

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Մուրադյան Լևոն Նորայրի

Գրաֆների միջակայքային կողային ներկումների մասին

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Ա.01.09 «Մաթեմատիկական կիրենոնետիկա և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

Երևան - 2025

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Мурадян Левон Норайрович

О интервальных реберных раскрасках графов

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.09 “Математическая кибернетика и математическая логика”

Ереван - 2025

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում:

Գիտական ղեկավար՝
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝
Առաջատար կազմակերպություն՝

Ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Պ. Ա. Պետրոսյան
Ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Ռ. Ռ. Քամայան
Ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Հ. Հ. Խաչատրյան
Հայ-ռուսական (սլավոնական) համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2025թ. հունիսի 2-ին, ժ. 16⁰⁰-ին ԵՊՀ-ում գործող ԲՈԿ-ի 050 «Մաթեմատիկա» մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2025թ. մայիսի 2-ին:

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
Ֆիզ.-մաթ.գիտ. դոկտոր՝



Կ.Լ. Ավետիսյան

Тема диссертации утверждена в Ереванском государственном университете.

Научный руководитель:
Официальные оппоненты:

кандидат физ.-мат. наук П. А. Петросян
доктор физ.-мат. наук Р. Р. Камалян
кандидат физ.-мат. наук Г. А. Хачатрян
Российско-Армянский (Славянский) университет

Ведущая организация:

Защита состоится 2-го июня 2025г. в 16⁰⁰ часов на заседании действующего в Ереванском государственном университете специализированного совета ВАК 050 “Математика”, по адресу: Ереван 0025, ул. А. Манукяна, 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 2-го мая 2025г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
доктор физ.-мат. наук



К.Л. Аветисян

Աշխատանքի ընդհանուր նկարագիրը

Թեմայի արդիականությունը

Ժամանակակից տեղեկատվական տեխնոլոգիաների զարգացումը հնարավոր է Կատարել արագ արագ զարգացող դիսկրետ մաթեմատիկայի: Պատահական է, որ այդ արագ զարգացումը սկիզբ է առնում XX-րդ դարում, երբ ստեղծվել են առաջին թվային համակարգիչները: Դա պայմանավորված է նրանով, որ դիսկրետ մաթեմատիկայի մեթոդների միջոցով ուսումնասիրվում են բարդ համակարգերի նախագծման, ղեկավարման և անալիզի հետ կապված հարցեր: Մյուս կարևոր յուրահատկությունը բազմաթիվ կիրառական խնդիրների կայանում է նրանում, որ այդ խնդիրները ունեն դիսկրետ բնույթ: Այս ամենը կարևոր են դարձնում դիսկրետ մաթեմատիկայի ուղղությամբ կատարվող հետազոտությունները:

Հայտնի է, որ գրաֆների ներկումների խնդիրները հանդիսանում են դիսկրետ մաթեմատիկայի կարևոր, արդի և արագ զարգացող հետազոտման ուղղություններից մեկը: Առաջին անգամ գրաֆների ներկումները հիշատակվում են XIX-րդ դարում, երբ տարբեր հեղինակների կողմից առաջարկվել է «Չորս գույների հիպոթեզ» հանրահայտ խնդիրը, համաձայն որի ամեն մի աշխարհագրական քարտեզ հնարավոր է ներկել չորս գույների միջոցով այնպես, որ յուրաքանչյուր երկրի տարածք ներկված լինի մեկ գույնով, իսկ ընդհանուր սահման ունեցող երկրները ներկված լինեն տարբեր գույներով: Գրաֆների ներկումների խնդիրները ունեն ոչ միայն մեծ տեսական նշանակություն, այլ նաև պրակտիկ կարևորություն, քանի որ դրանց միջոցով հնարավոր է կատարել մարդկային կենսագործունեության ամենատարբեր ոլորտներում ծագող խնդիրների մաթեմատիկական մոդելավորումը: Օրինակ, նշանակալի կապ կա կազմակերպության տեսության խնդիրների և գրաֆների ներկումների խնդիրների միջև, մասնավորապես, քննաշրջանի օպտիմալ կարգացուցակ կառուցելու խնդիրը բերվում է գրաֆի քրոմատիկ թվի որոշմանը: Գրաֆի քրոմատիկ ինդեքսը գտնելու խնդիրն բերվում է սպորտային մրցումների կարգացուցակ կազմելու խնդիրը:

Հաշվի առնելով, որ բազմաթիվ կիրառական խնդիրների մոդելավորման արդյունքում ստացվող խնդիրները, որպես կանոն, բերվում են ոչ թե դասական գազաթային (կողային) ներկման խնդրին, այլ տարաբնույթ սահմանափակումներով այդպիսի ներկումների հետազոտմանը, այս ամենը կարևոր են դարձնում լրացուցիչ սահմանափակումներով գազաթային (կողային) ներկումների խնդիրների հետազոտումը: Այսպես, օրինակ, գրաֆների ցուցակային ներկումները ^{1,2}, որոնք այնպիսի ճիշտ գազաթային (կողային) ներկումներ են, երբ յուրաքանչյուր գազաթի (կողի) գույնը ընտրվում է թույլատրելի գույների ցուցակից, օգտագործվում են այնպիսի կարգացուցակների մոդելավորման համար, երբ յուրաքանչյուր աշխատանք կարող է կատարվել միայն ժամանակի որոշակի պահերին կամ միայն որոշակի մեքենաների կողմից: Մեկ այլ հետաքրքիր օրինակ է գրաֆների գումարային ներկումը ^{3,4}: Գումարային ներկումը ճիշտ

¹P. Erdős, A.L. Rubin, H. Taylor, Choosability in graphs, Proc. West Coast Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congr. Numer. 26, 1979, pp. 125-157.

²B.Г. Визинг, Раскраски вершин графа в предписанные цвета, Методы дискретного анализа 29, 1976, стр. 3-10.

