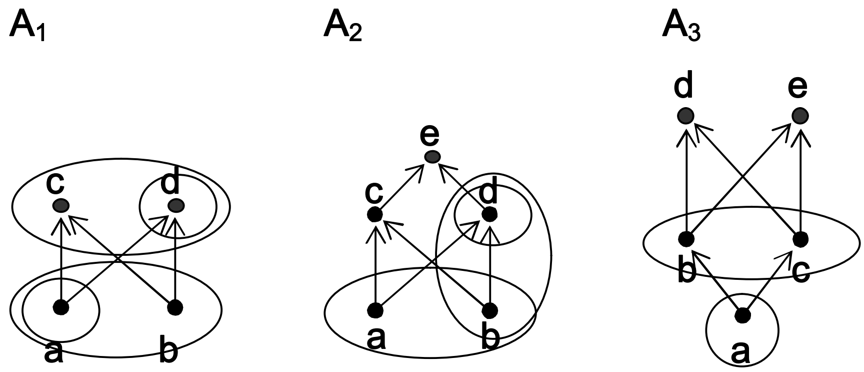
Սահմանում. A բազմության a էլեմենտը կանվանենք B բազմության համար վերին սահման, եթե ցանկացած $b \in B$, $b \sqsubseteq_A a$: B բազմության a վերին սահմանը կոչվում է ճշգրիտ վերին սահման, եթե B բազմության ցանկացած a′ վերին սահմանի համար ունենք՝ a ⊑ $_A$ a′:

B բազմության ճշգրիտ վերին սահմանը կնշանակենք sup B:

A բազմության համար նրա b էլեմենտը կանվանենք ամենափոքր (փոքրագույն), եթե ցանկացած a ∈ A, b ⊑ $_A$ a: A բազմության համար նրա b էլեմենտը կանվանենք ամենամեծ (մեծագույն), եթե ցանկացած a ∈ A, a ⊑ $_A$ b:

Օրինակ 7. Դիտարկենք օրինակ 1-ում բերված (N, ≤) մ. կ. բ.: N-ի ցանկացած վերջավոր ենթաբազմություն ունի վերին սահման և ճշգրիտ վերին սահման, իսկ ցանկացած անվերջ ենթաբազմություն վերին սահման, հետևաբար նաև ճշգրիտ վերին սահման, չունի:

Օրինակ 8. Դիտարկենք դիագրամի տեսքով տրված հետևյալ մասնակի կարգավորված բազմությունները:



Դիտարկենք A_1 բազմությունը: Մեկ էլեմենտանոց {d} ենթաբազմությունը ունի մեկ վերին սահման՝ d: Մեկ էլեմենտանոց {a} ենթաբազմությունը ունի երեք վերին սահման՝ a, c և d, որոնցից a-ն հանդիսանում է այդ բազմության ճշգրիտ վերին սահմանը: {a, b} ենթաբազմությունը ունի երկու վերին սահման՝ c և d, որոնք անհամեմատելի են, հետևաբար այդ բազմությունը ճշգրիտ վերին սահման չունի: {c, d} ենթաբազմությունը վերին սահման չունի: A_1 բազմությունը չունի ոչ մեծագույն, ոչ էլ փոքրագույն էլեմենտ:

Դիտարկենք A_2 բազմությունը: {b, d} ենթաբազմությունը ունի երկու վերին սահման՝ d և e, որոնցից d-ն հանդիսանում է այդ բազմության ճշգրիտ վերին սահմանը: {a, b} ենթաբազմության վերին սահմանները c-ն, d-ն ու e-ն են, իսկ ճշգրիտ վերին սահման նշված բազմությունը չունի: A_2 բազմությունը փոքրագույն էլեմենտ չունի, իսկ մեծագույն էլեմենտը e-ն է:

Դիտարկենք A_3 բազմությունը: {b, c} ենթաբազմությունը ունի երկու վերին սահման՝ d և e, որոնք համեմատելի չեն, հետևաբար այդ բազմությունը չունի ճշգրիտ վերին սահման: A_2 բազմությունը մեծագույն էլեմենտ չունի, իսկ փոքրագույն էլեմենտը a-ն է:

Սահմանում. Մասնակի կարգավորված բազմությունը, որի ցանկացած երկու էլեմենտ համեմատելի են, կոչվում է գծորեն կարգավորված բազմություն:

Նկատենք, որ գծորեն կարգավորված բազմության ցանկացած ենթաբազմություն նույնպես գծորեն կարգավորված է:

Օրինակ 1-ում բերված (N, $\leq$) մասնակի կարգավորված բազմությունը գծորեն կարգավորված բազմություն է:

Դիտարկենք օրինակ 8-ում բերված A_2 մասնակի կարգավորված բազմությունը: Այն գծորեն կարգավորված բազմություն չէ, քանի որ օրինակ նրա c և d էլեմենտները անհամեմատելի են: Սակայն այդ բազմությունը ունի գծորեն կարգավորված ենթաբազմություններ: Թվարկենք դրանք.

$\varnothing$, {a}, {b}, {c}, {d}, {e}, {a,c}, {a,d}, {a,e}, {b,d}, {b,c}, {b,e}, {c,e}, {d,e}, {a,c,e}, {a,d,e}, {b,c,e}, {b,d,e}

Սահմանում. Կասենք, որ (A, $\sqsubseteq$) մասնակի կարգավորված բազմությունը լրիվ է, եթե նրա ցանկացած գծորեն կարգավորված ենթաբազմություն ունի ճշգրիտ վերին սահման:

Պնդում: Ցանկացած լրիվ բազմություն ունի փոքրագույն էլեմենտ՝ Sup $\varnothing$:

Համոզվենք դրանում: Ցանկացած մասնակի կարգավորված բազմության համար դատարկ բազմությունը հանդիսանում է գծորեն կարգավորված ենթաբազմություն: Ակնհայտ է նաև, որ բազմության ցանկացած էլեմենտ հանդիսանում է $\varnothing$-ի վերին սահման: Ըստ sup-ի սահմանման Sup $\varnothing$ հանդիսանում է $\varnothing$-ի վերին սահմաններից փոքրագույնը: Բազմության լրիվությունից հետևում է, որ գոյություն ունի Sup $\varnothing$, այսինքն՝ գոյություն ունի բազմության փոքրագույն էլեմենտ:

Դիտարկենք նախկինում բերված օրինակներում տրված մասնակի կարգավորված բազմություններից մի քանիսը:

Օրինակ 1-ում բերված (N, $\leq$) բազմությունը լրիվ չէ: Նրա ցանկացած ենթաբազմություն գծորեն կարգավորված է: Նրա ցանկացած անվերջ ենթաբազմություն ճշգրիտ վերին սահման չունի:

Օրինակ 3-ում բերված (N $\cup$ {$\perp$}, □) մասնակի կարգավորված բազմությունը գծորեն կարգավորված չի: Նրա գծորեն կարգավորված ենթաբազմությունները հետևյալ բազմություններն են. $\varnothing$,{$\perp$},{n},{$\perp$,n}, որտեղ n $\in$ N: $\varnothing$ և {$\perp$}

բազմությունների համար վերին սահման է հանդիսանում N ∪ {⊥} բազմության ցանկացած էլեմենտ, իսկ ճշգրիտ վերին սահմանը ⊥-ն է: {n} և {⊥, n}, n ∈ N, բազմությունների համար միակ վերին սահմանը (հետևաբար, նաև ճշգրիտ վերին սահմանը) n-ն է: Հետևաբար, տրված բազմությունը լրիվ է:

Համանման ձևով կարելի է համոզվել, որ օրինակ 2-ում նկարագրված ($2^{\{a,b,c\}}$,⊂) բազմությունը լրիվ է, օրինակ 8-ում՝ A_1 և A_2 բազմությունները լրիվ չեն (երկու դեպքում էլ դատարկ բազմությունը ճշգրիտ վերին սահման չունի), իսկ A_3 բազմություն լրիվ է, sup ∅ = a:

1.3. Թեորեմ լրիվ բազմությունների դեկարտյան արտադրյալի մասին

Պայմանավորվենք հետագայում գրելով «A-ն մասնակի կարգավորված բազմություն է» հասկանալ (A, $\sqsubseteq_A$):

Թեորեմ: Եթե A_1, ..., A_n, (n ≥ 1) բազմությունները լրիվ են, ապա $A_1\times\ldots\times A_n$ բազմությունը լրիվ է:

Ապացույց. Դիցուք B ⊂ $A_1\times\ldots\times A_n$ և գծորեն կարգավորված ենթաբազմություն է: Պետք է ցույց տանք, որ B բազմության համար գոյություն ունի ճշգրիտ վերին սահման՝ Sup B: Դիտարկենք

$$A'_i=\{a \mid \exists <a_1,\ldots,a_n> \in B, \text{ որ } a_i = a\}, I = 1,\ldots,n$$

Ցույց տանք, որ A'_i-ն գծորեն կարգավորված բազմություն է: Վերցնենք ցանկացած a,b ∈ A'_i, 1 ≤ i ≤ n: Այդ դեպքում

a-ի համար գոյություն ունի $\overline{a}$ =<$a_1,\ldots,a_n$> այնպիսին, որ a_i=a,

b-ի համար գոյություն ունի $\overline{b}$ =<$b_1,\ldots,b_n$> այնպիսին, որ b_i=b:

Քանի որ B-ն գծորեն կարգավորված բազմություն է, ուրեմն կամ $\overline{a} \sqsubseteq \overline{b}$ կամ $\overline{b} \sqsubseteq \overline{a}$:

$$\overline{a} \sqsubseteq \overline{b} \quad \Rightarrow \quad a_i \sqsubseteq b_i \quad \Rightarrow \quad a \sqsubseteq b$$

$$\overline{b} \sqsubseteq \overline{a} \quad \Rightarrow \quad b_i \sqsubseteq a_i \quad \Rightarrow \quad b \sqsubseteq a:$$

Այսինքն՝ A'_i-ն գծորեն կարգավորված բազմություն է: Քանի, որ $A'_i \subset A_i$, իսկ A_i-ն լրիվ բազմություն է, ուրեմն գոյություն ունի Sup A'_i: Հեշտ է համոզվել, որ այդ դեպքում Sup B = <Sup A'_1,...,Sup A'_n>:

Թեորեմն ապացուցված է:

1.4. Մոնոտոն արտապատկերումներ:

Դիցուք A և B մասնակի կարգավորված բազմություններ են:

Սահմանում. $f : A \to B$ արտապատկերումը կոչվում է մոնոտոն, եթե ցանկացած $a, b \in A$ համար $a \sqsubseteq_A b$-ից հետևում է $f(a) \sqsubseteq_B f(b)$:

Օրինակ 9. Դիտարկենք $(2^{\{0,1,2\}}, \subset)$ և $(N, \leq)$ մասնակի կարգավորված բազմությունները:

$g, h, f : 2^{\{0,1,2\}} \to N$

$g(a)=\overline{\overline{a}}$ - մոնոտոն է:

$h(a)=\sum_{i \in a} i$, եթե $a \neq \varnothing$ և $h(\varnothing) = 0$ - մոնոտոն է:

$f(a)=\prod_{i \in a} i$, եթե $a \neq \varnothing$ և $f(\varnothing) = 0$ - մոնոտոն չէ:

Օրինակ 10. Դիտարկենք $(N \cup \{\perp\}, \preccurlyeq)$ մասնակի կարգավորված բազմությունը: Սահմանենք $f : N \cup \{\perp\} \to N \cup \{\perp\}$ ֆունկցիան հետևյալ կերպ.

$f(\perp)=\perp$ և $f(n)=n$, եթե $n \in N$

f ֆունկցիան մոնոտոն ֆունկցիա է:

Սահմանենք $g : N \cup \{\perp\} \to N \cup \{\perp\}$ ֆունկցիան հետևյալ կերպ.

$g(\perp)=0$ և $g(n)=n+1$, եթե $n \in N$

g ֆունկցիան մոնոտոն ֆունկցիա չէ, քանի որ $\perp \preccurlyeq 0$, բայց $g(\perp)=0$, $g(0)=1$ և $0 \not\preccurlyeq 1$:

Թեորեմ: Եթե A-ն և B-ն լրիվ բազմություններ են, ապա $\mathscr{F}=\{f \mid f : A \to B$ և f-ը մոնոտոն է$\}$ լրիվ բազմություն է:

Ապացույց. Դիցուք $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$ գծորեն կարգավորված ենթաբազմություն է: Պետք է ցույց տանք, որ գոյություն ունի Sup $\mathscr{F}'$:

Ֆիքսենք ցանկացած $x \in A$: Դիտարկենք $B_x \subset B$ բազմությունը, որը որոշվում է հետևյալ կերպ.

$$B_x=\{f(x) \mid f \in \mathscr{F}'\}:$$

Ցույց տանք, որ B_x-ը գծորեն կարգավորված բազմություն է: Դիցուք $a,b \in B_x$:

a-ի համար գոյություն ունի $f \in \mathcal{F}'$ այնպիսին, որ a=f(x):

b-ի համար գոյություն ունի $g \in \mathcal{F}'$ այնպիսին, որ b=g(x):

Քանի որ $\mathcal{F}'$-ը գծորեն կարգավորված է, ուրեմն կամ $f \sqsubseteq g$, կամ $g \sqsubseteq f$:

$f \sqsubseteq g \quad \Rightarrow \quad f(x) \sqsubseteq g(x) \quad \Rightarrow \quad a \sqsubseteq b$

$g \sqsubseteq f \quad \Rightarrow \quad g(x) \sqsubseteq f(x) \quad \Rightarrow \quad b \sqsubseteq a$

Այսինքն՝ ցանկացած $x \in A$ համար B_x-ը B-ի գծորեն կարգավորված ենթաբազմություն է և քանի որ B-ն լրիվ բազմություն է, ապա գոյություն ունի Sup B_x:

Սահմանենք $g : A \to B$ ֆունկցիան հետևյալ կերպ. ցանկացած $x \in A$ համար

$$g(x)=\mathrm{Sup}\ B_x:$$

Այժմ ցույց տանք, որ $g=\mathrm{Sup}\ \mathcal{F}'$: Դրա համար պետք է ցույց տանք, որ.

ա) $g \in \mathcal{F}$, այսինքն՝ g-ն մոնոտոն արտապատկերում է,

բ) g-ն $\mathcal{F}'$-ի վերին սահման է,

գ) g-ն $\mathcal{F}'$-ի վերին սահմանների փոքրագույնն է:

Ցույց տանք ա)-ն, այսինքն՝ ցույց տանք, որ ցանկացած x,y-ի համար

$$x \sqsubseteq_A y \quad \Rightarrow \quad g(x) \sqsubseteq_B g(y):$$

Քանի որ g(y)=Sup B_y, ապա ցանկացած $f \in \mathcal{F}'$ համար

$$f(y) \sqsubseteq_B g(y)$$

և քանի որ f-ը մոնոտոն արտապատկերում է, ուրեմն

$$f(x) \sqsubseteq_B f(y)$$

Ստացվեց, որ ցանկացած $f \in \mathcal{F}'$ համար $f(x) \sqsubseteq_B g(y)$, այսինքն՝ g(y)-ը B_x բազմության համար հանդիսանում է վերին սահման: Քանի որ, g(x)=Sup B_x, ապա

$$g(x) \sqsubseteq_B g(y):$$

Ցույց տանք բ)-ն, այսինքն՝ ցույց տանք, որ ցանկացած $f \in \mathcal{F}'$ համար $f \sqsubseteq g$:

Ցանկացած $f \in \mathcal{F}'$ և $x \in A$ համար $f(x) \in B_x$ և g(x)=Sup B_x: Հետևաբար ցանկացած $x \in A$ համար $f(x) \sqsubseteq_B g(x)$: Ուրեմն $f \sqsubseteq g$:

Ցույց տանք գ)-ն: Դիտարկենք $\mathscr{F}'$ բազմության որևէ h վերին սահման և ցույց տանք, որ $g \sqsubseteq h$:

Քանի որ h-ը $\mathscr{F}'$ բազմության վերին սահման է, ապա ցանկացած $f \in \mathscr{F}'$ համար $f \sqsubseteq h$, այսինքն՝ ցանկացած $x \in A$ համար $f(x) \sqsubseteq_B h(x)$: Հետևաբար h(x)-ը B_x բազմության համար վերին սահման է: Քանի որ $g(x)=\mathrm{Sup}\ B_x$, ուրեմն $g(x) \sqsubseteq_B h(x)$: Ստացանք, որ ցանկացած $x \in A$ համար $g(x) \sqsubseteq_B h(x)$, այսինքն՝ $g \sqsubseteq h$:

Թեորեմն ապացուցված է:

1.5. Թեորեմ անշարժ կետի մասին

Սահմանում: Դիցուք A-ն մասնակի կարգավորված բազմություն է և $f : A \to A$: $a \in A$ կանվանենք f արտապատկերման անշարժ կետ, եթե $f(a)=a$:

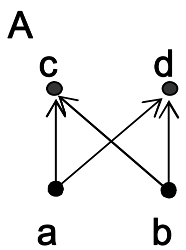
Դիցուք A և B մասնակի կարգավորված բազմություններ են: Նշանակենք $[A \to B]$-ով A-ից B բոլոր մոնոտոն արտապատկերումների բազմությունը:

Թեորեմ (անշարժ կետի մասին): Դիցուք A-ն լրիվ բազմություն է և $f \in [A \to A]$: Այդ դեպքում f ունի փոքրագույն անշարժ կետ:

Առանց ապացույցի:

Համոզվենք թեորեմի պայմանների անհրաժեշտ լինելում:

Դիտարկենք հետևյալ A մասնակի կարգավորված բազմությունը.