³E. Kubicka, The chromatic sum of a graph, PhD Thesis, Western Michigan University, 1989.

⁴K.J. Supowit, Finding a maximum planar subset of nets in a channel, IEEE Trans. Comput. Aided Design CAD 6(1), 1987, pp. 93-94.

գազաթային (կողային) ներկում է նվազագույն գույների գումարով, և կարգացուցակների տեսության մեջ այն կիրառվում է աշխատանքների ընդհանուր տևողության միջին ժամանակը մինիմիզացնելու նպատակով: Երկկողմանի մուլտիգրաֆների լրացուցիչ սահմանափակումներով կողային ներկումները դիտարկվել են հետևյալ աշխատանքներում ^{5,6,7}: Մասնավորապես, Իվենի, Իտայի և Շամիրի կողմից դիտարկվել է G երկկողմանի մուլտիգրաֆի այնպիսի ճիշտ կողային ներկման կառուցման խնդիրը, որտեղ G -ի կողմերից մեկի յուրաքանչյուր գազաթի համար տրված են գույների բազմություններ, որոնցից պետք է ընտրվեն այդ գազաթին կից կողերի գույները: Կարգացուցակների տեսության մեջ այդ ներկումները օգտագործվում են այնպիսի դասացուցակների կառուցման խնդիրներում, որտեղ հաշվի են առնվում ուսուցիչների նախապատվությունները: Հայտնի է, որ ընդհանուր դեպքում այդ խնդիրը NP-լրիվ է: Մեկ այլ օրինակ է, երկկողմանի մուլտիգրաֆների կողային ներկումների գոյության և կառուցման խնդիրները, երբ յուրաքանչյուր գազաթի համար այդ գազաթին կից ցանկացած երկու գույնով ներկված կողերի քանակների տարբերությունը մեծ չէ մեկից: Դե Կերայի կողմից ցույց է տրվել, որ կամայական G երկկողմանի մուլտիգրաֆի և k բնական թվի համար G -ի կողերը կարելի է ներկել k գույներով՝ բավարարելով նշված պայմանին: Այս խնդիրը համապատասխանում է այնպիսի դասացուցակներին, երբ ուսուցիչների և դասարանների ծանրաբեռնվածությունները բաշխվում են հավասարաչափ: Կոմպակտ դասացուցակների գոյության և կառուցման խնդիրներին համապատասխանող գրաֆների ներկումների խնդիրների հետազոտման նպատակով Ա. Հասրաթյանի և Ռ. Քամալյանի կողմից սահմանվել է գրաֆի միջակայքային կողային ներկման ⁸ գաղափարը: G գրաֆի ճիշտ կողային ներկումը $1, \dots, t$ գույներով կոչվում է G -ի միջակայքային կողային t -ներկում, եթե յուրաքանչյուր գազաթին կից կողերը ներկված են հաջորդական գույներով:

^{9,10,11,12,13,14} աշխատանքներում հետազոտվել են գրաֆների տարբեր դասերի միջակայքային կողային ներկումները, որոնցից են ծառերը, լրիվ երկկողմանի և բազմակողմանի գրաֆները, n -չափանի խորանարդը, ցանցերը, երկակի ուռուցիկ երկկողմանի գրաֆները, արտաքին հարթ երկկողմանի գրաֆները, կապակցված G գրաֆները, որոնց համար $\chi'(G) = \Delta(G) = 3$ և (a, b) -երկհամասեռ երկկողմանի գրաֆները: Հայտնի է, որ ոչ բոլոր գրաֆները ունեն միջակայքային կողային ներկում, այդպիսի պարզագույն օրինակը եռանկյուն գրաֆն է, իսկ երկկողմանի գրաֆների դասում

⁵D. de Werra, Balanced schedules, INFOR. N9, 1971, pp. 230-237.

⁶S. Even, A. Itai, A. Shamir, On the complexity of timetable and multicommodity flow problems, SIAM J. Comput. 5 (4), 1976, pp. 691-703.

⁷J. Folkman, D.R. Fulkerson, Edge colourings in bipartite graphs, in Combinatorial Mathematics and its Applications, University of North Carolina Press, Chapel Hill, 1969, pp. 561-577.

⁸А.С. Асратян, Р.Р. Камалян, Интервальные раскраски ребер мультиграфа, Прикладная математика, вып. 5, 1987, стр. 25-34.

⁹A.S. Asratian., T.M.J. Denley, R. Hagkvist, Bipartite graphs and their applications, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 1998.

¹⁰A.S. Asratian, C.J. Casselgren, P.A. Petrosyan, Decomposing graphs into interval colorable subgraphs and no-wait multi-stage schedules, Discrete Applied Mathematics 335, 2023, pp. 25-35.

¹¹K. Giaro, M. Kubale, Compact scheduling of zero-one time operations in multi-stage systems, Discrete Appl. Math. 145, 2004, pp. 95-103.

¹²P.A. Petrosyan, Interval edge-colorings of complete graphs and n-dimensional cubes, Discrete Math. 310, 2010, pp. 1580-1587.

¹³Р.Р. Камалян, Интервальные раскраски полных двудольных графов и деревьев, Препринт ВЦ АН Арм. ССР и ЕГУ, Ереван, 1989, 11 стр.

¹⁴Р.Р. Камалян, А.Н. Мирумян, Интервальные реберные раскраски двудольных графов одного класса, Доклады НАН РА, том 97, N 4, 1997, стр. 3-5.

նվազագույն հայտնի օրինակը ունի 11 առավելագույն աստիճան ¹⁵: Միջակայքային կողային ներկում չունեցող երկկողմանի գրաֆների օրինակներ կառուցվել են Ա. Միրումյանի, Ս. Սեվաստյանովի, Պ. Էրոյոշի, Ա. Հերցի, Դ. դե Վերրայի, Կ. Գիարոյի, Մ. Կուբալի և Մ. Մալաֆիյսկո, Քամալյանի, ինչպես նաև Պետրոսյանի և Խաչատրյանի կողմից: ¹⁶-ում ապացուցվել է, որ երկկողմանի գրաֆների դասում միջակայքային կողային ներկման գոյության խնդիրը հանդիսանում է NP-լրիվ խնդիր: Ջենսեն և Տոֆտի ^{17,18} կողմից առաջարկվել է հիպոթեզ, համաձայն որի բոլոր (a, b) -երկհամասեռ երկկողմանի գրաֆները ունեն միջակայքային կողային ներկում: Այս հիպոթեզի ապացույցի ուղղությամբ Ա. Հասրաթյանը, Կ. Կասսելգրենը, Պ. Պետրոսյանը, Ջ. Վանդենբուշեն, Դ. Վեստը, Ա. Պյատկինը, Բ. Տոֆտը, Ֆ. Յանզը և Բ. Լին հասել են որոշ հաջողությունների:

Միջակայքային կողային ներկումներին նմիրված հետազոտությունների մեծ մասը հիմնականում վերաբերվում է այդպիսի ներկումների գոյության, կառուցման և բարդության խնդիրներին, սակայն քիչ է անդրադարձ կատարվել միջակայքային ներկումների թվային պարամետրերի գնահատման հարցերին: Չնայած այն հանգամանքին, որ հայտնի է, որ բոլոր լրիվ երկկողմանի գրաֆները միջակայքային ներկելի են, դեռևս չկա բոլոր լրիվ բազմակողմանի (նույնիսկ 3-կողմանի) գրաֆների միջակայքային ներկելիության նկարագրությունը: Միջակայքային ներկումների հետազոտություններում անարդարացիորեն քիչ է ուշադրություն հատկացված այդպիսի ներկումների ուսումնասիրմանը գրաֆների այն դասերի համար, որոնց ցիկլային կառուցվածքի վրա առկա են տարբեր սահմանափակումներ:

Աշխատանքի հիմնական նպատակը և նրանում դիտարկված խնդիրները

Աշխատանքում դիտարկվել են գրաֆների միջակայքային կողային ներկումների գոյության, կառուցման և թվային պարամետրերի գնահատման, ինչպես նաև այդպիսի ներկումների ճանաչման խնդիրներ: Աշխատանքում շեշտը դրվել է այդպիսի ներկումներ ունեցող գրաֆների պարամետրերի հետազոտման վրա: Աշխատանքի հիմնական նպատակն է վերոհիշյալ խնդիրների հետազոտումը ինչպես ընդհանուր գրաֆների դեպքում, այնպես էլ գրաֆների տարբեր դասերի համար:

Հետազոտության օբյեկտները

Աշխատանքում հետազոտության օբյեկտներ են հանդիսանում ինչպես ընդհանուր գրաֆները, այնպես էլ գրաֆների տարբեր դասեր, գրաֆների կողերի հատուկ տիպի դեկոմպոզիցիաներ ըստ ունիկալ գույների, միջակայքային կողային ներկումներ, այդպիսի ներկումներում մասնակցող գույների քանակներ: Հետազոտության օբյեկտներ են հանդիսանում նաև միջակայքային ներկումներ չունեցող գրաֆներ և ցիկլային կառուցվածքի վրա սահմանափակումներով գրաֆների դասեր:

¹⁵P.A. Petrosyan, H.H. Khachatrian, Interval non-edge-colorable bipartite graphs and multigraphs, J. Graph Theory 76, 2014, pp. 200-216.

¹⁶C.B. Севастьянов, Об интервальной раскрашиваемости ребер двудольного графа, Методы дискретного анализа в решении экстремальных задач, вып. 50, 1990, стр. 61-72.

¹⁷T.R. Jensen, B. Toft, Graph coloring problems, Wiley Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, 1995.

¹⁸M. Steiebtz, D. Scheide, B. Toft, L.M. Favrholt, Graph Edge Coloring: Vizing's Theorem and Goldberg's Conjecture, Wiley Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, 2012.

Հետազոտության մեթոդները

Հետազոտությունն իրականացվել է դիսկրետ մաթեմատիկայի, գրաֆների տեսության և դիսկրետ օպտիմիզացիայի մեթոդների օգնությամբ:

Գիտական նորույթը

Աշխատանքում առաջին անգամ ուսումնասիրվել են նոսր գրաֆների միջակայքային կողային ներկումների պարամետրեր, ներմուծվել է գրաֆների կողերի հատուկ տիպի դեկոմպոզիցիա ըստ ունիկալ գույների և նշվել է դրա կապը միջակայքային ներկելի գրաֆների $W(G)$ պարամետրի հետ, նշված դեկոմպոզիցիայի հիման վրա ապացուցվել է Աքսենովիչի հիպոթեզը միջակայքային ներկելի հարթ գրաֆների մասին: Առաջարկվել է կակտուս գրաֆների միջակայքային ներկման համար ճանաչման ալգորիթմ և ներմուծվել են լրիվ բազմակողմանի գրաֆների համար միջակայքային ներկում չունենալու հիմնավորման որոշ միջոցներ, որոնց հիման վրա հաստատվել է Շառ, Լի, Վանգ, Վանգ և Ժանգի կողմից առաջարկված հիպոթեզը լրիվ 4-կողմանի գրաֆների միջակայքային ներկելիության մասին:

Ստացված արդյունքների գործնական կիրառությունը

Աշխատանքում օգտագործված հետազոտության մեթոդները և նրանում ստացված արդյունքներն ունեն ոչ միայն տեսական նշանակություն գրաֆների քրոմատիկ հատկությունների հետազոտման համար, այլև կարող են ունենալ գործնական կիրառություններ: Մասնավորապես, գրաֆների միջակայքային ներկումները կիրառվում են կոմպակտ կարգացուցակների գոյության և կառուցման, համակարգիչների և ծրագրերի հիշողության օպտիմալ բաշխման, անընդհատ պրոցեսների մաթեմատիկական մոդելավորման խնդիրներում և այլն:

Պաշտպանության ներկայացվող հիմնական դրույթները

Պաշտպանության են ներկայացվում հետևյալ հիմնական դրույթները.