A-ն լրիվ բազմություն չէ, քանի որ չունի փոքրագույն էլեմենտ: Սահմանենք հետևյալ արտապատկերումը $f : A \to A$.

$$f(a)=b$$

$$f(b)=a$$

$$f(c)=d$$

$$f(d)=c$$

Համոզվենք, որ այն մոնոտոն արտապատկերում է.

$$a \sqsubseteq c \quad \Rightarrow \quad f(a) = b \sqsubseteq d = f(c)$$

$$a \sqsubseteq d \quad \Rightarrow \quad f(a) = b \sqsubseteq c = f(d)$$

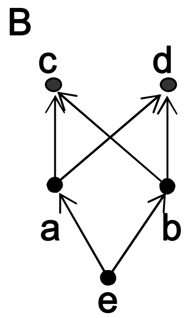
$$b \sqsubseteq d \quad \Rightarrow \quad f(b) = a \sqsubseteq c = f(d)$$

$$b \sqsubseteq c \quad \Rightarrow \quad f(b) = a \sqsubseteq d = f(c)$$

Ստացվեց, որ A-ն լրիվ չէ, f-ը մոնոտոն է և անշարժ կետ չունի: Հետևաբար, թեորեմում A բազմության լրիվությունը անհրաժեշտ պայման է:

Այժմ համոզվենք թեորեմում f արտապատկերման մոնոտոնության պայմանը նույնպես անհրաժեշտ է:

Այժմ դիտարկենք հետևյալ B մասնակի կարգավորված բազմությունը.

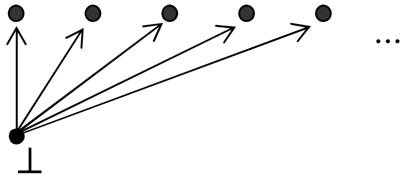


Հեշտ է համոզվել, որ B-ն լրիվ բազմություն է: Սահմանենք f : B→B արտապատկերումը a, b, c, d էլեմենտների վրա այնպես, ինչպես նախորդ դեպքում, իսկ f(e) ≠ e: Այդ դեպքում սահմանված արտապատկերումը մոնոտոն չի և անշարժ կետ չունի:

1.6. Տիպեր

Դիցուք M-ը որևէ ոչ դատարկ բազմություն է և M-ում գոյություն ունի հատուկ էլեմենտ, որը կնշանակենք ⊥-ով և կանվանենք անորոշություն: M բազմության վրա սահմանենք ⊑ մասնակի կարգը հետևյալ կերպ. ցանկացած $m \in M$ համար $m \sqsubseteq m$ և $\perp \sqsubseteq m$:

Ստացվում է որ ցանկացած էլեմենտ M բազմությունից համեմատելի է միայն իր և ⊥-ի հետ: Դիագրամի տեսքով M բազմությունը կարելի է պատկերել հետևյալ կերպ.



Տիպի սահմանումը:

1. M բազմությունը տիպ է:
2. Եթե $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta$ ($n \geq 1$) տիպեր են, ապա $[\alpha_1 \times ... \times \alpha_n \rightarrow \beta]$ բազմությունը տիպ է:
3. Ուրիշ տիպեր չկան:

Տիպերի բազմությունը նշանակենք Types-ով և գրելով $\alpha \in$ Types կհասկանանք «α-ն տիպ է»:

Թեորեմ: Ցանկացած տիպ լրիվ բազմություն է:

Ապացույցը կատարվում է ինդուկտիվ, ըստ տիպի սահմանման:

Դիցուք $\alpha \in$ Types:

Բազիս: Եթե α=M, ապա հեշտ է համոզվել, որ M-ը լրիվ բազմություն է:

Ենթադրություն: Դիցուք $\alpha = [\alpha_1 \times ... \times \alpha_n \rightarrow \beta]$ և $\alpha_1,...,\alpha_n,\beta$ ($n \geq 1$) տիպերը լրիվ բազմություններ են:

Ընդհանուր քայլ: Ցույց տանք, որ $\alpha = [\alpha_1 \times ... \times \alpha_n \rightarrow \beta]$ բազմությունը լրիվ բազմություն է:

Ըստ լրիվ բազմությունների դեկարտյան արտադրյալի լրիվության մասին թեորեմի $\alpha_1 \times ... \times \alpha_n$ լրիվ բազմություն է: Ըստ մոնոտոն արտապատկերումների բազմության լրիվության մասին թեորեմի $[\alpha_1 \times ... \times \alpha_n \rightarrow \beta]$-ը ևս կլինի լրիվ բազմություն:

Թեորեմն ապացուցված է:

Դիցուք $\alpha \in$ Types: α տիպին համապատասխանեցնենք բնական թիվ հետևյալ կերպ, որը կանվանենք α տիպի կարգ (կնշանակենք ord(α)).

1. Եթե α=M, ապա ord(α)=0:
2. Եթե $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta \in$ Types ($n \geq 1$) և $\alpha = [\alpha_1 \times ... \times \alpha_n \rightarrow \beta]$, ապա ord($\alpha$) = max(ord($\alpha_1$),...,ord($\alpha_n$),ord($\beta$))+1:

Օրինակ 12:

- ord(M) = 0
- ord([M→M]) = max(ord(M), ord(M))+1 = 0+1 = 1
- ord([M^2→M]) = max(ord(M), ord(M), ord(M))+1 = 0+1 =1
- ord([[M→M]→M]) = max(ord([M→M]), ord(M))+1 = 1+1 = 2
- ord([[M→M]→[M→M]]) = max(ord([M→M]), ord([M→M]))+1 = 1+1 = 2

- $ord([M \times [M^2 \to M] \to [M \to M]]) = max(ord(M), ord([M^2 \to M]), ord([M \to M]))+1 = 1+1 = 2$
- $ord([[[M \to M] \to M] \to M]) = max(ord([[[M \to M] \to M]), ord(M))+1 = 2+1 = 3$:

Կասենք, որ x փոփոխականը α տիպի է, որտեղ $\alpha \in$ Types, եթե x-ը ընդունում է արժեքներ α բազմությունից: Այդ դեպքում x փոփոխականի կարգը կնշանակենք ord(x)-ով, որը հավասար է $ord(\alpha)$:

Կասենք, որ ցանկացած c-ն α տիպի հաստատուն է, $\alpha \in$ Types, եթե $c \in \alpha$: Այդ դեպքում c հաստատունի կարգը կնշանակենք ord(c)-ով, որը հավասար է $ord(\alpha)$:

Օրինակ 13: Դիտարկենք $M = N \cup \{\perp\}$:

- $5, 3, 0, \perp \in M$ հաստատուններ են և $ord(5) = ord(3) = ord(0) = ord(\perp) = 0$,
- $!, abs \in [M \to M]$ հաստատուններ են և $ord(!) = ord(abs) = 1$,
- $+,-,* \in [M^2 \to M]$ հաստատուններ են և $ord(+) = ord(-) = ord(*) = 1$,

1.7. Թերմեր

Դիցուք $\alpha \in$ Types, V_α-ն α տիպի փոփոխականների հաշվելի բազմությունն է: Նշանակենք բոլոր փոփոխականների բազմությունը $V = \bigcup_{\alpha \in Types} V_\alpha$:

Սահմանենք թերմի հասկացությունը: Նշանակենք Λ-ով բոլոր թերմերի բազմությունը, որը հավասար է $\bigcup_{\alpha \in Types} \Lambda_\alpha$, որտեղ Λ_α-ն կնշանակի α տիպի թերմերի բազմությունը:

Թերմի սահմանում:

1. Եթե $c \in \alpha$, $\alpha \in$ Types, ապա $c \in \Lambda_\alpha$: (ցանկացած հաստատուն թերմ է)
2. Եթե $x \in V_\alpha$, $\alpha \in$ Types, ապա $x \in \Lambda_\alpha$: (ցանկացած փոփոխական թերմ է)
3. Եթե $\tau \in \Lambda_{[\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_k \to \beta]}$, $t_i \in \Lambda_{\alpha_i}$, i=1,...,k ($k \geq 1$), որտեղ $\alpha_1, ..., \alpha_k, \beta \in$ Types, ապա $\tau(t_1,...,t_k) \in \Lambda_\beta$: Այդ դեպքում կասենք, որ $\tau(t_1,...,t_k)$ թերմը ստացվել է τ, $t_1, ..., t_k$ թերմերից ապպլիկացիայի գործողության միջոցով:
4. Եթե $\tau \in \Lambda_\beta$, $x_i \in V_{\alpha_i}$, i=1,...,k ($k \geq 1$), որտեղ $\alpha_1, ..., \alpha_k, \beta \in$ Types և $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$, i, j=1, ..., k, ապա $\lambda x_1...x_k[\tau] \in \Lambda_{[\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_k \to \beta]}$: Այդ դեպքում կասենք, որ $\lambda x_1...x_k[\tau]$ թերմը ստացվել է τ թերմից և $x_1, ..., x_k$ փոփոխականներից աբստրակցիայի

գործողության միջոցով, $\lambda x_1...x_k$-ն կանվանենք աբստրակտոր, իսկ τ-ն՝ աբստրակտորի ազդեցության տիրույթ:

5. Ուրիշ թերմեր չկան:

Օրինակ 14. Դիտարկենք $M=N \cup \{\perp\}$, $2 \in M$, $x, y \in V_M$, $+ \in [M^2 \to M]$, $F \in V_{[M^2 \to M]}$: Այդ դեպքում.

- $2 \in \Lambda_M$,
- $x, y \in \Lambda_M$,
- $+ \in \Lambda_{[M^2 \to M]}$,
- $F \in \Lambda_{[M^2 \to M]}$,
- $F(x,y) \in \Lambda_M$,
- $+(x,y) \in \Lambda_M$,
- $\lambda x[2] \in \Lambda_{[M \to M]}$,
- $\lambda x[+(x,2)] \in \Lambda_{[M \to M]}$,
- $\lambda xy[F(x,y)] \in \Lambda_{[M^2 \to M]}$,
- $\lambda F[\lambda xy[F(x,y)]] \in \Lambda_{[[M^2 \to M] \to [M^2 \to M]]}$:

Սահմանում: Դիցուք $t \in \Lambda$: x փոփոխականի ֆիքսած մուտքը t թերմում կանվանենք կապված, եթե այն կամ պատկանում է որևէ աբստակտորին, կամ գտնվում է այդ փոփոխականն օգտագործող աբստրակտորի ազդեցության տիրույթում: Հակառակ դեպքում x փոփոխականի մուտքը կանվանենք ազատ:

Սահմանում: Կասենք, որ x փոփոխականը t թերմում ազատ է, եթե այն ունի առնվազն մեկ ազատ մուտք:

t թերմի ազատ փոփոխականների բազմությունը կնշանակենք FV(t)-ով:

Օրինակ 15: Դիտարկենք $M=N \cup \{\perp\}$ և $2 \in M$, $x, y \in V_M$, $+ \in [M^2 \to M]$, $F \in V_{[M^2 \to M]}$: Այդ դեպքում

$$\lambda xy[*(x,y)](\lambda x[x](2),3)$$

թերմում փոփոխականների բոլոր մուտքերը կապված են, $FV(\lambda xy[*(x,y)](\lambda x[x](2),3))=\varnothing$,

$$\lambda xy[F(x,y)]$$

թերմում x և y փոփոխականների մուտքերը կապված են, իսկ F փոփոխականի մուտքը ազատ է, $FV(\lambda xy[F(x,y)])=\{F\}$

$$+(x, \lambda \underline{x}[+(\underline{x},y)](2))$$

թերմում փոփոխականների ընդգծված մուտքերը կապված են, իսկ ոչ ընդգծված մուտքերը՝ ազատ, և $FV(\lambda \underline{x}[+(\underline{x},y)](x))=\{x,y\}$

Տանք թերմի ազատ փոփոխականների բազմության մեկ այլ սահմանում՝ ինդուկցիայով ըստ թերմի սահմանման:

1. $FV(c)=\varnothing$, որտեղ $c \in \alpha$, $\alpha \in$ Types,

2. $FV(x)=\{ x \}$, որտեղ $x \in V_{\alpha}$, $\alpha \in$ Types,

3. $FV(\tau(t_1,...,t_n))=FV(\tau) \cup FV(t_1) \cup ... \cup FV(t_n)$, որտեղ τ, $t_i \in \Lambda$, $i=1,...,n$ $(n \geq 1)$:

4. $FV(\lambda x_1...x_n[\tau])=FV(t)\backslash\{x_1, ..., x_n\}$, որտեղ $\tau \in \Lambda$:

1.8. Թերմի արժեք

Դիցուք $t \in \Lambda_{\alpha}$, $\alpha \in$ Types և $FV(t) \subset \{y_1,...,y_n\}$, $\bar{y}_0=<y_1^0,...,y_n^0>$, $\bar{y}_1=<y_1^1,...,y_n^1>$, որտեղ $y_i \in V_{\beta_i}$, y_i^0, $y_i^1 \in \beta_i$, $\beta_i \in$ Types, $i=1,...,n$, $n \geq 0$ և $\bar{y}_0 \sqsubseteq \bar{y}_1$:

Սահմանենք t թերմի արժեքը փոփոխականների $\bar{y}_0$ արժեքների համար, որը կնշանակենք $Val_{\bar{y}_0}(t)$: Սահմանմանը զուգահեռ մենք կապացուցենք.

ա) $Val_{\bar{y}_0}(t) \in \alpha$

բ) $Val_{\bar{y}_0}(t) \sqsubseteq Val_{\bar{y}_1}(t)$ (Տերմի արժեքի այս հատկությունը կանվանենք մոնոտոնություն)

Թերմի արժեք

1. Դիցուք t-ն $c \in \alpha$ հաստատունն է: Այդ դեպքում $Val_{\bar{y}_0}(t)=c$:

ա) $Val_{\bar{y}_0}(t)=c \in \alpha$

բ) $Val_{\bar{y}_0}(t)=c$, $Val_{\bar{y}_1}(t)=c$ և $c \sqsubseteq c$: Հետևաբար՝ $Val_{\bar{y}_0}(t) \sqsubseteq Val_{\bar{y}_1}(t)$:

2. Դիցուք t-ն $x \in V_{\alpha}$ փոփոխականն է: Այդ դեպքում $Val_{\bar{y}_0}(x)=y_i^0$, որտեղ $FV(x)=\{x\} \subset \{y_1,...,y_n\}$ և $x=y_i$, $1 \leq i \leq n$:

ա) Քանի որ $x=y_i$ ունենք $\alpha=\beta_i$ և $Val_{\bar{y}_0}(t)=y_i^0 \in \beta_i=\alpha$

բ) Քանի որ $\bar{y}_0 \sqsubseteq \bar{y}_1$, ապա $y_i^0 \sqsubseteq y_i^1$ և

$$Val_{\bar{y}_0}(t)=y_i^0 \sqsubseteq y_i^1=Val_{\bar{y}_1}(t):$$

3. Դիցուք t-ն $\tau(t_1,...,t_k) \in \Lambda_\alpha$ թերմն է, որտեղ $\tau \in \Lambda_{[\alpha_1\times\ldots\times\alpha_k\to\alpha]}$, $t_i \in \Lambda_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in$ Types, i=1,...,k ($k \geq 1$):

Ինդուկցիայի ենթադրության համաձայն ունենք հետևյալը.

$Val_{\bar{y}_0}(\tau) \in [\alpha_1\times\ldots\times\alpha_n\to\alpha]$, $Val_{\bar{y}_1}(\tau) \in [\alpha_1\times\ldots\times\alpha_n\to\alpha]$ (1)

$Val_{\bar{y}_0}(t_i) \in \alpha_i$, $Val_{\bar{y}_1}(t_i) \in \alpha_i$, i=1,...,k (2)

$Val_{\bar{y}_0}(\tau) \sqsubseteq Val_{\bar{y}_1}(\tau)$ (3)

$Val_{\bar{y}_0}(t_i) \sqsubseteq Val_{\bar{y}_1}(t_i)$, i=1,...,k (4)

Սահմանենք $Val_{\bar{y}_0}(\tau(t_1,...,t_k))$ հավասար այն արժեքին, որը ստացվում է $Val_{\bar{y}_0}(\tau)$ արտապատկերման կիրառումից $Val_{\bar{y}_0}(t_1),..., Val_{\bar{y}_0}(t_k)$ արժեքների վրա: (1) և (2)-ից հետևում է, որ այն α-ից է: Այդ ամենը կգրենք հետևյալ կերպ.

$$Val_{\bar{y}_0}(\tau(t_1,...,t_k))=Val_{\bar{y}_0}(\tau)(Val_{\bar{y}_0}(t_1),..., Val_{\bar{y}_0}(t_k)) \in \alpha$$

բ) Այժմ ցույց տանք, որ

$$Val_{\bar{y}_0}(\tau(t_1,...,t_k)) \sqsubseteq Val_{\bar{y}_1}(\tau(t_1,...,t_k))$$

$Val_{\bar{y}_0}(\tau(t_1,...,t_k))=Val_{\bar{y}_0}(\tau)(Val_{\bar{y}_0}(t_1),...,Val_{\bar{y}_0}(t_k))$ ((1)-ից և (4)-ից) $\sqsubseteq$ $Val_{\bar{y}_0}(\tau)(Val_{\bar{y}_1}(t_1),..., Val_{\bar{y}_1}(t_k))$ ((3)-ից և (1)-ից) $\sqsubseteq$ $Val_{\bar{y}_1}(\tau)(Val_{\bar{y}_1}(t_1),..., Val_{\bar{y}_1}(t_k))=Val_{\bar{y}_1}(\tau(t_1,...,t_k))$:

4. Դիցուք t-ն $\lambda x_1...x_k[\tau] \in \Lambda_\alpha$ թերմն է, որտեղ $\alpha=[\alpha_1\times\ldots\times\alpha_k\to\beta]$, $\tau \in \Lambda_\beta$, $x_i \in V_{\alpha_i}$, $\alpha_i, \beta \in$ Types, i=1,...,k ($k \geq 1$):

Սահմանենք $Val_{\bar{y}_0}(\lambda x_1...x_k[\tau]) : \alpha_1\times\ldots\times\alpha_k \to \beta$ արտապատկերում, որը որոշվում է հետևյալ կերպ.

Դիցուք $\{y_1,...,y_n\} \setminus \{x_1,...,x_k\}=\{y_{i_1},...,y_{i_s}\}$, $s \geq 0$, և $\bar{y}'_0=<y^0_{i_1},...,y^0_{i_s}>$, $\bar{y}'_1=<y^1_{i_1},...,y^1_{i_s}>$: Յանկացած $\bar{x}_0=<x^0_1,...,x^0_k>$, $x^0_j \in \alpha_j$, j=1,...,k, համար.

$$Val_{\bar{y}_0}(\lambda x_1...x_k[\tau])(x^0_1,...,x^0_k)=Val_{\bar{x}_0, \bar{y}'_0}(\tau)$$

որտեղ $\bar{x}_0, \bar{y}'_0=<x^0_1,...,x^0_n, y^0_{i_1},...,y^0_{i_s}>$ և ըստ ինդուկցիայի ենթադրության $Val_{\bar{x}_0, \bar{y}'_0}(\tau) \in \beta$:

ա) Պետք է, ցույց տանք, որ Val $_{\bar{y}_0}$ ($\lambda x_1...x_k[\tau]$)) $\in [\alpha_1\times...\times\alpha_k\rightarrow\beta]=\alpha$:

Ըստ սահմանման Val $_{\bar{y}_0}$ ($\lambda x_1...x_k[\tau]$)) : $\alpha_1\times...\times\alpha_k\rightarrow\beta$: Մնում է ապացուցենք, որ Val $_{\bar{y}_0}$ ($\lambda x_1...x_k[\tau]$))-ը մոնոտոն արտապատկերում է:

Դիցուք $\bar{x}_0 =< x_1^0 ,..., x_n^0 >$, $\bar{x}_1 =< x_1^1 ,..., x_n^1 >$, $x_j^0 , x_j^1 \in \alpha_j$, j=1,...,k, k $\geq$ 1 և

$$\bar{x}_0 \sqsubseteq \bar{x}_1 :$$

Այդ դեպքում $\bar{x}_0 , \bar{y}'_0 \sqsubseteq \bar{x}_1 , \bar{y}'_0$, որտեղ $\bar{x}_0 , \bar{y}'_0 =< x_1^0 ,..., x_n^0 , y_{i_1}^0 ,..., y_{i_s}^0 >$, $\bar{x}_1 , \bar{y}'_0 =< x_1^1 ,..., x_n^1 , y_{i_1}^0 ,..., y_{i_s}^0 >$, և հաշվի առնելով τ թերմի արժեքի մոնոտոնության մասին ինդուկցիայի ենթադրությունը կստանանք հետևյալը.

$$\text{Val}_{\bar{y}_0} (\lambda x_1...x_n[\tau])(x_1^0 ,..., x_k^0)=\text{Val}_{\bar{x}_0 , \bar{y}'_0} (\tau) \sqsubseteq \text{Val}_{\bar{x}_1 , \bar{y}'_0} (\tau)=\text{Val}_{\bar{y}_0} (\lambda x_1...x_n[\tau])(x_1^1 ,..., x_k^1):$$

բ) Ցույց տանք, որ Val $_{\bar{y}_0}$ (t) $\sqsubseteq$ Val $_{\bar{y}_1}$ (t): Այսինքն՝ ցանկացած $\bar{x}_0 =< x_1^0 ,..., x_k^0 >$, $x_j^0 \in \alpha_j$, j=1,...,k, համար.

$$\text{Val}_{\bar{y}_0} (t)(x_1^0 ,..., x_k^0) \sqsubseteq \text{Val}_{\bar{y}_1} (t)(x_1^0 ,..., x_k^0):$$

Քանի որ $\bar{y}_0 \sqsubseteq \bar{y}_1$, ուրեմն $\bar{x}_0 , \bar{y}'_0 \sqsubseteq \bar{x}_0 , \bar{y}'_1$, որտեղ $\bar{x}_0 , \bar{y}'_0 =< x_1^0 ,..., x_n^0 , y_{i_1}^0 ,..., y_{i_s}^0 >$, $\bar{x}_0 \; \bar{y}'_1 =< x_1^0 ,..., x_n^0 , y_{i_1}^1 ,..., y_{i_s}^1 >$: Այդ դեպքում ըստ τ թերմի արժեքի մոնոտոնության մասին ինդուկցիայի ենթադրության

$$\text{Val}_{\bar{y}_0} (\lambda x_1...x_n[\tau])(x_1^0 ,..., x_k^0)=\text{Val}_{\bar{x}_0 , \bar{y}'_0} (\tau) \sqsubseteq \text{Val}_{\bar{x}_0 , \bar{y}'_1} (\tau)=\text{Val}_{\bar{y}_1} (\lambda x_1...x_n[\tau])(x_1^0 ,..., x_k^0):$$

Օրինակ 16: Դիցուք M=N $\cup$ {$\perp$} և 2,3,5 $\in$ M,+$\in$ [$M^2\rightarrow$M], x, y $\in V_M$, F $\in V_{[M^2\rightarrow M]}$: Դիտարկենք λx[F(x,y)](2) թերմը:

FV(λx[F(x,y)](2))={y, F} $\subset$ {x, y, F}: Դիցուք x, y, F փոփոխականները ընդունել են հետևյալ արժեքները՝ <3, 5, +>: Այդ դեպքում

$\text{Val}_{<3,5,+>}$(λx[F(x,y)](2))=(ըստ թերմի արժեքի սահմանման 3. կետի)

= $\text{Val}_{<3,5,+>}$(λx[F(x,y)])($\text{Val}_{<3,5,+>}$(2))=(ըստ 1. կետի)

= $\text{Val}_{<3,5,+>}$(λx[F(x,y)])(2)=(ըստ 4. կետի)

= $\text{Val}_{<2,5,+>}$(F(x,y))=(ըստ 3. կետի)

= $\text{Val}_{<2,5,+>}$(F)($\text{Val}_{<2,5,+>}$(x), $\text{Val}_{<2,5,+>}$(y))=(ըստ 2. կետի)=+(2,5)=5:

1.9. Հավասարումների համակարգեր

Դիտարկենք հավասարումների հետևյալ P համակարգը.

$$\begin{cases} F_1=t_1 \\ \dots \\ F_n=t_n \end{cases} \qquad (1)$$

որտեղ $F_i \in V_{\alpha_i}$, $i \neq j \Rightarrow F_i \neq F_j$, $t_i \in \Lambda_{\alpha_i}$, $FV(t_i) \subset \{F_1,...,F_n\}$, $\alpha_i \in$ Types, $i, j=1,...,n$, $n \geq 1$:

Դիտարկենք $\Psi_P : \alpha_1\times...\times\alpha_n \rightarrow \alpha_1\times...\times\alpha_n$ արտապատկերումը, որը սահմանվում է հետևյալ կերպ՝ ցանկացած $\overline{g}$ =<g_1, ..., g_n> համար, որտեղ $g_i \in \alpha_i$, i=1, ..., n,

$$\Psi_P(\overline{g})=<Val_{\overline{g}}(t_1), ..., Val_{\overline{g}}(t_n)>:$$

Ψ_P-ն կանվանենք P համակարգին համապատասխանող արտապատկերում:

Սահմանում: Կասենք, որ $\overline{g} \in \alpha_1\times...\times\alpha_n$-ը P համակարգի լուծում է, եթե $\Psi_P(\overline{g})=\overline{g}$: Այսինքն՝

$$<Val_{\overline{g}}(t_1), ..., Val_{\overline{g}}(t_n)>=< g_1, ..., g_n>:$$

Այսինքն՝

$$\begin{cases} g_1=Val_{\overline{g}}(t_1) \\ \dots \\ g_n=Val_{\overline{g}}(t_n) \end{cases} \qquad (1)$$

որտեղ $g_i=Val_{\overline{g}}(t_i)$, i=1, ..., n, հավասարություններ են:

Օրինակ 17: Դիցուք $x \in V_M$, $F \in V_{[M\rightarrow M]}$: Դիտարկենք հետևյալ հավասարումը.

$$F=\lambda x[F(x)]$$

Այս հավասարման համար ցանկացած $f \in [M\rightarrow M]$ ֆունկցիա հանդիսանում է լուծում: $\Omega(x)=\perp$ ֆունկցիան հավասարման փոքրագույն լուծումն է:

Օրինակ 18: Դիցուք $M=N \cup \{\perp\}$, $x \in V_M$, $F \in V_{[M\rightarrow M]}$: Դիտարկենք հետևյալ հավասարումը.

$$F=\lambda x[\text{if } x=0 \text{ then } 1 \text{ else } F(x-1)*x]$$

Այս հավասարման միակ լուծում է հանդիսանում $! \in [M\rightarrow M]$ արտապատկերումը:

Օրինակ 19: Դիցուք $M=N \cup \{\perp\}$, $x \in V_M$, $F \in V_{[M\to M]}$: Դիտարկենք հետևյալ հավասարումը.

$$F=\lambda x[\text{if } x=0 \text{ then } 1 \text{ else } (\text{if } x=1 \text{ then } F(3) \text{ else } F(x-2))]$$

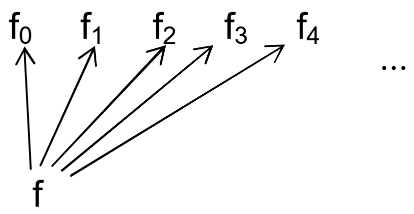
Այս հավասարման համար լուծում են հանդիսանում հետևյալ ֆունկցիաները.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } x\text{-ը զույգ թիվ է,} \\ \perp, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } x\text{-ը զույգ թիվ է,} \\ i, & \text{եթե } x\text{-ը կենտ թիվ է,} \\ \perp, & \text{եթե } x=\perp \end{cases}$$

$i=0, \ldots, n$:

f-ը հանդիսանում է փոքրագույն լուծում:



Գրենք այս հավասարումը որպես Lisp ծրագիր:

```
(defun F () #'(lambda (x)
                 (if (= x 0) 1
                     (if (= x 1) (funcall (F) 3)
                         (funcall (F) (- x 2))))))
```

Դիմելով այս ծրագրին

```
(funcall (F) 10)
```

կստանանք

1

Դիմելով այս ծրագրին

```
(funcall (F) 3)
```

ոչ մի պատասխան չենք ստանա, քանի որ կունենանք անվերջ աշխատանք:

Թեորեմ (սեմանտիկայի մասին): (1) տեսքի ցանկացած P համակարգ ունի փոքրագույն լուծում:

Ապացույց: Դիցուք $\Psi_P : \alpha_1\times\ldots\times\alpha_n \to \alpha_1\times\ldots\times\alpha_n$ P համակարգին համապատասխանող արտապատկերումն է: Ըստ լրիվ բազմությունների դեկարտյան արտադրյալի լրիվության մասին թեորեմի $\alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n$ բազմությունը լրիվ բազմություն է:

Քանի որ P համակարգի լուծումները Ψ_P արտապատկերման անշարժ կետերն են, ապա բավական է ցույց տալ, որ Ψ_P արտապատկերումը ունի փոքրագույն անշարժ կետ:

Համոզվենք, որ Ψ_P արտապատկերումը մոնոտոն է:

Դիցուք $\bar{g}$, $\bar{h} \in \alpha_1 \times \ldots \times \alpha_n$ և $\bar{g} \sqsubseteq \bar{h}$:

$$\Psi_P(\bar{g}) = <Val_{\bar{g}}(t_1), \ldots, Val_{\bar{g}}(t_n)>$$

$$\Psi_P(\bar{h}) = <Val_{\bar{h}}(t_1), \ldots, Val_{\bar{h}}(t_n)>:$$

Ցանկացած i-ի համար, i=1,...,n, $Val_{\bar{g}}(t_i) \sqsubseteq Val_{\bar{h}}(t_i)$ ըստ թերմի արժեքի մոնոտոնության հատկության: Հետևաբար՝

$$\Psi_P(\bar{g}) = <Val_{\bar{g}}(t_1), \ldots, Val_{\bar{g}}(t_n)> \sqsubseteq <Val_{\bar{h}}(t_1), \ldots, Val_{\bar{h}}(t_n)> = \Psi_P(\bar{h}):$$

Քանի որ Ψ_P-ն մոնոտոն արտապատկերում է, ապա ըստ անշարժ կետի մասին Թեորեմի Ψ_P-ն ունի փոքրագույն անշարժ կետ: Հետևաբար՝ P համակարգը ունի փոքրագույն լուծում:

Թեորեմն ապացուցված է:

1.10. Ծրագրավորման ֆունկցիոնալ լեզուներ և համակարգեր

Սահմանում: Ֆունկցիոնալ լեզուն L=(M, C, X, T) քառյակն է, որտեղ.