1) Միջակայքային ներկումներ ունեցող գրաֆների պարամետրերի ընդհանուր գնահատականներ և որոշ դասերի գրաֆների համար այդ պարամետրերի ճշգրիտ արժեքներ,

2) Նոսր գրաֆների միջակայքային կողային ներկումներում մասնակցող հնարավոր գույների քանակի վերին գնահատականներ, մասնավորապես, Աքսենովիչի հիպոթեզի ապացույց,

3) Լրիվ բազմակողմանի գրաֆների միջակայքային կողային ներկում ունեցող (չունեցող) որոշ դասերի նկարագրություն,

4) Լրիվ բազմակողմանի գրաֆների միջակայքային կողային ներկումների գոյության, կառուցման և թվային պարամետրերի գնահատականների և ճշգրիտ արժեքների հետ առնչվող մի շարք արդյունքներ, մասնավորապես, լրիվ 4-կողմանի գրաֆների միջակայքային ներկելիության մասին Շառ, Լի, Վանգ, Վանգ և Ժանգի հիպոթեզի ապացույց,

5) Կակտուս գրաֆների միջակայքային կողային ներկելիության ճանաչման ալգորիթմ,

6) Կակտուս գրաֆների, ցիկլիկ ծառերի միջակայքային կողային ներկումների գոյության, կառուցման և թվային պարամետրերի գնահատականների հետ առնչվող մի շարք արդյունքներ:

Ստացված արդյունքների գրաքննությունը և փորձարկումը

Ստացված արդյունքները զեկուցվել են մի շարք գիտաժողովներում Հայաստանում և եվրոպական երկրներում.

1. XIV Годи́чная нау́чная ко́нференция РАУ, Ереван, Армения, 2-6 декабря, 2019,
2. Mathematics & IT: Research and Education (MITRE-2021), Chişinău, Republic of Moldova, July 01–03, 2021,
3. YSU SSS 7th International Scientific Conference dedicated to the 30th anniversary of the Independence of the Republic of Armenia, Yerevan, Armenia, October 4-8, 2021,
4. XV Годи́чная нау́чная ко́нференция РАУ, Ереван, Армения, 6-10 декабря, 2021,
5. XVII Годи́чная нау́чная ко́нференция РАУ, Ереван, Армения, 4-8 декабря, 2023,
6. ԵՊՀ «Հաշվետու գիտաժողով-2024», Երևան, Հայաստան, Ապրիլի 10-15, 2024,
7. Combinatorics 2024, Riva Marina Resort, Carovigno (Br), Italy, 3-7 June 2024,
8. Համակարգչային գիտության և կիրառական մաթեմատիկայի արդի խնդիրներ «ՀԳԿՄԱԽ 2025», ԵՊՀ, Երևան, Ապրիլի 28-30, 2025:

Աշխատանքի առանձին հատվածները մանրամասն քննարկվել են տարբեր սեմինարների ընթացքում՝ Երևանի պետական համալսարանում, Մաթեմատիկական և կիրառական հետազոտությունների կենտրոնում և Հայ-Ռուսական (Սլավոնական) համալսարանում:

Նշենք նաև, որ Թեորեմ 3.3.2-ը առաջարկվել է որպես ծրագրավորման օլիմպիադայի խնդիր ICPC միջազգային օլիմպիադայի Հյուսիսային Եվրասիա տարածաշրջանի եզրափակիչ փուլին և չի լուծվել մասնակից թիմերից ոչ ոքի կողմից, մնալով օլիմպիադայի միակ չլուծված խնդիրը¹⁹:

Հրապարակումները

Հետազոտության թեմայի վերաբերյալ տպագրվել են 9 գիտական աշխատանքներ:

Աշխատանքի ծավալը և կառուցվածքը

Աշխատանքի ծավալը կազմում է 105 էջ: Աշխատանքը բաղկացած է ներածությունից, երեք գլուխներից, եզրակացությունից և գրականության ցանկից: Աշխատանքը ներառում է 19 նկար և 2 աղյուսակ:

¹⁹ICPC Northern Eurasia Finals 2024, December 13-15 <https://neerc.ifmo.ru/archive/2024/nef-2024-statement.pdf> (Problem C).

Աշխատանքի պարունակությունը

Այս աշխատանքում դիտարկվող բոլոր գրաֆները վերջավոր են, կողմնորոշված չեն և չունեն պատիկ կողեր և օղակներ: G գրաֆի գագաթների և կողերի բազմությունները նշանակենք, համապատասխանաբար, $V(G)$ -ով և $E(G)$ -ով: $G = (V, E)$ գրաֆը կոչվում է (n, m) -գրաֆ, եթե $|V| = n$ և $|E| = m$: Ցանկացած $v \in V(G)$ գագաթի աստիճանը G գրաֆում կնշանակենք $d_G(v)$ -ով: $\Delta(G)$ -ով և $\delta(G)$ -ով՝ գագաթների աստիճաններից առավելագույնը և նվազագույնը համապատասխանաբար: G գրաֆի $v \in V(G)$ գագաթը կանվանենք դոմինանտ գագաթ, եթե $d_G(v) = |V(G)| - 1$: G գրաֆի կապակցվածությունը կնշանակենք $\kappa(G)$ -ով: G գրաֆը կոչվում է k -կապակցված, եթե $\kappa(G) \geq k$:

Ցանկացած a և b բնական թվերի համար ($a \leq b$) $[a, b]$ -ով կնշանակենք $[a, b] = \{a, a+1, \dots, b\}$ բազմությունը: a և b բնական թվերի ամենամեծ ընդհանուր բաժանարարը կնշանակենք (a, b) -ով:

G գրաֆը կոչվում է լրիվ r -կողմանի ($r \geq 2$) գրաֆ, եթե գրաֆի գագաթները կարող են բաժանվել r անկախ բազմությունների $V_1, \dots, V_r$ այնպես, որ կամայական գագաթ V_i -ից հարևան է բոլոր գագաթներին V_j -ից, որտեղ $1 \leq i < j \leq r$: Լրիվ r -կողմանի գրաֆը $V_1, \dots, V_r$ անկախ բազմություններով կոչվում է լրիվ r -կողմանի հավասարակշռված գրաֆ, եթե $|V_1| = |V_2| = \dots = |V_r|$: Լրիվ r -կողմանի գրաֆը $V_1, \dots, V_r$ անկախ բազմություններով, չափները $n_1, \dots, n_r$ համապատասխանաբար, կնշանակենք $K_{n_1, \dots, n_r}$ -ով:

Գրաֆը կոչվում է *հարթ*, եթե այն հնարավոր է պատկերել հարթության վրա այնպես, որ գրաֆի կողերը հաստվեն միայն գագաթներում: Հարթության վրա պատկերված հարթ գրաֆը հարթությունը տրոհում է տիրույթների, որոնք կոչվում են *նիստեր*: Հարթ գրաֆը կոչվում է *արտաքին հարթ*, եթե այն հնարավոր է հարթության վրա պատկերել այնպես, որ նրա բոլոր գագաթները պատկանեն արտաքին (անվերջ) նիստին:

Գրաֆը կոչվում է *կակտուս*, եթե գրաֆը կապակցված է և գրաֆի ցանկացած կող գտնվում է առավելագույնը մեկ պարզ ցիկլի մեջ: Գրաֆը կոչվում է *ցիկլիկ ծառ*, եթե գրաֆը կապակցված է և գրաֆի ցանկացած գագաթ գտնվում է առավելագույնը մեկ պարզ ցիկլի մեջ: Հեշտ է նկատել, որ ցիկլերի ծառը կակտուսի մասնավոր դեպք է: $e \in E(G)$ կողը կոչվում է *կամուրջ*, եթե այդ կողը հեռացնելուց G գրաֆի կապակցված բաղադրիչների քանակը ավելանում է:

G գրաֆը կոչվում է *բլոկների գրաֆ*, եթե G գրաֆի յուրաքանչյուր երկկապակցված կոմպոնենտ (բլոկ) լրիվ գրաֆ է: G բլոկների գրաֆը կոչվում է *զույգ բլոկների գրաֆ*, եթե G գրաֆի յուրաքանչյուր բլոկ պարունակում է զույգ քանակությամբ գագաթներ:

G գրաֆի *ճիշտ կողային ներկում* ասելով կհասկանանք այն $\alpha : E(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ արտապատկերումը, այնպես, որ $\alpha(e) \neq \alpha(e')$ կամայական հարևան կողերի զույգերի համար, որտեղ $e, e' \in E(G)$: Եթե α ճիշտ կողային ներկումը օգտագործում է միայն $1, \dots, t$ գույները, ընդ որում $\forall i$ թվի համար, $1 \leq i \leq t$, գոյություն ունի $e_i \in E(G)$ այնպիսին, որ $\alpha(e_i) = i$, ապա α -ն կանվանենք G գրաֆի *ճիշտ կողային t -ներկում*:

Եթե α -ն G -ի ճիշտ կողային ներկում է և $v \in V(G)$, ապա $S(v, \alpha)$ -ով նշանակենք այն գույների բազմությունը, որոնք գրված են v -ին հարևան կողերի վրա: $S(v, \alpha)$ -ի ամենափոքր և ամենամեծ գույները նշանակում են համապատասխանաբար $\underline{S}(v, \alpha)$ -ով և $\overline{S}(v, \alpha)$ -ով:

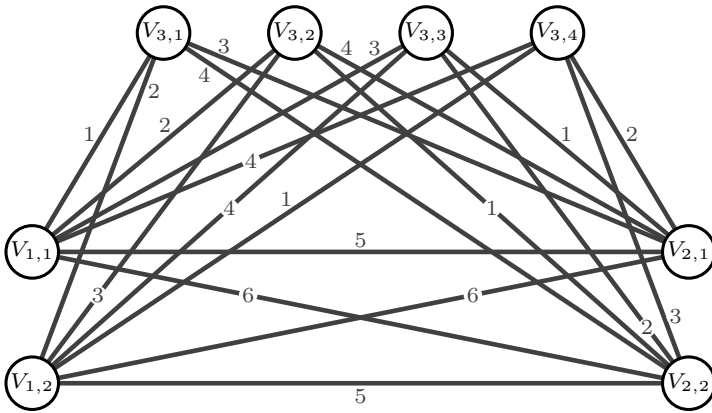
Տրված G գրաֆի ճիշտ կողային ներկումներում անհրաժեշտ գույների նվազագույն քանակը կոչվում է *քրոմատիկ ինդեքս* և նշանակվում է $\chi'(G)$ -ով: Ըստ Վիգինգի հայտնի

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1:$$

Հայտնի է, որ $\chi'(G)$ -ի որոշման խնդիրը NP-լիով է²²:

G գրաֆի ճիշտ կողային t -ներկումը կոչվում է միջակայքային t -ներկում, եթե G գրաֆի յուրաքանչյուր գագաթին կից կողերի գույները կազմում են բնական թվերի միջակայք: G գրաֆը միջակայքային ներկելի է, եթե գոյություն ունի որևէ t դրական թիվ, որի համար G -ն ունի միջակայքային t -ներկում: Բոլոր միջակայքային ներկելի գրաֆների բազմությունը նշանակենք $\mathfrak{W}$ -ով: $G \in \mathfrak{W}$ գրաֆի համար t -ի այն ամենափոքր և ամենամեծ արժեքները, որոնց դեպքում G գրաֆը ունի միջակայքային t -ներկում նշանակենք համապատասխանաբար $w(G)$ -ով և $W(G)$ -ով: Նկատենք, որ եթե $G \in \mathfrak{W}$, ապա

$$\chi'(G) \leq w(G) \leq W(G) \leq |E(G)| :$$



Նկ. 0.1: $K_{2,2,4}$ լիով 3-կողմանի գրաֆի միջակայքային կողային α ներկումը, որտեղ $LSE(V(K_{2,2,4}), \alpha) = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$:

Ոչ բացասական ամբողջ թվերից կազմված կարգավորված $L = (l_1, l_2, \dots, l_k)$ հաջորդականությունը կանվանենք *անընդհատ*, եթե հաջորդականությունը պարունակում է L -ի ամենափոքր և ամենամեծ թվերի միջակայքում ընկած բոլոր ամբողջ թվերը:

Սահմանենք կարգավորված հաջորդականությունը՝ $LSE(V', \alpha)$ (Lower Spectral Edge) (Նկ. 0.1) հետևյալ կերպ.

$$LSE(V', \alpha) = (\underline{S}(v_{i_1}, \alpha), \underline{S}(v_{i_2}, \alpha), \dots, \underline{S}(v_{i_k}, \alpha))$$

²⁰В.Г. Визинг, Об оценке хроматического класса р-графа, Дискретный анализ 3, 1964, стр. 25–30.

²¹В.Г. Визинг, Хроматический класс мультиграфов, Кибернетика 3, 1965, стр. 29-39.

²²I. Holyer, The NP-completeness of edge coloring, SIAM Journal of Computing 10, 1981, pp. 718-720.

որտեղ $V' = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq V(G)$ և $\underline{S}(v_{i_l}, \alpha) \leq \underline{S}(v_{i_{l+1}}, \alpha)$ բոլոր $1 \leq l \leq k-1$ համար ²³.

Աշխատանքի առաջին գլուխը նվիրված է միջակայքային ներկելի G գրաֆների $w(G)$ և $W(G)$ պարամետրերի գնահատականներին: Առաջին գլխի 1.1 պարագրաֆը նվիրված է $W(G)$ պարամետրի վերին գնահատականին կամայական G գրաֆի համար, արտահայտված գրաֆի գագաթների և կողերի քանակներով:

$W(G)$ պարամետրի առաջին գնահատականները ստացել են Հասրաթյանը և Քամալյանը եռանկյուն չպարունակող գրաֆների համար ^{24,25}:

Թեորեմ 1.1.1. *Եթե G -ն եռանկյուն չպարունակող գրաֆ է և $G \in \mathfrak{N}$, ապա*

$$W(G) \leq |V(G)| - 1:$$

$W(G)$ -ի առաջին ընդհանուր գնահատականը արտահայտված գրաֆի գագաթների քանակի միջոցով ստացվել է Քամալյանի կողմից.

Թեորեմ 1.1.2. *Եթե G -ն կապակցված գրաֆ է ($|V(G)| \geq 2$) և $G \in \mathfrak{N}$, ապա*

$$W(G) \leq 2|V(G)| - 3:$$

Գիառոն, Կուբալը և Մալաֆիյսկին ²⁶ փոքր ինչ լավացրել են այս գնահատականը. եթե G -ն կապակցված գրաֆ է ($|V(G)| \geq 3$) և $G \in \mathfrak{N}$, ապա $W(G) \leq 2|V(G)| - 4$: Մյուս կողմից, Պետրոսյանը ցույց է տվել հետևյալ արդյունքը. ցանկացած $\epsilon > 0$ թվի համար գոյություն ունի G գրաֆ այնպիսին, որ $G \in \mathfrak{N}$ և $W(G) \geq (2 - \epsilon)|V(G)|$:

1.1 պարագրաֆում ստացվել է հետևյալ ընդհանուր վերին գնահատականը $W(G)$ պարամետրի համար:

Թեորեմ 1.1.3. *Եթե G -ն միջակայքային ներկելի գրաֆ է, ապա*

$$W(G) \leq \frac{|E(G)| + |V(G)| - 1}{2}:$$

1.2 պարագրաֆը նվիրված է հարթ և արտաքին հարթ գրաֆների $W(G)$ պարամետրի հետազոտմանը: Աքսենովիչի ²⁷ կողմից ստացվել է հարթ գրաֆների միջակայքային ներկումներում մասնակցող գույների քանակի վերին գնահատական.

Թեորեմ 1.2.1. *Եթե G -ն հարթ գրաֆ է և $G \in \mathfrak{N}$, ապա*

$$W(G) \leq \frac{11}{6}|V(G)|:$$

Նույն հոդվածում Աքսենովիչի կողմից առաջարկվել է հիպոթեզ, ըստ որի բոլոր միջակայքային ներկելի կապակցված հարթ գրաֆների համար այս գնահատականը հնարավոր է լավացնել մինչև $\frac{3}{2}|V(G)|$:

Հիպոթեզ 1.1. *Եթե G -ն հարթ գրաֆ է և $G \in \mathfrak{N}$, ապա*

$$W(G) \leq \frac{3}{2}|V(G)|:$$

²³Չսահմանված հասկացությունների և նշանակումների համար տե՛ս D.B. West, Introduction to Graph Theory, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.