M-ը որևէ ոչ դատարկ բազմություն է, $\perp \in M$ և ցանկացած $m \in M$ համար $m \sqsubseteq m$ և $\perp \sqsubseteq m$:

C-ն ցանկացած տիպի հաստատունների որևէ բազմություն է;

X-ը ցանկացած տիպերի փոփոխականների որևէ բազմություն է;

$T \subset \Lambda(C,X)$, որտեղ $\Lambda(C,X)$-ը թերմեր են, որոնք կառուցվում են օգտագործելով հաստատուններ և փոփոխականներ միայն C և X բազմություններից:

$\wp(L)$-ով նշանակենք (1) տեսքի հավասարումների համակարգերի բազմությունը, որտեղ $F_i \in X$, $t_i \in T$, i=1,...,n, $\alpha_1=[M^k \to M]$, $k \geq 1$:

Սահմանում: Դիցուք $P \in \wp(L)$ և $<f_1, ..., f_n>$-ը P-ի փոքրագույն լուծումն է: Այդ դեպքում $f_1 \in [M^k \to M]$ ֆունկցիան կանվանենք P համակարգի փոքրագույն լուծման գլխավոր կոմպոնենտ և կնշանակենք f_P:

Կասենք, որ $f \in [M^k \to M]$, $k > 0$, ֆունկցիան ներկայացվում է L լեզվում, եթե գոյություն ունի $P \in \wp(L)$ համակարգ այնպիսին, որ $f=f_P$:

Սահմանում: L ֆունկցիոնալ լեզուն կանվանենք ծրագրավորման ֆունկցիոնալ լեզու, եթե գոյություն ունի U ալգորիթմ, որը մուտքում ստանալով ցանկացած $P \in \wp(L)$ համակարգ, որտեղ $f_P \in [M^k \to M]$, $k > 0$ և $\overline{m} \in M^k$ կանգ է առնում $f_P(\overline{m})$ պատասխանով, եթե $f_P(\overline{m}) \neq \perp$ և աշխատում է անվերջ կամ կանգ է առնում $\perp$ պատասխանով, եթե $f_P(\overline{m})=\perp$: Այդ դեպքում $P \in \wp(L)$ համակարգը կանվանենք ծրագիր L լեզվում, f_P-ն՝ P ծրագրի սեմանտիկա, իսկ U-ն՝ L լեզվի լրիվ ինտերպրետատոր:

Սահմանում: Դիցուք L ծրագրավորման ֆունկցիոնալ լեզու է: I ալգորիթմը կանվանենք L լեզվի ինտերպրետատոր, եթե ցանկացած $P \in \wp(L)$ ծրագրի, որտեղ $f_P \in [M^k \to M]$, և $\overline{m} \in M^k$ համար այն կամ կանգ է առնում $f_P(\overline{m})$ պատասխանով, կամ աշխատում է անվերջ: Ծրագրավորման ֆունկցիոնալ L լեզուն ֆիքսած I ինտերպրետատորի հետ միասին՝ (L, I) զույգը, կոչվում է ծրագրավորման ֆունկցիոնալ P համակարգ:

ՄԱՍ2. ԻԼՅՈՒՍՏՐԱՑԻԱ

2.1. Յերբրան-Գոդել-Կլինիի ֆունկցիոնալ լեզու

Նկարագրենք (M,C,X,T) քառյակը:

$M=N \cup \{\perp\}$, որտեղ $N=\{0,1,2,3, \ldots\}$

$X=\{F^{(k)} \mid F^{(k)} \in V_{[M^k \to M]}, k \geq 1\}$

Այսինքն՝ յուրաքանչյուր $[M^k \to M]$ տիպի համար ունենք մեկ փոփոխական:

$C=M \cup C_1 \cup C_2$, որտեղ C_1-ը առաջին կարգի հաստատուններ են, իսկ C_2-ը՝ երկրորդ կարգի: Նկարագրենք դրանք:

$C_1=\{o, s\} \cup \{I_i^k \mid k \geq 1, 1 \leq i \leq k\}$, որտեղ.

$o, s \in [M \to M]$ և ցանկացած $m \in M$ համար

$$o(m) = \begin{cases} 0, & \text{եթե } m \in N \\ \perp, & \text{եթե } m=\perp \end{cases}$$

$$s(m) = \begin{cases} m+1, & \text{եթե } m \in N \\ \perp, & \text{եթե } m=\perp \end{cases}$$

$I_i^k \in [M^k \to M]$, $k \geq 1, 1 \leq i \leq k$, և ցանկացած $m_1, \ldots, m_k \in M$ համար

$$I_i^k(m_1,\ldots,m_k) = \begin{cases} m_i, & \text{եթե } m_1,\ldots,m_k \in N \\ \perp, & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$$

$C_2=\{S_k^n \mid n, k \geq 1\} \cup \{R_k \mid k \geq 1\} \cup \{\mathcal{M}_k \mid k \geq 1\}$

Նկարագրենք $\{S_k^n \mid n, k \geq 1\}$ բազմությունը, որտեղ S_k^n-ն $(n, k \geq 1)$ կանոնական տեղադրման գործողություն է:

$S_k^n \in [[M^n \to M] \times [M^k \to M]^n \to [M^k \to M]]$ և ցանկացած $h \in [M^n \to M]$, $g_1,\ldots,g_n \in [M^k \to M]$ համար $S_k^n(h,g_1,\ldots,g_n)=f \in [M^k \to M]$, որը որոշվում է հետևյալ կերպ ցանկացած $m_1,\ldots,m_k \in M$ համար

$$f(m_1,\ldots,m_k)=h(g_1(m_1,\ldots,m_k),\ldots,g_n(m_1,\ldots,m_k)):$$

Օրինակ 1. Դիտարկենք C_0^2 ֆունկցիան, որը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

ցանկացած $m_1, m_2 \in M$ համար

$$C_0^2(m_1,m_2) = \begin{cases} 0, & \text{եթե } m_1,\ m_2 \in N \\ \perp, & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$$

Դեշտ է համոզվել, որ C_0^2 ֆունկցիան ստացվում է o և I_1^2 ֆունկցիաներից կանոնական տեղադրման գործողության միջոցով.

$$C_0^2(m_1,m_2)=o(I_1^2(m_1,m_2))$$

այսինքն՝

$$Val(S_2^1(o,I_1^2))=C_0^2$$

և C_0^2 հանդիսանում է հետևյալ հավասարման լուծում.

$$F^{(2)}=S_2^1(o,I_1^2)$$

Օրինակ 2. Դիտարկենք C_1^2 ֆունկցիան, որը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

ցանկացած $m_1,\ m_2 \in M$ համար

$$C_1^2(m_1,m_2) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } m_1,\ m_2 \in N \\ \perp, & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$$

Դեշտ է համոզվել, որ C_1^2 ֆունկցիան ստացվում է s, o և I_1^2 ֆունկցիաներից հետևյալ կերպ.

$$C_1^2(m_1,m_2)=s(o(I_1^2(m_1,m_2)))=s(C_0^2(m_1,m_2))$$

այսինքն՝

$$Val(S_2^1(s,S_2^1(o,I_1^2)))=C_1^2$$

և C_1^2 հանդիսանում է հետևյալ հավասարման լուծում.

$$F^{(2)}=S_2^1(s,S_2^1(o,I_1^2))$$

Նկարագրենք $\{R_k \mid k \geq 1\}$ բազմությունը, որտեղ R_k-ն ($k \geq 1$) պարզագույն անդրադարձման գործողությունն է:

Նախ նկարագրենք R_1-ը.

$R_1 \in [M\times[M^2\to M]\to[M\to M]]$ և ցանկացած $m_0 \in M$, $h \in [M^2\to M]$ համար $R_1(m_0,h)=f \in [M\to M]$, որը որոշվում է հետևյալ կերպ.

$$\begin{cases} f(\perp)=\perp, \\ f(0)=m_0 \\ f(n+1)=h(n,f(n)) \qquad , \text{որտեղ } n \in N \end{cases}$$

Օրինակ 3. Դիտարկենք sg ֆունկցիան, որը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

ցանկացած $m \in M$ համար

$$sg(m) = \begin{cases} 0, & \text{եթե } m=0 \\ 1, & \text{եթե } m \neq \perp \text{ և } m \neq 0 \\ \perp, & \text{եթե } m=\perp \end{cases}$$

Նկատենք, որ

$$\begin{cases} sg(\perp)=\perp, \\ sg(0)=0=m_0 \\ sg(n+1)=1=h(n,f(n)) \qquad , \text{որտեղ } n \in N \end{cases}$$

և $h=C_1^2$:

Այսինքն՝ sg ֆունկցիան ստացվում է 0 հաստատունից և C_1^2 ֆունկցիայից պարզագույն անդրադարձման գործողության միջոցով.

$$Val(R_1(0,\ S_2^1(s, S_2^1(o, I_1^2))))=sg$$

և sg հանդիսանում է հետևյալ հավասարման լուծում.

$$F^{(1)}=R_1(0,\ S_2^1(s, S_2^1(o, I_1^2)))$$

Նկարագրենք R_k, $k > 1$:

$R_k \in [[M^{k-1}\to M]\times[M^{k+1}\to M]\to[M^k\to M]]$ և ցանկացած $g \in [M^{k-1}\to M]$, $h \in [M^{k+1}\to M]$ ֆունկցիաների համար $R_1(g,h)=f \in [M^k\to M]$, որը որոշվում է հետևյալ կերպ. ցանկացած $m_1,...,m_k \in M$ համար

$$\begin{cases} f(m_1, ..., m_{k-1}, \perp)=\perp, \\ f(m_1, ..., m_{k-1}, 0)=g(m_1,...,m_{k-1}), \\ f(m_1, ..., m_{k-1}, n+1)=h(m_1,...,m_{k-1},n,f(m_1,...,m_{k-1},n)), \qquad \text{որտեղ } n \in N \end{cases}$$

Օրինակ 4. Դիտարկենք$+\in [M^2\to M]$ ֆունկցիան, որը սահմանվում է հետևյալ կերպ. ցանկացած m_1, $m_2 \in M$ համար m_1+m_2 հանդիսանում է m_1, m_2 թվերի գումարը, եթե m_1, $m_2 \in N$, և $\perp$՝ մնացած դեպքերում:

Նկատենք, որ ցանկացած $m \in M$ համար

$$\begin{cases} m+\perp=\perp, \\ m+0=m=I_1^1(m) \\ m+(n+1)=(m+n)+1=h(m,n,m+n) \end{cases} \quad \text{, որտեղ } n \in N$$

և $h \in [M^3 \to M]$ ֆունկցիան սահմանվում է հետևյալ կերպ.

ցանկացած m_1, m_2, $m_3 \in M$ համար.

$$h(m_1,m_1,m_3) = \begin{cases} m_3+1, & \text{եթե } m_1, m_2, m_3 \in N \\ \perp, & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$$

Նկատենք, որ h ֆունկցիան ստացվում է s և I_3^3 ֆունկցիաներից կանոնական տեղադրման գործողության միջոցով, այսինքն՝

$$Val(S_3^1(s, I_3^3))=h$$

Իսկ + ֆունկցիան ստացվում է I_1^1 և h ֆունկցիաներից պարզագույն անդրադարձման գործողության միջոցով, այսինքն՝

$$Val(R_2(I_1^1,\ S_3^1(s, I_3^3)))=+$$

և + ֆունկցիան հանդիսանում է հետևյալ հավասարման լուծում.

$$F^{(2)}=R_2(I_1^1,\ S_3^1(s, I_3^3))$$

Նկարագրենք $\{\mathcal{M}_k \mid k \geq 1\}$ բազմությունը, որտեղ $\mathcal{M}_k$ ($k \geq 1$) մինիմիզացիայի գործողությունն է:

$\mathcal{M}_k \in [[M^{k+1} \to M] \to [M^k \to M]]$ և ցանկացած $g \in [M^{k+1} \to M]$ համար $\mathcal{M}_k(g)=f \in [M^k \to M]$ և որոշվում է հետևյալ կերպ. ցանկացած $m_1,\ldots,m_k \in M$ համար

$$f(m_1,\ldots,m_k) = \begin{cases} n \in N, & \text{եթե } g(m_1,\ldots,m_k,n)=0 \text{ և } \forall z < n,\ g(m_1,\ldots,m_k,n) \neq 0 \text{ և } \neq \perp \\ \perp, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

Այսինքն՝

$$f(m_1,\ldots,m_k)=\mu_y[g(m_1,\ldots,m_k,y)=0]$$

Օրինակ 5. Դիտարկենք sg' ֆունկցիան, որը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

ցանկացած $m \in M$ համար

$$sg'(m) = \begin{cases} 0, & \text{եթե } m=0 \\ \perp, & \text{մնացաց դեպքերում} \end{cases}$$

Նկատենք, որ

$$sg'(m)=\mu_y[m+y=0]$$

Այսինքն՝ sg' ֆունկցիան ստացվում է+ֆունկցիայից մինիմիզացիայի գործողության միջոցով, այսինքն՝

$$Val(\mathcal{M}_1(R_2(I_1^1,\ S_3^1(s,I_3^3))))=sg'$$

և sg' հանդիսանում է հետևյալ հավասարման լուծում.

$$F^{(1)}=\mathcal{M}_1(R_2(I_1^1,\ S_3^1(s,I_3^3)))$$

$T \subset \Lambda(C) \subset \Lambda(C,X)$, որտեղ T-ն այն թերմերի բազմություն է, որոնք կառուցվում եմ օգտագործելով միայն հաստատուններ C-ից, ընդ որում M բազմությանը պատկանող հաստատունները հանդիսանում են միայն R_1 ֆունկցիոնալի առաջին արգումենտ:

2.2. Բեկուսի FP լեզու

Նկարագրենք (M,C,X,T) քառյակը:

Նախ սահմանենք ատոմների A բազմությունը, որպես թվերի և իդենտիֆիկատորների բազմություն: Գոյություն ունեն ատոմներ, որոնք ունեն որոշակի իմաստ, օրինակ՝ true (տրամաբանական “ճիշտ” արժեք), false (տրամաբանական “սխալ” արժեք), nil (դատարկ ցուցակ):

M-ը անվանում ենք օբյեկտների բազմություն, որը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

1. Եթե $m \in A$, ապա $m \in M$;
2. $\perp \in M$;
3. Եթե $m_1,...,m_k \in M$ $(k \geq 0)$, ապա $(m_1 \ldots m_k) \in M$, և եթե որևէ i-ի համար $(1 \leq i \leq k)$, $m_i=\perp$, ապա $(m_1 \ldots m_k)=\perp$:
4. Ուրիշ օբյեկտներ չկան:

Եթե $(m_1 \ldots m_k) \in M$, $k \geq 0$, ապա $(m_1 \ldots m_k)$ կանվանենք ցուցակ, իսկ k-ն՝ նրա երկարություն: Ցուցակը, որի երկարությունը հավասար է 0-ի կանվանենք դատարկ ցուցակ, որը կնանակենք nil ատոմով:

Այժմ նկարագրենք C բազմությունը:

$C=M \cup C_1 \cup C_2$, որտեղ C_1-ը առաջին կարգի հաստատուններ են, իսկ C_2-ը՝ երկրորդ կարգի: Նկարագրենք դրանք:

$C_1=\{s_i \mid i \geq 1\} \cup \{$ id, tl, apndl, apndr, null, atom, eq, +,-, /,*, and, or, not, ...$\}$

Նշենք, որ եթե $f \in C_1$, ապա $f \in [M \to M]$: Սահմանենք դրանք ցանկացած $m \in M$ համար.

Selector functions (ընտրման ֆունկցիաներ)

$$s_i(m) = \begin{cases} m_i, & \text{եթե } m=(m_1 \ldots m_k),\ 1 \le i \le k,\ k \ge 1 \\ \perp, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

Identity (նույնություն)

$$id(m)=m$$

Tail (պոչ)

$$tl(m) = \begin{cases} nil, & \text{եթե } m=(m_1) \\ (m_2 \ldots m_k), & \text{եթե } m=(m_1 \ldots m_k),\ k > 1 \\ \perp, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

Append Left (կցել էլեմենտ ձախից)

$$apndl(m) = \begin{cases} (m_0\ m_1 \ldots m_k), & \text{եթե } m=(m_0\ (m_1 \ldots m_k)),\ k \ge 1 \\ (m_0), & \text{եթե } m=(m_0\ nil) \\ \perp, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

Append Right (կցել էլեմենտ աջից)

$$apndr(m) = \begin{cases} (m_1 \ldots m_k\ m_0), & \text{եթե } m=(m_0\ (m_1 \ldots m_k)),\ k \ge 1 \\ (m_0), & \text{եթե } m=(m_0\ nil) \\ \perp, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

Null (դատարկ)

$$null(m) = \begin{cases} true, & \text{եթե } m=nil \\ false, & \text{եթե } m \ne \perp \text{ և } m \ne nil \\ \perp, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

Atom (ատոմ)

$$atom\ (m) = \begin{cases} true, & \text{եթե } m \in A \\ false, & \text{եթե } m \notin A \text{ և } m \ne \perp \\ \perp, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

Equals (հավասար)

$$eq(m) = \begin{cases} true, & \text{եթե } m=(m_1\ m_2) \text{ և } m_1=m_2 \\ false, & \text{եթե } m=(m_1\ m_2) \text{ և } m_1 \neq m_2 \\ \perp, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

$$+(m) = \begin{cases} m_1+m_2, & \text{եթե } m=(m_1\ m_2) \text{ և } m_1, m_2\text{-ը թվեր են} \\ \perp, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

$$-(m) = \begin{cases} m_1-m_2, & \text{եթե } m=(m_1\ m_2) \text{ և } m_1, m_2\text{-ը թվեր են} \\ \perp, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

$$*(m) = \begin{cases} m_1*m_2, & \text{եթե } m=(m_1\ m_2) \text{ և } m_1, m_2\text{-ը թվեր են} \\ \perp, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

$$and(m) = \begin{cases} m_1\ \&\ m_2, & \text{եթե } m=(m_1\ m_2) \text{ և } m_1, m_2 \in \{true, false\} \\ \perp, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

$$or(m) = \begin{cases} m_1 \vee m_2, & \text{եթե } m=(m_1\ m_2) \text{ և } m_1, m_2 \in \{true, false\} \\ \perp, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

$$not(m) = \begin{cases} true, & \text{եթե } m=false \\ false, & \text{եթե } m=true \\ \perp, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

Նկարագրենք C_2={comp, constr, const, cond, ...} բազմությունը, որի էլեմենտները ֆունկցիոնալներ են և սահմանվում են հետևյալ կերպ.

Composition (կոմպոզիցիա)

comp $\in$ $[[M \to M]^2 \to [M \to M]]$ և ցանկացած g, h $\in$ $[M \to M]$ ֆունկցիաների համար comp(g, h)=f $\in$ $[M \to M]$, որը որոշվում է հետևյալ կերպ. ցանկացած m $\in$ M

$$f(m)=g(h(m))$$

Construction (կառուցում)

constr $\in$ $[[M \to M]^2 \to [M \to M]]$ և ցանկացած g, h $\in$ $[M \to M]$ ֆունկցիաների համար constr(g, h)=f $\in$ $[M \to M]$, որը որոշվում է հետևյալ կերպ. ցանկացած m $\in$ M

$$f(m)=(g(m)\ h(m))$$

Constant (հաստատուն)

const $\in$ [M$\to$[M$\to$M]] և ցանկացած $m_0 \in$ M հաստատունի համար const (m_0)=f $\in$ [M$\to$M], որը որոշվում է հետևյալ կերպ. ցանկացած m $\in$ M

$$f(m) = \begin{cases} m_0, & \text{եթե } m \neq \perp \\ \perp, & \text{եթե } m=\perp \end{cases}$$

Condision (պայման)

cond $\in$ [[M$\to$M]$^3\to$[M$\to$M]] և ցանկացած p, g, h $\in$ [M$\to$M] ֆունկցիաների համար cond (p, g, h)=f$\in$[M$\to$M], որը որոշվում է հետևյալ կերպ. ցանկացած m $\in$ M

$$f(m) = \begin{cases} g(m), & \text{եթե } p(m)=true \\ h(m), & \text{եթե } p(m)=fulse \\ \perp, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

$X=\{F_i \mid F_i \in V_{[M\to M]}, i \geq 1\}$

T $\subset \Lambda$(C, X), որտեղ T-ն այն թերմերի բազմությունն է, որոնցում λ չկա, այսինքն՝ թերմի սահմանման 4-րդ կետը չի օգտագործվում, իսկ M-ից օգտագործվող օբյեկտները հանդիսանում են միայն const ֆունկցիոնալի արգումենտ:

Օրինակ 6: Դիտարկենք s $\in$ [M$\to$M] ֆունկցիան, որը սահմանվում է հետևյալ կերպ. ցանկացած m $\in$ M համար

$$s(m) = \begin{cases} m+1, & \text{եթե m-ը թիվ է} \\ \perp, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

Այն հանդիսանում է հետևյալ հավասարման լուծում.

F_1=comp(+, constr(id, const(1)))

Օրինակ 7: Դիտարկենք ! $\in$ [M$\to$M] ֆակտորիալ ֆունկցիան, որը սահմանվում է հետևյալ կերպ. ցանկացած m $\in$ M համար

$$!(m) = \begin{cases} m!, & \text{եթե m-ը բնական թիվ է} \\ \perp, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

Այն հանդիսանում է հետևյալ հավասարումների համակարգի լուծման գլխավոր ֆունկցիա.

F_1=cond(comp(eq, constr(id,const(0))), const(1), F_2)

F_2=comp(*, constr(id, comp(F_1, comp(-, constr(id, const(1))))))

Օրինակ 8: Դիտարկենք atoms $\in$ [M$\rightarrow$M] ֆունկցիան, որը սահմանվում է հետևյալ կերպ. ցանկացած m $\in$ M համար

$$\text{atoms}(m) = \begin{cases} n, & \text{եթե m-ը ցուցակ է և n-ը m ցուցակում ատոմների քանակն է} \\ \perp, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

Այն հանդիսանում է հետևյալ հավասարումների համակարգի լուծում.

F_1=cond(null, const(0), cond(comp(atom,s_1), F_2, F_3))

F_2=comp(+, constr(const(1), comp(F_1, tl)))

F_3=comp(+, constr(comp(F_1,s_1), comp(F_1, tl)))

Օրինակ 9: Դիտարկենք reverse $\in$ [M$\rightarrow$M] ֆունկցիան, որը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

ցանկացած m $\in$ M համար

$$\text{reverse}(m) = \begin{cases} (m_k \ldots m_1), & \text{եթե } m=(m_1 \ldots m_k),\ k>0 \\ \text{nil}, & \text{եթե } m=\text{nil} \\ \perp, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

Այն հանդիսանում է հետևյալ հավասարման լուծում.

F_1=cond(null, const(nil), comp(apndr, constr(s_1, comp(F_1, tl))))

2.3. Ծրագրավորման Lisp լեզու

Ծրագրավորման Lisp լեզուն հանդիսանում է ոչ տիպիզացված ֆունկցիոնալ լեզու: Սակայն մենք կդիտարկենք այն տիպիզացված տեսանկյունից, ինչի կբերի ծրագրերի բազմության փոքրացմանը:

Նկարագրենք (M,C,X,T) քառյակը:

M բազմիթյունը իրենից ներկայացնում է s-արտահայտություններ, որոնք սահմանվում են ԲեկուսիFP համակարգի օբյեկտներին համանման:

C=M $\cup$ C_1, որտեղ C_1={car,cdr,cons,null,atom,eq,if,+,-,/,*,=,>,<,$\geq$,$\leq$,...}

X={F_i^α | F_i^α $\in$ V_α, α $\in$ Types, i $\geq$ 1} փոփոխականների բազմություն է, այսինքն՝ յուրաքանչյուր տիպի համար ունենք փոփոխականների հաշվելի բազմություն:

T=Λ(C, X)

Բերենք մի քանի օրինակներ, որոնք կգրենք համաձայն Lisp լեզվի քերականության:

Օրինակ 10: Դիտարկենք Apr ֆունկցիան, որը L ցուցակին աջից կցում է x էլեմենտը:

(defun Apr(x L) (if (null L) (cons x nil) (cons (car L) (Apr x (cdr L)))))

Օրինակ 11: Դիտարկենք Reverse ֆունկցիան, որը շրջում է L ցուցակը:

(defun Reverse(L) (if (null L) nil (Apr (car L) (Reverse (cdr L)))))

Օրինակ 12: Դիտարկենք Is_In ֆունկցիան, որը ստուգում է L ցուցակում x էլեմենտի առկայությունը, ընդ որում ենթադրվում է, որ L ցուցակը կարող է նաև լինել ոչ գծային:

```
(defun Is_In(x L) (if (null L) nil
                        (if (atom (car L)) (if (eq x (car L)) t (Is_In x (cdr L)))
                              (or (Is_In x (car L)) (Is_In x (cdr L))))))
```

Օրինակ 13: Դիտարկենք Union ֆունկցիան, որը ստուգում է միավորում է L_1 և L_2 բազմությունները: Բազմություն է համարվում գծային ցուցակը, որի էլեմենտները չեն կրկնվում:

```
(defun Union(L1 L2) (if (null L1) L2
                              (if (Is_In (car L1) L2) (Union (cdr L1) L2))
                                    (cons (car L1) (Union (cdr L1) L2))))
```

Օրինակ 14: Դիտարկենք Set ֆունկցիան, որը L ցուցակից ստանում է նրա ատոմների բազմությունը:

```
(defun Set(L) (if (null L) nil
                        (if (atom (car L))
                              (if (Is_In (car L) (cdr L)) (Set (cdr L))
                                    (cons (car L) (Set (cdr L))))
                              (Union (Set (car L)) (Set (cdr L))))))
```

ՄԱՍ3. ԻՆՏԵՐՊՐԵՏԱՑԻԱ

3.1. Անընդհատ արտապատկերումներ

Սահմանում: Դիցուք A և B լրիվ բազմություններ են և $f : A \to B$: f արտապատկերումը կանվանենք անընդհատ, եթե A բազմության ցանկացած D ոչ դատարկ, գծորեն կարգավորված ենթաբազմության համար

$$f(\sup D)=\sup f(D),$$

որտեղ $f(D)=\{f(d) \mid d \in D\}$:

Թեորեմ (Անընդհատ արտապատկերման մոնոտոնության մասին): Դիցուք A և B լրիվ բազմություններ են, $f : A \to B$ և f-ը անընդհատ արտապատկերում է: Այդ դեպքում f-ը մոնոտոն արտապատկերում է:

Ապացույց. Պետք է ցույց տանք, որ եթե $a_1, a_2 \in A$ և $a_1 \sqsubseteq a_2$, ապա $f(a_1) \sqsubseteq f(a_2)$:

Դիտարկենք $D=\{a_1, a_2\}$ բազմությունը: Քանի որ $a_1 \sqsubseteq a_2$, ուրեմն D-ն A բազմության ոչ դատարկ գծորեն կարգավորված ենթաբազմություն է: $\sup D=a_2$: Ըստ անընդհատության սահմանման

$$f(\sup D)=\sup f(D):$$

Հետևաբար՝

$$f(a_2)=f(\sup D)=\sup f(D)=\sup \{f(a_1), f(a_2)\}:$$

Ըստ ճշգրիտ վերին սահմանի սահմանման

$$f(a_1) \sqsubseteq f(a_2):$$

Թեորեմն ապացուցված է:

3.2. Առաջին կարգի հաստատունների անընդհատությունը

Դիցուք M-ը որևէ ոչ դատարկ բազմություն է, $\perp \in M$ և ցանկացած $m \in M$ համար $m \sqsubseteq m$ և $\perp \sqsubseteq m$:

Թեորեմ (առաջին կարգի հաստատունների անընդհատության մասին): Դիցուք $f\in[M^k\to M]$ $(k\geq1)$: Այդ դեպքում f-ը անընդհատ արտապատկերում է:

Ապացույց. Դիցուք $D \subset M^k$, $D \neq \varnothing$ և D գծորեն կարգավորված բազմություն է: Այդ դեպքում D-ն վերջավոր բազմություն է: Համոզվենք դրանում:

Դիցուք

$$d=<m_1,...,m_k> \in D$$

և $m_1,...,m_k$-երից r հատը ($0 \le r \le k$) հավասար են $\perp$: Նկատենք, որ d-ից մեծ էլեմենտ D բազմությունից գոյություն ունի ամենաշատը r հատ, իսկ d-ից փոքր էլեմենտ՝ ամենաշատը k-r հատ: Այսինքն՝ D բազմության հզորությունը ամենաշատը կարող է լինել k+1:

Դիցուք $D=\{d_1,...,d_s\}$ ($s \ge 1$), որտեղ ցանկացած i-ի համար ($1 \le i \le s$), $d_i \sqsubseteq d_{i+1}$: Այդ դեպքում

$$sup(D)=d_s \text{ և } f(supD)=f(d_s):$$

Մյուս կողմից քանի որ f-ը մոնոտոն արտապատկերում է և ցանկացած i-ի համար ($1\le i < s$), $d_i \sqsubseteq d_{i+1}$, ուրեմն ցանկացած i-ի համար ($1 \le i < s$), $f(d_i) \sqsubseteq f(d_{i+1})$: Հետևաբար՝

$$sup\ f(D)=sup\{f(d_1),...,f(d_s)\}=f(d_s):$$

Այսինքն՝

$$f(supD)=sup\ f(D):$$

Թեորեմն ապացուցված է:

3.3. Երկրորդ կարգի հաստատունների մասին

Թեորեմ: Գոյություն ունի θ, $\theta \in \alpha$, $\alpha \in$ Types, ord $(\alpha)=2$ և θ անընդհատ չէ:

Ապացույց. Դիտարկենք $M=N \cup \{\perp\}$: Սահմանենք $\theta : [M\to M] \to M$, հետևյալ կերպ. $\forall f \in [M\to M]$

$$\theta(f) = \begin{cases} 0, & \text{եթե } \{m \mid f(m) \ne \perp\} \text{ բազմությունը անվերջ է} \\ \perp, & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$$

Ցույց տանք, որ θ-ն մոնոտոն արտապատկերում է: Նշանակենք $\{m \mid f(m) \ne \perp\}$ բազմությունը Arg(f)-ով:

Դիցուք $h_1, h_2 \in [M\to M]$ և $h_1 \sqsubseteq h_2$: Հնարավոր են հետևյալ դեպքերը.

ա) $Arg(h_1)$ և $Arg(h_2)$-ը վերջավոր են: Այդ դեպքում

$$\theta(h_1)=\perp \sqsubseteq \perp=\theta(h_2):$$

բ) $Arg(h_1)$-ը վերջավոր է, $Arg(h_2)$-ը՝ անվերջ: Այդ դեպքում

$$\theta(h_1)=\perp \sqsubseteq 0=\theta(h_2):$$

գ) $Arg(h_1)$ և $Arg(h_2)$ անվերջ են: Այդ դեպքում

$$\theta(h_1)=0 \sqsubseteq 0=\theta(h_2):$$

Իսկ $Arg(h_2)$-ը վերջավոր և $Arg(h_1)$-ը անվերջ դեպքը հնարավոր չէ, քանի որ $h_1 \sqsubseteq h_2$:

Այժմ ցույց տանք, որ θ-ն անընդհատ չէ: Դիտարկենք $[M \to M]$ բազմության ոչ դատարկ D գծորեն կարգավորված հետևյալ ենթաբազմությունը.

$$D=\{g_i \mid i \geq 0\}$$

որտեղ ցանկացած $i \geq 0$ համար $g_i \in [M \to M]$, և որոշվում է հետևյալ կերպ. $\forall\, m \in M$

$$g_i(m) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } m \neq \perp \text{ և } m \leq i \\ \perp, & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$$

Դեշտ է համոզվել, որ ցանկացած $i \geq 1$ համար $g_i \sqsubseteq g_{i+1}$: Հետևաբար D-ն ոչ դատարկ գծորեն կարգավորված բազմություն է:

Sup(D)=g, որտեղ $g \in [M \to M]$ և $\forall\, m \in M$

$$g(m) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } m \neq \perp \\ \perp, & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$$

Ցույց տանք, որ $\theta(\sup D) \neq \sup \theta(D)$:

$$\theta(\sup D)=\theta(g)=0$$

$$\sup \theta(D)=\sup \{\theta(g_i) \mid i \geq 0\}=\sup \{\perp\}=\perp$$

Թեորեմն ապացուցված է:

3.4. Թեորեմ մոնոտոն արտապատկերման անշարժ կետի մասին

Թեորեմ: Դիցուք A-ն լրիվ բազմություն է, $f : A \to A$, f-ը մոնոտոն արտապատկերում է և a-ն նրա որևէ անշարժ կետ է, այսինքն՝ $f(a)= a$: Այդ դեպքում

$$\sup\{f^k(\perp) \mid k \geq 0\} \sqsubseteq a,$$

որտեղ $\perp$-ը A բազմության փոքրագույն էլեմենտն է, $f^0(\perp)=\perp$; $f^k(\perp)=f(f^{k-1}(\perp))$ $(k \geq 1)$:

Ապացույց: Ցույց տանք, որ $D=\{f^k(\perp) \mid k \geq 0\}$ բազմությունը գծորեն կարգավորված է: Դրա համար ապացուցենք, որ ցանկացած $k \geq 0$ համար $f^k(\perp) \sqsubseteq f^{k+1}(\perp)$:

$$f^0(\perp)=\perp$$

$$f^1(\perp)=f(f^0(\perp))=f(\perp)$$

Քանի որ $\perp$-ը A բազմության փոքրագույն էլեմենտն է, ուրեմն $\perp \sqsubseteq f(\perp)$: Այսինքն՝

$$f^0(\perp) \sqsubseteq f^1(\perp)$$

Քանի որ f-ը մոնոտոն արտապատկերում է, ապա

$$f(f^0(\perp)) \sqsubseteq f(f^1(\perp)):$$

Ունենք

$$f^1(\perp)=f(f^0(\perp)) \text{ և } f^2(\perp)=f(f^1(\perp))$$

Հետևաբար

$$f^1(\perp) \sqsubseteq f^2(\perp):$$

Եվ այսպես շարունակելով կստանանք, որ ցանկացած $k \geq 0$ համար

$$f^{k+1}(\perp) \sqsubseteq f^k(\perp):$$

Այսինքն՝ D բազմությունը գծորեն կարգավորված բազմություն է և քանի որ հանդիսանում է A լրիվ բազմության ենթաբազմություն, ուրեմն sup D-ն գոյություն ունի:

Այժմ ցույց տանք, որ $\sup\{f^k(\perp) \mid k \geq 0\} \sqsubseteq a$: Դրա համար բավական է ցույց տալ, որ a-ն հանդիսանում է $\{f^k(\perp) \mid k \geq 0\}$ բազմության համար վերին սահման: Այդ դեպքում ըստ ճշգրիտ վերին սահմանի սահմանման $\sup\{f^k(\perp) \mid k \geq 0\} \sqsubseteq a$:

Ցույց տանք, որ ցանկացած $k \geq 0$, $f^k(\perp) \sqsubseteq a$: Քանի որ $a \in A$ և $f^0(\perp)=\perp$, ուրեմն

$$f^0(\perp) \sqsubseteq a:$$

Քանի որ f-ը մոնոտոն արտապատկերում է, ապա

$$f^1(\perp)=f(f^0(\perp)) \sqsubseteq f(a)=a$$

$$f^2(\perp)=f(f^1(\perp)) \sqsubseteq f(a)=a$$

...

Եվ այդպես շարունակ:

Թեորեմն ապացուցված է:

3.5. Թեորեմ անընդհատ արտապատկերման փոքրագույն անշարժ կետի մասին

Թեորեմ: Դիցուք A-ն լրիվ բազմություն է, $f : A \rightarrow A$ և f-ը անընդհատ արտապատկերում է: Այդ դեպքում $\sup\{f^k(\perp) \mid k \geq 0\}$, որտեղ $\perp$-ը A բազմության փոքրագույն էլեմենտն է, $f^0(\perp)=\perp$; $f^k(\perp)=f(f^{k-1}(\perp))$, $k \geq 1$, f արտապատկերման փոքրագույն անշարժ կետն է:

Ապացույց. Նախորդ թեորեմի ապացույցի ընթացքում համոզվել ենք, որ $\{f^k(\perp) \mid k \geq 0\}$ բազմությունը հանդիսանում է A բազմության ոչ դատարկ, գծորեն կարգավորված ենթաբազմություն: Այդ դեպքում ըստ անընդհատության սահմանման.

$$f(\sup\{f^k(\perp) \mid k \geq 0\})=\sup\{f^{k+1}(\perp) \mid k \geq 0\}=\sup\{f^k(\perp) \mid k \geq 0\}:$$

Վերջին հավասարությունը ճիշտ է, քանի որ

$$\{f^k(\perp) \mid k \geq 0\} \setminus \{f^{k+1}(\perp) \mid k \geq 0\}=\{\perp\}$$

Թեորեմն ապացուցված է:

Դիտարկենք հետևյալ օրինակը

Դիցուք $M=N \cup \{\perp\}$, $x \in V_M$, $F_1, F_2 \in V_{[M\to M]}$, $\theta \in [[M\to M] \to M]$ և սահմանվում է հետևյալ կերպ. $\forall f \in [M\to M]$

$$\theta(f) = \begin{cases} 0, & \text{եթե } \{m \mid f(m) \neq \perp\} \text{ բազմությունը անվերջ է} \\ \perp, & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$$

Դիտարկենք հավասարումների հետևյալ P համակարգը

$$P \quad \begin{cases} F_1=\lambda x[\theta(F_2)] \\ F_2=\lambda x[\text{if } x=0 \text{ then } 1 \text{ else } F_2(x-1)] \end{cases}$$

P համակարգի փոքրագույն լուծումը $<h, g>$ զույգն է, որտեղ

$h \in [M\to M]$ և $\forall m \in M$, $h(m)=\theta(g)=0$

$g \in [M\to M]$ և $\forall m \in M$

$$g(m) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } m \neq \perp \\ \perp, & \text{եթե } m=\perp \end{cases}$$

Դիցուք Ψ_P : $[M\to M]\times[M\to M] \to [M\to M]\times[M\to M]$ P համակարգին համապատասխանող արտապատկերումն է և $\sup\{\Psi_P^k(\overline{\Omega}) \mid k \geq 0\}=<h', g'>$, որտեղ $\overline{\Omega}$-ն $[M\to M]x[M\to M]$ բազմության փոքրագույն էլեմենտն է: Ըստ մոնոտոն արտապատկերման անշարժ կետի մասին թեորեմի

$$<h', g'> \sqsubseteq <h, g>:$$

Ցույց տանք, որ $h' \neq h$, $g'=g$:

Դիցուք $\overline{\Omega}$=<Ω,Ω>, որտեղ ցանկացած m ∈ M համար Ω(m)=⊥:

$\Psi_P^0(\overline{\Omega})=\overline{\Omega}=<\Omega, \Omega>$

$\Psi_P^1(\overline{\Omega})=\Psi_P(\Psi_P^0(\overline{\Omega}))=\Psi_P(\Omega, \Omega)$ =

= $<Val_{\overline{\Omega}}(\lambda x[\theta(F_2)]), Val_{\overline{\Omega}}(\lambda x[\text{if } x=0 \text{ then } 1 \text{ else } F_2(x-1)])>=<\Omega, g_0>$

որտեղ $g_0 \in [M \to M]$, և որոշվում է հետևյալ կերպ. ∀ m ∈ M

$$g_0(m) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } m=0 \\ \perp, & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$$

$\Psi_P^2(\overline{\Omega})=\Psi_P(\Psi_P^1(\overline{\Omega}))=\Psi_P(\Omega, g_0)$ =

= $<Val_{<\Omega,g_0>}(\lambda x[\theta(F_2)]), Val_{<\Omega,g_0>}(\lambda x[\text{if } x=0 \text{ then } 1 \text{ else } F_2(x-1)])>=<\Omega, g_1>$

որտեղ $g_1 \in [M \to M]$, և որոշվում է հետևյալ կերպ. ∀ m ∈ M

$$g_1(m) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } m \neq \perp \text{ և } m \leq 1 \\ \perp, & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$$

Շարունակելով նման ձևով կստանանք, որ ցանկացած k ≥ 1,

$$\Psi_P^k(\overline{\Omega})=<\Omega, g_{k-1}>$$

որտեղ $g_{k-1} \in [M \to M]$, և որոշվում է հետևյալ կերպ. ∀ m ∈ M

$$g_{k-1}(m) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } m \neq \perp \text{ և } m \leq k-1 \\ \perp, & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$$

$<h', g'>=\sup\{\Psi_P^k(\overline{\Omega}) \mid k \geq 0\}=\sup\{<\Omega, g_k> \mid k \geq 0\}=<\Omega, g>$: Հետևաբար h' ≠ h, g'=g:

3.6. Էֆեկտիվ ներկայացվող հաստատուններ:

Սահմանում: Դիցուք ξ ∈ α, α ∈ Types, ord(α) ≥ 2:

ξ արտապատկերումը կանվանենք էֆֆեկտիվ ներկայացվող հաստատուն, եթե գոյություն ունի (1) տեսքի P համակարգ, որտեղ $F_1 \in V_\alpha$ և որը չի օգտագործում >1 կարգի հաստատուններ, իսկ օգտագործվող առաջին կարգի հաստատունները հաշվելի ֆունկցիաներ են և, եթե $<f_1, ..., f_n>$ P-ի փոքրագույն լուծումն է, ապա f_1=ξ:

Թեորեմ: (էֆֆեկտիվ ներկայացվող ֆունկցիոնալի անընդհատության մասին) Դիցուք $\xi \in \alpha$, $\alpha \in$ Types, ord(α)=2 և ξ էֆֆեկտիվ ներկայացվող հաստատուն է: Այդ դեպքում ξ-ն անընդհատ արտապատկերում է:

Առանց ապացույցի:

Բերենք էֆֆեկտիվ ներկայացվող հաստատունի օրինակ:

Դիտարկենք Բեկուսի FP համակարգում Cond ֆունկցիոնալը: Ծրագրավորենք այն:

Cond=λpgh[λx[if p(x) then g(x) else h(x)]]

որտեղ p, g, h $\in V_{[M\to M]}$, x $\in V_M$, Cond $\in V_{[[M\to M]^3\to[M\to M]]}$

Ծրագիրն գրենք Lisp լեզվով:

```
(defun Cond()
      #′(lambda (p g h)
            #′(lambda (x)
                  (if (funcall p x) (funcall g x) (funcall h x)))))
```

Դիմենք

```
(funcall (funcall (Cond) ’p ‘abs #’(lambda (x) x))-15),
```

որտեղ (defun p(x) (< x-10)):

Կստանանք

15

3.7. Էֆֆեկտիվ ներկայացվող երրորդ կարգի ոչ անընդհատ հաստատունի օրինակ:

Թեորեմ: Գոյություն ունի $\eta \in \alpha$, $\alpha \in$ Types, ord(α)=3 այնպիսին, որ η-ն էֆֆեկտիվ ներկայացվող է և η-ն անընդհատ չէ:

Ապացույց. Դիցուք M=N $\cup$ {$\perp$}: Դիտարկենք հետևյալ հավասարումը.

$$F_1=\lambda HF[H(F)]$$

որտեղ F $\in V_{[M\to M]}$, H $\in V_{[[M\to M]\to M]}$, $F_1 \in V_{[[[M\to M]\to M]x[M\to M]\to M]}$:

Նշանակենք α-ով [[[M$\to$M]$\to$M]x[M$\to$M]$\to$M] բազմությունը, ord(α)=3:

Այս համակարգը հանդիսանում է երրորդ կարգի $\eta \in \alpha$ հաստատունի էֆֆեկտիվ ներկայացումը, որը որոշվում է հետևյալ կերպ. ցանկացած h $\in$ [[M$\to$M]$\to$M] և f $\in$ [M$\to$M]-ի համար

$$\eta(h,f)=h(f):$$

Ցույց տանք, որ η-ն անընդհատ արտապատկերում չէ:

Դիտարկենք հետևյալ $D \subset [[M\to M]\to M]x[M\to M]$ բազմությունը:

$$D=\{<\theta, g_i> \mid i \geq 0\},$$

որտեղ $\theta \in [[M\to M]\to M]$ և ցանկացած $f \in [M\to M]$

$$\theta(f)= \begin{cases} 0, & \text{եթե } \{m \mid f(m) \neq \perp\} \text{ բազմությունը անվերջ է} \\ \perp, & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$$

իսկ $g_i \in [M\to M]$, $i \geq 0$ և ցանկացած $m \in M$

$$g_i(m)= \begin{cases} 1, & \text{եթե } m \neq \perp \text{ և } m \leq i \\ \perp, & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$$

Ակնհայտ է, որ D-ն հանդիսանում է $[[M\to M]\to M]x[M\to M]$ բազմության ոչ դատարկ, գծորեն կարգավորված ենթաբազմություն է: Այժմ ցույց տանք, որ

$$\eta(\sup(D)) \neq \sup\{\eta(D)\}:$$

$$\eta(Sup(D))=\eta(\theta,g)=\theta(g)=0$$

որտեղ $g=\sup\{ g_i \mid k \geq 1\}$, և ցանկացած $m \in M$ համար

$$g(x)= \begin{cases} 1, & \text{եթե } m \neq \perp \\ \perp, & \text{եթե } m=\perp \end{cases}$$

$\sup \eta(D)=\sup\{\eta(\theta, g_i) \mid i \geq 0\}=\sup \{\theta(g_i) \mid i \geq 0\}=\sup\{\perp\}=\perp$

Թեորեմն ապացուցված է:

3.8. Հիմնական լեմմա:

Դիցուք

$$P \quad \begin{cases} F_1=t_1 \\ \ldots \\ F_n=t_n \end{cases}$$

(1) տեսքի հավասարումների համակարգ է, որտեղ $F_i \in V_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in$ Types, i=1,...,n, n≥1:

Դիցուք Ψ_P : $\alpha_1\times\ldots\times\alpha_n \to \alpha_1\times\ldots\times\alpha_n$ P համակարգին համապատասխանող արտապատկերումն է, $\overline{\Omega}$-ն $\alpha_1\times\ldots\times\alpha_n$ բազմության փոքրագույն էլեմենտն է և $<f_1,\ldots,f_n>$-ը P համակարգի փոքրագույն լուծումն է:

Այդ դեպքում ըստ մոնոտոն արտապատկերման փոքրագույն անշարժ կետի մասին թեորեմի

$$\sup\{\Psi_P^k(\overline{\Omega}) \mid k \geq 0\} \sqsubseteq \langle f_1,...,f_n\rangle:$$

$\alpha_1\times...\times\alpha_n$ բազմության $\langle c_1,...,c_n\rangle$ էլեմենտի i-րդ կոմպոնենտը ($1 \leq i \leq n$) կնշանակենք $\langle c_1,...,c_n\rangle_i$-ով:

Այդ դեպքում ցանկացած $i=1,...,n$ համար

$$\sup\{\Psi_P^k(\overline{\Omega})_i \mid k \geq 0\} \sqsubseteq f_i$$

Լեմմա (հիմնական): Դիցուք

$$P \begin{cases} F_1=t_1 \\ ... \\ F_n=t_n \end{cases}$$

(1) տեսքի հավասարումների համակարգ է, որն օգտագործում է ցանկացած կարգի փոփոխականներ, ≤ 1 կարգի հաստատուններ, որտեղ $F_i \in V_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in$ Types, $i=1,...,n$, $n \geq 1$ և $\langle f_1,...,f_n\rangle$-ը P համակարգի փոքրագույն լուծումն է: Այդ դեպքում ցանկացած $i=1,...,n$ համար եթե $ord(f_i) \leq 2$, ապա

$$\sup\{\Psi_P^k(\overline{\Omega})_i / k \geq 0\}=f_i,$$

որտեղ $\Psi_P : \alpha_1\times...\times\alpha_n \rightarrow \alpha_1\times...\times\alpha_n$ P համակարգին համապատասխանող արտապատկերումն է, $\overline{\Omega}$-ն $\alpha_1\times...\times\alpha_n$ բազմության փոքրագույն էլեմենտն է:

Առանց ապացույցի:

Դիտարկենք հետևյալ օրինակը:

Դիցուք $M=N \cup \{\perp\}$: Դիտարկենք հավասարումների հետևյալ P համակարգը.

$$P \begin{cases} F_1=\lambda x[\text{if } x=0 \text{ then } 1 \text{ else } F_1(x-1)] \\ F_2=\lambda x[F_1] \\ F_3=\lambda H[H(F_1)] \end{cases}$$

որտեղ $x \in V_M$, $H \in V_{[[M\rightarrow M]\rightarrow M]}$, $F_1 \in V_{[M\rightarrow M]}$, $F_2 \in V_{[M\rightarrow[M\rightarrow M]]}$, $F_3 \in V_{[[[M\rightarrow M]\rightarrow M]\rightarrow M]}$:

Նշանակենք $[M\rightarrow M]$ բազմությունը α_1-ով, $[M\rightarrow[M\rightarrow M]]$ բազմությունը α_2-ով, $[[[M\rightarrow M]\rightarrow M]\rightarrow M]$ բազմությունը α_3-ով: $ord(\alpha_1)=1$, $ord(\alpha_2)=2$, $ord(\alpha_3)=3$:

Դիցուք $\langle g, \xi, \nu\rangle$-ը P համակարգի փոքրագույն լուծումն է, որտեղ $g \in \alpha_1$ և ցանկացած $m \in M$ համար

$$g(m)=\begin{cases}1, & \text{եթե } m \neq \perp \\ \perp, & \text{եթե } m=\perp\end{cases}$$

$\xi \in \alpha_2$ և ցանկացած $m \in M$ համար, $\xi(m)=g$,

$\nu \in \alpha_3$ և ցանկացած $h \in [[M\rightarrow M]\rightarrow M]$ համար, $\nu(h)=h(g)$:

Նշանակենք $<g', \xi', \nu'>=\sup\{\Psi_P^k(\overline{\Omega}) \mid k \geq 0\}$, որտեղ $\overline{\Omega}=<\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3>$ $\alpha_1\times\alpha_2\times\alpha_3$ բազմության փոքրագույն էլեմենտն է և ցանկացած $m \in M$ համար $\Omega_1(m)=\perp$, $\Omega_2(m)=\Omega_1$, իսկ ցանկացած $h \in [[M\rightarrow M]\rightarrow M]$ համար $\Omega_3(h)=\perp$:

Ըստ Յիմնական լեմմայի $g'=g$, $\xi'=\xi$, իսկ $\nu' \sqsubseteq \nu$: Ցույց տանք, որ $g'=g$, $\xi'=\xi$, իսկ $\nu' \neq \nu$: Յաշվենք $\sup\{\Psi_P^k(\overline{\Omega}) \mid k \geq 0\}$-ն:

$\Psi_P^0(\overline{\Omega})=<\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3>$

$\Psi_P^1(\overline{\Omega})=\Psi_P(\Psi_P^0(\overline{\Omega}))=\Psi_P(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)=<g_0, \xi_0, \nu_0>$

որտեղ $g_0 \in \alpha_1$ և ցանկացած $m \in M$ համար

$$g_0(m)=\begin{cases}1, & \text{եթե } m=0 \\ \perp, & \text{հակառակ դեպքում}\end{cases}$$

$\xi_0 \in \alpha_2$ և ցանկացած $m \in M$ համար $\xi_0(m)=\Omega_1$,

$\nu_0 \in \alpha_3$ և ցանկացած $h \in [[M\rightarrow M]\rightarrow M]$ համար, $\nu_0(h)=h(\Omega_1)$:

$\Psi_P^2(\overline{\Omega})=\Psi_P(\Psi_P^1(\overline{\Omega}))=\Psi_P(g_0, \xi_0, \nu_0)=<g_1, \xi_1, \nu_1>$,

որտեղ $g_1 \in \alpha_1$ և ցանկացած $m \in M$ համար

$$g_1(m)=\begin{cases}1, & \text{եթե } m \neq \perp \text{ և } m \leq 1 \\ \perp, & \text{հակառակ դեպքում}\end{cases}$$

$\xi_1 \in \alpha_2$ և ցանկացած $m \in M$ համար $\xi_1(m)=g_0$,

$\nu_1 \in \alpha_3$ և ցանկացած $h \in [[M\rightarrow M]\rightarrow M]$ համար, $\nu_1(h)=h(g_0)$:

և այսպես շարունակ:

Այսինքն՝ ցանկացած $k \geq 1$ համար

$$\Psi_P^{k+1}(\overline{\Omega})=<g_k, \xi_k, \nu_k>,$$

որտեղ $g_k \in \alpha_1$ և ցանկացած $m \in M$

$$g_k(m) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } m \neq \perp \text{ և } m \leq k \\ \perp, & \text{մնացած դեպքերում} \end{cases}$$

$\xi_k \in \alpha_2$ և ցանկացած $m \in M$, $\xi_k(m)=g_{k-1}$:

$\nu_k \in \alpha_3$ և ցանկացած $h \in [[M\to M]\to M]$, $\nu_k(h)=h(g_{k-1})$:

Ստացվում է, որ

$g'=\sup\{\Psi_P^k(\overline{\Omega})_1 \mid k \geq 0\}=\sup\{\Psi_P^k(\overline{\Omega})_1 \mid k \geq 2\}=\sup\{g_k \mid k \geq 1\}=g$:

$\xi'=\sup\{\Psi_P^k(\overline{\Omega})_2 \mid k \geq 0\}=\sup\{\Psi_P^k(\overline{\Omega})_2 \mid k \geq 2\}=\sup\{\xi_k \mid k \geq 1\}$

և ցանկացած $m \in M$ համար,$\xi_k(m)=g_{k-1}$

$\xi'(m)=\sup\{\xi_k(m) \mid k \geq 1\}=\sup\{g_{k-1} \mid k \geq 1\}=g$

Հետևաբար $\xi'=\xi$:

$\nu'=\sup\{\Psi_P^k(\overline{\Omega})_3 \mid k \geq 0\}=\sup\{\Psi_P^k(\overline{\Omega})_3 \mid k \geq 2\}=\sup\{\nu_k \mid k \geq 1\}$:

Վերցնենք $\theta \in [[M\to M]\to M]$ և ցույց տանք, որ $\nu'(\theta) \neq \nu(\theta)$:

$\nu(\theta)=\theta(g)=\theta(g)=0$ (Arg(g)-ը անվերջ է):

$\nu'(\theta)=\sup\{\nu_k(\theta) \mid k \geq 1\}=\sup\{\theta(g_{k-1}) \mid k \geq 2\}=\sup\{\perp\}=\perp$:

3.9. Թեորեմ ունիվերսալ ինտերպրետատորի մասին

Նշանանակենք □-ով բոլոր այն ֆունկցիոնալ լեզուների բազմությունը, որոնք օգտագործում են ցանկացած կարգի փոփոխականներ և հաստատուններ: Ընդ որում առաջին կարգի հաստատունները հաշվելի ֆունկցիաներ են, իսկ ≥ 2 կարգի հաստատունները՝ էֆֆեկտիվ ներկայացվող:

Թեորեմ (ունիվերսալ ինտերպրետատորի մասին): Գոյություն ունի ալգորիթմ, որը ցանկացած $L \in$ □ լեզվի, $P \in \wp(L)$ ծրագրի, որտեղ $f_P \in [M^k\to M]$, $k \geq 1$, և $\overline{m} \in M^k$ համար կանգ է առնում $f_P(\overline{m})$ պատասխանով, եթե $f_P(\overline{m}) \neq \perp$ և աշխատում է անվերջ, եթե $f_P(\overline{m})=\perp$:

Ապացույց: Նկարագրենք այդ ալգորիթմը:

Դիցուք $L \in$ □, $P \in \wp(L)$ և $\overline{m} \in M^k$, որտեղ $f_P \in [M^k\to M]$, $k \geq 1$

$$P \begin{cases} F_1=t_1 \\ \dots \\ F_n=t_n \end{cases}$$

որտեղ $F_i \in V_{\alpha_i}$, $t_i \in \Lambda_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in$ Types, $i \neq j \Rightarrow F_i \neq F_j$, $FV(t_i) \subset \{F_1,...,F_n\}$, I,j=1,...,n ($n \geq 1$), $\alpha_1=[M^k \to M]$, և $\xi_1,...,\xi_s$ ($s \geq 0$) P համակարգի թերմերում օգտագործվող բոլոր ≥ 2 կարգի հաստատուններն են:

Դիցուք $P_1,...,P_s$-ը համապատասխանաբար $\xi_1,...,\xi_s$ հաստատունների էֆֆեկտիվ ներկայացումներն են: Յանկացած j=1, ..., s, $s \geq 0$, $\xi_j \in \alpha_1^j$, $\alpha_1^j \in$ Types և P_j-ն ունի հետևյալ տեսք.

$$P_j \begin{cases} F_1^j = t_1^j \\ \ldots \\ F_{n_j}^j = t_{n_j}^j \end{cases}$$

որտեղ $F_i^j \in V_{\alpha_i^j}$, $t_i^j \in \Lambda_{\alpha_i^j}$, $\alpha_i^j \in$ Types, i=1,...,n_j, $n_j \geq 1$ և եթե $< f_1^j,...,f_{n_j}^j >$-ը P_j-ի փոքրագույն լուծումն է, ապա $f_1^j = \xi_j$:

Ընդ որում $\{F_1,...,F_n\} \cap \{F_1^j,...,F_{n_j}^j\} = \emptyset$, j=1,...,s, և եթե $k \neq j$, ապա $\{F_1^k,...,F_{n_k}^k\} \cap \{F_1^j,...,F_{n_j}^j\} = \emptyset$, k,j=1,...,s:

P համակարգից ստանանք հետևյալ P_0 համակարգը

$$P_0 \begin{cases} F_1 = t_1^0 \\ \ldots \\ F_n = t_n^0 \end{cases}$$

որտեղ t_i^0-ն ստացվում է t_i-ից, $\xi_1,...,\xi_s$ հաստատունների բոլոր մուտքերը փոխարինելով համապատասխանաբար $F_1^1,...,F_1^s$ փոփոխականներով:

Կառուցենք հետևյալ համակարգը. $\overline{P} = \bigcup_{j=0}^{s} P_j$ ։

$$
\overline{P}\quad \left\{
\begin{array}{l}
P_0 \left\{ \begin{array}{l} F_1 = t_1^0 \\ \dots \\ F_n = t_n^0 \end{array} \right. \\
P_1 \left\{ \begin{array}{l} F_1^1 = t_1^1 \\ \dots \\ F_{n_1}^1 = t_{n_1}^1 \end{array} \right. \\
\quad\dots \\
P_s \left\{ \begin{array}{l} F_1^s = t_1^s \\ \dots \\ F_{n_s}^s = t_{n_s}^s \end{array} \right.
\end{array}
\right.
$$

Նշանակենք A-ով $\alpha_1 \times\ldots\times\alpha_n \times\alpha_1^1\times\ldots\times\alpha_{n_1}^1 \times\ldots\times\alpha_1^s\times\ldots\times\alpha_{n_s}^s$ բազմությունը։

Ψ_P : A $\to$ A-ն $\overline{P}$ համակարգին համապատասխանող արտապատկերումն է։

< $f_1, \ldots, f_n, f_1^1, \ldots, f_{n_1}^1, \ldots, f_1^s, \ldots, f_{n_s}^s$ >-ը հանդիսանում է այս համակարգի փոքրագույն լուծում։

$$f_P = f_{\overline{P}} = \sup\{\Psi_P^k(\overline{\Omega})_1 \mid k \ge 0\},$$

որտեղ $\overline{\Omega}$ -ը A բազմության փոքրագույն էլեմենտն է։

Հետևաբար՝

$$f_P(\overline{m}) = f_{\overline{P}}(\overline{m}) = \sup\{\Psi_P^k(\overline{\Omega})_1(\overline{m}) \mid k \ge 0\}:$$

Թեորեմն ապացուցված է։

3.10. Ռեդուկցիաներ

Պայմանավորվենք, որ Λ-ն հետագայում կնշանակի բոլոր այն թերմերի բազմությունը, որոնք չեն օգտագործում $\ge$2 կարգի հաստատուններ, և Λ_α-ն՝ α

տիպի այն թերմերի բազմությունը, որոնք չեն օգտագործում ≥2 կարգի հաստատուններ:

Սահմանում: Դիցուք t_1, $t_2 \in \Lambda_\alpha$, որտեղ $\alpha \in$ Types, $FV(t_1) \cup FV(t_2)=\{y_1,...y_s\}$, $y_i \in V_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in$ Types, i=1,...,s, s ≥ 0: Կասենք, որ t_1 և t_2 թերմերը համարժեք են (և կնշանակենք այդ փաստը $t_1 \sim t_2$), եթե ցանկացած $\bar{y}_0 = < y_1^0, ..., y_n^0 >$-ի համար, որտեղ $y_i^0 \in \alpha_i$, i=1,...,s, ունենք հետևյալը.

$$Val_{\bar{y}_0}(t_1)=Val_{\bar{y}_0}(t_2):$$

Օրինակ:

$$+(1,2) \sim 3$$

$$+(x,y) \sim +(y, x)$$

$$\lambda x[x](4) \sim 4$$

$$R_2(I_1^1,\ S_3^1(s, I_3^3)) \sim +$$

Սահմանում: Դիցուք $x_i \in V_{\alpha_i}$, $t_i \in \Lambda_{\alpha_i}$, որտեղ $\alpha_i \in$ Types, $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$, i, j=1,...,n, n ≥ 0: Այդ դեպքում $\sigma=\{t_1/x_1,...,t_n/x_n\}$ բազմությունը կոչվում է տեղադրում:

Դիցուք $t \in \Lambda$ և $\sigma=\{t_1/x_1,...,t_n/x_n\}$ որևէ տեղադրում է: $t\sigma$-ով կնշանակենք այն t' թերմը, որը ստացվում է t թերմում $x_1,...,x_n$ փոփոխականների բոլոր ազատ մուտքերը միաժամանակ փոխարինելով համապատասխանաբար $t_1,...,t_n$ թերմերով: Այդ դեպքում կասենք, որ t' թերմը ստացվել է t թերմից σ տեղադրման կիրառման արդյունքում:

Սահմանում: Դիցուք $t \in \Lambda$ և $\sigma=\{t_1/x_1,...,t_n/x_n\}$ որևէ տեղադրում է: Կասենք, որ σ տեղադրման կիրառումը t թերմի վրա թույլատրելի է, եթե ցանկացած i=1,...,n համար x_i փոփոխականի ոչ մի ազատ մուտք t թերմում չի գտնվում t_i թերմի ազատ փոփոխականներն օգտագործող որևէ աբստրակտորի ազդեցության տիրույթում:

Այսինքն` σ տեղադրման կիրառումը t թերմի վրա թույլատրելի է, եթե $t_1,...,t_k$ թերմերի փոփոխականների ոչ մի ազատ մուտք ստացված t' թերմում չի կապնվում:

Օրինակ`

λx[+(x,y)]{*(z,3) / y}=λx[+(x,*(z,3))] թույլատրելի է

λx[+(x,y)]{*(z,3) / z}=λx[+(x,y)] թույլատրելի է

λx[+(x,y)](+(x,2)){5 / x, *(x,2) / y} թույլատրելի չէ

Հետագայում մեր կողմից կդիտարկվեն միայն տեղադրումների թույլատրելի կիրառումներ:

Նշանակենք t_τ-ով $t \in \Lambda$ թերմը, որում ֆիքսած է τ ենթաթերմի որևէ մուտք, $\tau \in \Lambda_\alpha$, $\alpha \in$ Types, իսկ $t_{\tau'}$-ով կնշանակենք թերմը, որը ստացվել է t_τ թերմից τ ենթաթերմի ֆիքսած մուտքը փոխարինելով τ' թերմով, $\tau' \in \Lambda_\alpha$:

Սահմանում: Դիցուք $t_{\lambda x_1 \ldots x_j \ldots x_k[\tau]}$ թերմ է, որտեղ $x_i \in V_{\alpha_i}$, $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$, $\alpha_i \in$ Types, i=1,...,k, $k \geq 1$: Այդ դեպքում կասենք, որ $t_{\lambda x_1 \ldots x'_j \ldots x_k[\tau\{x'_j / x_j\}]}$ թերմը, որտեղ $x'_j \in V_{\alpha_j}$, $x'_j \notin FV(\tau)$, $x'_j \notin \{x_1,\ldots,x_k\}$, $1 \leq j \leq k$, ստացվել է $t_{\lambda x_1 \ldots x_i \ldots x_k[\tau]}$ թերմից փոփոխականի վերանվանման միջոցով:

Սահմանում: t և t' թերմերը կանվանենք կոնգրուենտ (նշանակենք $t \equiv t'$), եթե t' թերմը t թերմից ստացվել է $n \geq 0$ անգամ փոփոխականի վերանվանման միջոցով:

Օրինակ՝

$$\lambda x[x] \equiv \lambda y[y]$$

$$*(\lambda xy[+(x,y)](3,2),y) \equiv *(\lambda uv[+(u,v)](3,2),y)$$

Հեշտ է համոզվել, որ

1. ցանկացած t թերմի համար $t \equiv t$,
2. ցանկացած t_1 և t_2 թերմերի համար եթե $t_1 \equiv t_2$, ապա $t_2 \equiv t_1$,
3. ցանկացած t_1, t_2 և t_3 թերմերի համար եթե $t_1 \equiv t_2$ և $t_2 \equiv t_3$, ապա $t_1 \equiv t_3$:

Այսինքն՝ Λ բազմության վրա կոնգրուենտության հարաբերությունը իրենից ներկայացնում է համարժեքության հարաբերություն: Այն Λ բազմությունը տրոհում է կոնգրուենտության դասերի: Պայմանավորվենք հետագայում կոնգրուենտ թերմերն իրարից չտարբերել:

Սահմանում: $\lambda x_1 \ldots x_n[\tau](t_1, \ldots, t_n)$, որտեղ $x_i \in V_{\alpha_i}$, $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$, $\tau \in \Lambda$, $t_i \in \Lambda_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in$ Types, i=1,...,n, $n \geq 1$, տեսքի ցանկացած թերմ կանվանենք β-ռեդեքս (redex-*red*ucible *ex*pression): $\lambda x_1 \ldots x_n[\tau](t_1,\ldots,t_n)$ β-ռեդեքսի փաթեթ է հանդիսանում $\tau\{t_1/x_1, \ldots, t_k/x_k\}$ թերմը:

Օրինակ՝

β-ռեդեքս	փաթեթ
$\lambda xy[+(x,y)](*(2,x),*(3,x))$	$+(x,y)\ \{*(2,x)/x,*(3,x)/y\}=+(*(2,x),*(3,x))$
$\lambda xy[\lambda x[+(x,y)](y)](*(2,x),*(3,x))$	$\lambda x[+(x,y)](y)\{*(2,x)/x,*(3,x)/y\}=\lambda x[+(x,*(3,y)](*(3,y))$

$\lambda x[+(x,*(3,y))](*(3,y))$ $\quad +(x,*(3,y))\{*(3,y)/x\}=+(*(3,y),*(3,y))$

$\lambda xy[\lambda x[+(x,y)](y)](*(2,x),*(3,x)) \equiv \lambda xy[\lambda z[+(z,y)](y)](*(2,x),*(3,x))$

$\lambda z[+(z,y)](y)\{*(2,x)/x,*(3,x)/y\}=\lambda z[+(z,*(3,x))](*(3,x))$

$\lambda z[+(z,*(3,x))](3*x)$ $\quad +(z,*(3,x))\{*(3,x)/ z\}=+(*(3,x),*(3,x))$

Սահմանում: Կասենք, որ t' թերմը ստացվում է t թերմից միաքայլ β-ռեդուկցիայի միջոցով (կնշանակենք $t \to_\beta t'$), եթե $t \equiv t_\tau$, $t' \equiv t_{\tau'}$ և τ-ն β-ռեդեքս է, իսկ τ'-ը՝ նրա փաքեքը:

Սահմանում: Կասենք, որ t' թերմը ստացվում է t թերմից β-ռեդուկցիայի միջոցով (կնշանակենք $t \to\to_\beta t'$), եթե կամ $t \equiv t'$, կամ գոյություն ունի թերմերի վերջավոր հաջորդականություն $t_1,..., t_k$, $k\geq0$, այնպիսին, որ $t \to_\beta t_1 \to_\beta ... \to_\beta t_k \to_\beta t'$:

Սահմանում: δ-ռեդեքսը ունի $f(t_1, ...,t_n)$ տեսք, որտեղ $f \in [M^k\to M]$, $t_i \in \Lambda_M$, $i=1,...,n$, $n \geq 1$: Նրա փաքեքն է կամ $m \in M$ հաստատունը և այդ դեպքում $f(t_1,...,t_n) \sim m$, կամ՝ t_i ենթաթերմը, $1 \leq i \leq n$ և այդ դեպքում $f(t_1,...,t_n) \sim t_i$:

Օրինակ՝

δ-ռեդեքս	փաքեք
+(3,2)	5
*(3,0)	0
if(true,5,3)	5
if(true,x,y)	x
if(false,*(x,y),+(y,x))	+(y,x)

Սահմանում: Կասենք, որ t' թերմը ստացվում է t թերմից միաքայլ δ-ռեդուկցիայի միջոցով (կնշանակենք $t \to_\delta t'$), եթե $t \equiv t_\tau$, $t' \equiv t_{\tau'}$ և τ-ը δ-ռեդեքս է, իսկ τ'-ը՝ նրա փաքեքը:

Սահմանում: Կասենք, որ t' թերմը ստացվում է t թերմից δ-ռեդուկցիայի միջոցով (կնշանակենք $t \to\to_\delta t'$), եթե կամ $t \equiv t'$, կամ գոյություն ունի թերմերի վերջավոր հաջորդականություն $t_1,..., t_k$, $k\geq0$, այնպիսին, որ $t \to_\delta t_1 \to_\delta ... \to_\delta t_k \to_\delta t'$:

Սահմանում: Կասենք, որ t' թերմը ստացվում է t թերմից միաքայլ βδ-ռեդուկցիայի միջոցով (կնշանակենք $t \to_{\beta,\delta} t'$), եթե կամ $t \to_\beta t'$ կամ $t \to_\delta t'$:

Սահմանում: Կասենք, որ t' թերմը ստացվում է t թերմից βδ-ռեդուկցիայի միջոցով (կնշանակենք $t \to\to_{\beta,\delta} t'$), եթե կամ $t \equiv t'$, կամ գոյություն ունի թերմերի վերջավոր հաջորդականություն $t_1,...,t_k$, ($k\geq 0$) այնպիսին, որ $t \to_{\beta,\delta} t_1 \to_{\beta,\delta} ... \to_{\beta,\delta} t_k \to_{\beta,\delta} t'$:

Թեորեմ (ռեդուկցիայի մասին): Եթե $t \to\to_{\beta,\delta} t'$, ապա $t \sim t'$:

Առանց ապացույցի:

Սահմանում: t թերմը կանվանենք նորմալ ձև, եթե նրանում չկա ենթաթերմ, որն իրենից ներկայացնում է β-ռեդեքս,կամ δ-ռեդեքս: Նորմալ ձևերի բազմությունը նշանակենք NF-ով:

Թեորեմ (նորմալ ձևի մասին): Ցանկացած $t \in \Lambda$ թերմի համար գոյություն ունի $t' \in NF$ թերմ այնպիսին, որ $t \to\to_{\beta,\delta} t'$:

Առանց ապացույցի:

Համարում ենք, որ δ-ռեդուկցիայի գաղափարը այնպիսին է, որ եթե $t \sim m \in M$, ապա $t \to\to_{\beta,\delta} m$:

3.11. Ակտիվ և պասսիվ ինտերպրետատորներ

Դիցուք P ծրագիր է հետևյալ տեսքի.

$$\begin{cases} F_1=t_1 \\ ... \\ F_n=t_n \end{cases}$$

որտեղ $F_i \in V_{\alpha_i}$, $\tau_i \in \Lambda_{\alpha_i}$, $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta \in Types$ և $i \neq j \Rightarrow F_i \neq F_j$, $FV(t_i) \subset \{F_1,...,F_n\}$, $i=1,...,n$, $n \geq 1$, $\alpha_1=[M^k \to M]$ և P-ում կարող են օգտագործվել ցանկացած կարգի փոփոխականներ և ≤ 1 կարգի հաստատուններ:

Ակտիվ ալգորիթմ (ACT):

ACT ալգորիթմը մուտքում ստանում է ցանկացած P ծրագիր և $t \in \Lambda$ թերմ: ACT ալգորիթմը P համակարգի և t թերմի համար կամ աշխատում է անվերջ, այս դեպքում ասում ենք, որ ACT(P, t)-ն անորոշ է, կամ կանգ է առնում, և այս դեպքում ասում $ACT(P, t) \in NF$ և $FV(ACT(P, t)) \cap \{F_1,...,F_n\}=\emptyset$, այսինքն՝ ACT(P, t)-ն որոշված է:

Քայլ 1. Եթե $t \in NF$ և $FV(t) \cap \{F_1,...,F_n\}=\emptyset$, ապա t, հակառակ դեպքում անցնել Քայլ 2-ին:

Քայլ 2. Եթե t ≡ t<$F_{i_1},...,F_{i_s}$ >*), որտեղ F_{i_j} ∈ {$F_1,...,F_n$}, j= 1,...,s, s ≥ 1, և F_{i_1} -ը գտնվում է ամենաձախ ռեդեքսից ձախ, ապա ACT(P, t<$t_{i_1}, F_{i_2},...,F_{i_s}$ >)**), հակառակ դեպքում անցնել Քայլ 3-ին:

Քայլ 3. Եթե t ≡ $t_{\lambda x_1...x_k[\tau](\tau_1,...,\tau_k)}$ և $\lambda x_1...x_k[\tau](\tau_1,...,\tau_k)$ ամենաձախ ռեդեքսն է, ապա ACT(P, $t_{\tau\{ACT(P,\tau_1)/x_1,...,ACT(P,\tau_k)/x_k\}}$), հակառակ դեպքում անցնել Քայլ 4-ին:

Քայլ 4. Եթե t ≡ t_τ և τ ամենաձախ ռեդեքսն է, որը δ-ռեդեքս է, ապա ACT(P, $t_{\tau'}$), որտեղ τ'-ը τ-ի փաթեթն է:

Պասսիվ ալգորիթմ (PAS):

PAS ալգորիթմը մուտքում ստանում է ցանկացած P ծրագիր և t ∈ Λ թերմ: PAS ալգորիթմը P համակարգի և t թերմի համար կամ աշխատում է անվերջ, այս դեպքում ասում ենք, որ PAS(P, t)-ն անորոշ է, կամ կանգ է առնում, և այս դեպքում ասում PAS(P, t) ∈ NF և FV(PAS(P, t)) ∩ {$F_1,...,F_n$}=∅, այսինքն՝ PAS(P, t)-ն որոշված է:

Քայլ 1. Եթե t ∈ NF և FV(t) ∩ {$F_1,...,F_n$}=∅, ապա t, հակառակ դեպքում անցնել Քայլ 2-ին:

Քայլ 2. Եթե t ≡ t<$F_{i_1},...,F_{i_s}$ >, որտեղ F_{i_j} ∈ {$F_1,...,F_n$}, j= 1,...,s, s ≥ 1, և F_{i_1} -ը գտնվում է ամենաձախ ռեդեքսից ձախ, ապա PAS(P, t<$t_{i_1}, F_{i_2},...,F_{i_s}$ >), հակառակ դեպքում անցնել Քայլ 3-ին:

Քայլ 3. Եթե t ≡ $t_{\lambda x_1...x_k[\tau](\tau_1,...,\tau_k)}$ և $\lambda x_1...x_k[\tau](\tau_1,...,\tau_k)$ ամենաձախ ռեդեքսն է, ապա PAS(P, $t_{\tau\{\tau_1/x_1,...,\tau_k/x_k\}}$), հակառակ դեպքում անցնել Քայլ 4-ին:

Քայլ 4. Եթե t ≡ t_τ և τ ամենաձախ ռեդեքսն է, որը δ-ռեդեքս է, ապա PAS(P, $t_{\tau'}$), որտեղ τ'-ը τ-ի փաթեթն է:

Սահմանում: U_{ACT} ինտերպրետատորը կոչվում է ակտիվ եթե ցանկացած P ծրագրի և $\overline{m}$ ∈ M^k համար

U_{ACT}(P, $\overline{m}$)=ACT(P, F_1($\overline{m}$))

---

*) t<$F_{i_1},...,F_{i_s}$ >-ը t թերմն է, որում ֆիքսած են $F_1,...,F_n$ փոփոխականների բոլոր s ≥ 1 հատ ազատ մուտքերը ձախից աջ, i_j-ն, j=1,...,s, նշանակում է, որ որևէ F_i (1 ≤ i ≤ n) փոփոխականի այդ մուտքը t թերմում j-րդն է:

**) t<$t_{i_1}, F_{i_2},...,F_{i_s}$ >-ը t թերմն է, որում F_{i_1} ազատ մուտքը փոխարինված է t_{i_1} թերմով:

Սահմանում: U_{PAS} ինտերպրետատորը կոչվում է պասսիվ եթե ցանկացած P ծրագրի և $\overline{m} \in M^k$ համար

$U_{PAS}(P, \overline{m})=PAS(P, F_1(\overline{m}))$

Օրինակ: Դիցուք $M=N \cup \{\perp\}$: Դիտարկենք հետևյալ P համակարգը.

$F=\lambda xy[\text{if } x=0 \text{ then } 1 \text{ else } F(x-1,F(x, y))]$

որտեղ $x, y \in V_M, F \in V_{[M^2\to M]}$:

Յավասարման փոքրագույն լուծումն է $f_P \in [M^2\to M]$ և ցանկացած $m_1,m_2 \in M$ համար

$$f_P(m_1,m_2) = \begin{cases} 1, & \text{եթե } m_1 \neq \perp \\ \perp, & \text{հակառակ դեպքում} \end{cases}$$

Օգտվելով ակտիվ ինտերպրետատորից հաշվենք $f_P(1,2)$-ը:

U_{ACT}(P,<1,2>)=ACT(P,F(1,2))=(ըստ ալգորիթմի Քայլ 2-ի)

ACT(P, λxy[if x=0 then 1 else F(x-1,F(x, y))](1,2))=(ըստ ալգորիթմի Քայլ 3-ի քանի որ ACT(P, 1)=1 և ACT(P, 2)=2 (երկուսն էլ ըստ ալգորիթմի Քայլ 1-ի))

ACT(P, if 1=0 then 1 else F(1-1,F(1, 2)))=(ըստ ալգորիթմի Քայլ 4-ի)

ACT(P, if *false* then 1 else F(1-1,F(1, 2)))=(ըստ ալգորիթմի Քայլ 4-ի)

ACT(P, F(1-1,F(1, 2)))=(ըստ ալգորիթմի Քայլ 2-ի)

ACT(P, λxy[if x=0 then 1 else F(x-1,F(x, y))](1-1,F(1, 2)))

Այստեղ պետք է օգտվել ալգորիթմի Քայլ 3-ից: Այն կիրառելու համար պետք է հաշվարկվի ACT(P, 1-1) և ACT(P, F(1, 2)): ACT(P, 1-1)=0, իսկ ACT(P, F(1, 2))-ը այն է ինչ հաշվարկվում է: Այսինքն՝ Ալգորիթմը աշխատում է անվերջ:

Այժմ օգտվելով պասսիվ ինտերպրետատորի ալգորիթմից հաշվենք $f_P(1,2)$-ը:

U_{PAS}(P,<1,2>)=PAS(P,F(1,2))=(ըստ ալգորիթմի Քայլ 2-ի)

PAS(P,λxy[if x=0 then 1 else F(x-1,F(x, y))](1,2))=(ըստ ալգորիթմի Քայլ 3-ի)

PAS(P, if 1=0 then 1 else F(1-1,F(1, 2)))=(ըստ ալգորիթմի Քայլ 4-ի)

PAS(P, if *false* then 1 else F(1-1,F(1, 2)))=(ըստ ալգորիթմի Քայլ 4-ի)

PAS(P, F(1-1,F(1, 2)))=(ըստ ալգորիթմի Քայլ 2-ի)

PAS(P, λxy[if x=0 then 1 else F(x-1,F(x, y))](1-1,F(1, 2)))=(ըստ ալգորիթմի Քայլ 2-ի)

PAS(P, if (1-1)=0 then 1 else F((1-1)-1,F(1-1, F(1, 2))))=(ըստ ալգորիթմի Քայլ 4-ի)

PAS(P, if 0=0 then 1 else (1-1)-1,F(1-1,F(1, 2)))=(ըստ ալգորիթմի Քայլ 4-ի)

PAS(P, if *true* then 1 else (1-1)-1,F(1-1,F(1, 2)))=(ըստ ալգորիթմի Քայլ 4-ի)

PAS(P, 1)=(ըստ ալգորիթմի Քայլ 1-ի)

1

Այսինքն՝ $U_{PAS}(P,<1,2>)=1=f_P(1,2)$:

ԳՐԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆ

1. *Henderson P.* Functional programming. Application and implemention.//Prentice-Hall Int., 1980 (русск. пер. *Хендерсон П.* Функциональное программирование. Применение и реализация.//М.: Мир, 1983, 349с.).
2. *Field A.J., Harrison P.G.* Functional programming.// Addison-Wesley Pub. Co., 1988 (русск. пер. *Филд А., Харрисон П.* Функциональное программирование.//М.: Мир, 1993, 638с.).
3. *Backus J.W.* Can programming be liberated from the von Neumann style? A functional style and its algebra of programs.//Communications of the ACM, v.21, N8, p.613-641.
4. *Нигиян С.А.* Функциональные языки программирова-ния.//Программирование, N5, 1991, стр.77-86 (анг. пер. *Nigiyan S.A.* Functional languages. //Programming and Computer Software, Vol.17, N5, 1992, p.290-297).
5. *Нигиян С.А.* Об интерпретации функциональных языков программирования.//Программирование, N2, 1993, стр.58-68 (анг. пер. *Nigiyan S.A.* On interpretation of functional programming languages. //Programming and Computer Software, Vol.19, N2, 1993, p.71-78).
6. *Э. Хювенен, Й. Сепянин,* Мир Лиспа. Введение в язык Лисп и функциональное программирование// Москва, 1999, (в 2 томах).

Ссылка: http://www.dvo.ru/tech/lisp/index.html

ՑԱՆԿ