²⁴A.S. Asratian, R.R. Kamalian, Investigation on interval edge-colorings of graphs, J. Combin. Theory Ser. B 62, 1994, pp. 34-43.

²⁵P.P. Камалян, Интервальные реберные раскраски графов, канд. дисс., Новосибирск, 1990.

²⁶K. Giaro, M. Kubale, M. Malafiejski, Consecutive colorings of the edges of general graphs, Discrete Math. 236, 2001, pp. 131-143.

²⁷M.A. Axenovich, On interval colorings of planar graphs, Congressus Numerantium 159, 2002, pp. 77-94.

1.2 պարագրաֆում ապացուցվել է Աքսենովիչի հիպոթեզը.

Թեորեմ 1.2.2. *Եթե G -ն հարթ գրաֆ է, առնվազն երկու գագաթով և $G \in \mathfrak{N}$, ապա*

$$W(G) \leq \frac{3|V(G)| - 4}{2}:$$

Նույն պարագրաֆում ստացվել է նաև արտաքին հարթ գրաֆների $W(G)$ պարամետրի վերին գնահատական:

Թեորեմ 1.2.3. *Եթե G -ն արտաքին հարթ գրաֆ է առնվազն երկու գագաթով և $G \in \mathfrak{N}$, ապա*

$$W(G) \leq |V(G)| - 1:$$

Նշենք, որ ստացված երկու վերին գնահատականները $W(G)$ պարամետրի համար հասանելի են:

1.3 պարագրաֆը նվիրված է G կմախքային աստղով գրաֆների $W(G)$ պարամետրի վերին գնահատականին: Մասնավորապես, այս պարագրաֆում ապացուցվել է հետևյալ թեորեմը:

Թեորեմ 1.3.1. *Եթե G գրաֆը ունի u դոմինանտ գագաթ և $G \in \mathfrak{N}$, ապա*

$$W(G) \leq |V(G)| + 2\Delta(G - u) - 1:$$

Ավելին, եթե G գրաֆը ունի u դոմինանտ գագաթ, $\delta(G) \geq 2$ և $G \in \mathfrak{N}$, ապա

$$W(G) \leq |V(G)| + 2\Delta(G - u) - 2:$$

1.4 պարագրաֆը նվիրված է k -կապակցված G գրաֆների $W(G)$ պարամետրի վերին գնահատականին: Մասնավորապես, այս պարագրաֆում ապացուցվել են հետևյալ թեորեմները:

Թեորեմ 1.4.1. *Եթե G -ն k -կապակցված գրաֆ է և $G \in \mathfrak{N}$, ապա*

$$W(G) \leq 1 + \left(\left\lfloor \frac{|V(G)| - 2}{k} \right\rfloor + 2 \right) (\Delta(G) - 1):$$

Թեորեմ 1.4.2. *Եթե G -ն k -կապակցված երկկողմանի գրաֆ է և $G \in \mathfrak{N}$, ապա*

$$W(G) \leq 1 + \left(\left\lfloor \frac{|V(G)| - 2}{k} \right\rfloor + 1 \right) (\Delta(G) - 1):$$

Այս պարագրաֆում դիտարկվել են նաև ստացված գնահատականների հասանելիության հետ կապված հարցերը: Մասնավորապես, կառուցվել են G գրաֆներ, որոնց համար $W(G)$ պարամետրի ստորին գնահատականը տարբերվում է Թեորեմ 1.4.1-ում ստացված վերին գնահատականից, ոչ ավել քան $\log_2 \Delta(G)$ -ն, իսկ Թեորեմ 1.4.2-ի դեպքում՝ գնահատականը հասանելի է:

1.5 պարագրաֆում ուսումնասիրվել են զույգ բոլոր գրաֆների միջակայքային կողային ներկումները: Մասնավորապես, ստացվել են $w(G)$ պարամետրերի վերին և $W(G)$ պարամետրերի ստորին հասանելի գնահատականներ: Նշենք 1.5 պարագրաֆում ստացված արդյունքերից մեկը:

Թեորեմ 1.5.1. Կամայական G զույգ բլոկների գրաֆ ունի միջակայքային կողային ներկում: Ավելին, $w(G) \leq 2(\Delta(G) - 1)$, երբ $\Delta(G) \geq 2$:

Աշխատանքի երկրորդ գլուխը նվիրված է լրիվ բազմակողմանի գրաֆների միջակայքային կողային ներկումների գոյության, կառուցման և թվային պարամետրերի գնահատականների խնդիրների հետազոտմանը:

Լրիվ բազմակողմանի գրաֆներից առաջինը ուսումնասիրվել են լրիվ երկկողմանի գրաֆները: Քամայանին հաջողվել է լիարժեք պատասխանել այն հարցին, թե երբ և որքան գույներով միջակայքային ներկումներ կարող են ունենալ լրիվ երկկողմանի գրաֆները:

Թեորեմ 2.1.1. $K_{m,n}$ լրիվ երկկողմանի գրաֆը ունի միջակայքային t -ներկում այն և միայն դեպքում, երբ $m + n - (m, n) \leq t \leq m + n - 1$:

Լրիվ հավասարակշռված բազմակողմանի գրաֆների համար, Պետրոսյանը ստացել է հետևյալ արդյունքը:

Թեորեմ 2.1.2. Եթե G -ն լրիվ հավասարակշռված k -կողմանի գրաֆ է, որի ամեն կողմը բաղկացած է n գագաթներից և nk -ն զույգ է, ապա եթե $(k - 1)n \leq t \leq (\frac{3}{2}k - 1)n - 1$, ապա G -ն ունի միջակայքային t -ներկում:

Նշենք, որ լրիվ 3-կողմանի գրաֆների հարցը բաց է մինչ օրս և շարունակվում է ուսումնասիրվել տարբեր գիտնականների կողմից: Խաչատրյանը և Գրգեսիկը²⁸ լուծել են $K_{1,n,m}$ տիպի լրիվ 3-կողմանի գրաֆների միջակայքային ներկելիությանը խնդիրը:

Թեորեմ 2.1.3. $K_{1,n,m}$ լրիվ 3-կողմանի գրաֆը ունի միջակայքային ներկում, այն և միայն այն դեպքում, երբ $(n + 1, m + 1) = 1$:

Եվ նույն հոդվածում հեղինակները առաջարկել են հետևյալ հիպոթեզը:

Հիպոթեզ 2.1. $K_{l,m,n}$ գրաֆը, որտեղ $l \leq m \leq n$ և $n > l + m$ միջակայքային ներկելի է այն և միայն դեպքում, երբ $K_{l,m,n-l-m}$ -ը միջակայքային ներկելի է:

2.1 պարագրաֆում տրվել է լրիվ բազմակողմանի գրաֆների միջակայքային կողային ներկումներում մասնակցող գույների հնարավոր քանակի վերին գնահատական:

Թեորեմ 2.1.4. Եթե $K_{n_1, n_2, \dots, n_r}$ -ը լրիվ r -կողմանի ($r \geq 2$) գրաֆ է, որտեղ $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$ և $K_{n_1, n_2, \dots, n_r} \in \mathfrak{N}$, ապա

$$W(K_{n_1, n_2, \dots, n_r}) \leq 2 \sum_{i=1}^r n_i - n_r - n_{r-1} - 1:$$

Ավելին, եթե $K_{n, \dots, n}$ -ը լրիվ հավասարակշռված r -կողմանի գրաֆ է, որտեղ $r \geq 3$ և $\underbrace{K_{n, \dots, n}}_r \in \mathfrak{N}$, ապա

$$W(\underbrace{K_{n, \dots, n}}_r) \leq 2nr - 2n - 2:$$

2.2 պարագրաֆում ուսումնասիրվել են միջակայքային ներկելի լրիվ բազմակողմանի գրաֆները: Մասնավորապես, ապացուցվել է հետևյալ թեորեմը:

²⁸A. Grzesik, H. Khachatryan, Interval edge-colorings of $K_{1, m, n}$, Discrete Appl. Math. 174 (2014) 140-145.

Թեորեմ 2.2.1. Կամայական $n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ համար, եթե $K_{n_1, n_2, \dots, n_r}$ -ը ունի α միջակայքային t -ներկում այնպես, որ $LSE(V(K_{n_1, n_2, \dots, n_r}), \alpha)$ -ն անընդհատ է և $\sum_{i=1}^r n_i = n$, ապա կամայական $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ -ի համար, $K_{n_1, \dots, n_r, n, 2n, \dots, 2^k n}$ -ն ունի β միջակայքային $(t + (2^{k+1} - 1)n)$ -ներկում այնպես, որ $LSE(V(K_{n_1, \dots, n_r, n, 2n, \dots, 2^k n}), \beta)$ անընդհատ է:

Հետևանք 2.2.2. Կամայական $n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ համար, եթե $K_{n_1, n_2, \dots, n_r}$ -ը ունի α միջակայքային $\Delta(K_{n_1, n_2, \dots, n_r})$ -ներկում այնպես, որ $LSE(V(K_{n_1, n_2, \dots, n_r}), \alpha)$ -ն անընդհատ է և $\sum_{i=1}^r n_i = n$, ապա կամայական $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ -ի համար, $K_{n_1, \dots, n_r, n, 2n, \dots, 2^k n}$ -ն ունի β միջակայքային $\Delta(K_{n_1, \dots, n_r, n, 2n, \dots, 2^k n})$ -ներկում այնպես, որ $LSE(V(K_{n_1, \dots, n_r, n, 2n, \dots, 2^k n}), \beta)$ անընդհատ է:

Հետևանք 2.2.3. Կամայական $n_1, n_2, \dots, n_r, n \in \mathbb{N}$ համար, եթե $K_{n_1, n_2, \dots, n_r, n}$ -ը ունի α միջակայքային t -ներկում այնպես, որ $LSE(V(K_{n_1, n_2, \dots, n_r, n}), \alpha)$ -ն անընդհատ է և $\sum_{i=1}^r n_i = s$, ապա կամայական $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ -ի համար, $K_{n_1, \dots, n_r, n+ks}$ -ն ունի β միջակայքային $(t + ks)$ -ներկում այնպես, որ $LSE(V(K_{n_1, \dots, n_r, n+ks}), \beta)$ անընդհատ է:

Նկատենք, որ այս հետևանքը նաև մասնավորապես հաստատում է Հիպոթեզ 2.1-ը:

2.1 պարագրաֆում ապացուցվել են նաև հետևյալ արդյունքները.

Թեորեմ 2.2.4. Կամայական $n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ թվերի համար ($n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_r, r \geq 2$), եթե բավարարվում են հետևյալ պայմանները.

- $\exists q > 0$ ամբողջ թիվ, այնպես որ $\sum_{i=1}^r n_i = 2^q n_1$
- կամայական $1 \leq i \leq r$ համար, $\exists p_i \geq 0$ ամբողջ թիվ, այնպես որ $n_i = 2^{p_i} n_1$,

ապա $K_{n_1, n_2, \dots, n_r}$ -ը ունի միջակայքային $\Delta(K_{n_1, n_2, \dots, n_r})$ -ներկում:

Թեորեմ 2.2.5. Կամայական $r \geq 2, m \geq 0$ և $n \geq 1$ համար, $\underbrace{K_{n, \dots, n}}_r, rnm+n$ լրիվ $(r+1)$ -

կողմանի գրաֆը ունի միջակայքային կողային ներկում, եթե $n(r+1)$ -ը զույգ է:

2.1.1 պարագրաֆը նվիրված է լրիվ 3-կողմանի և 4-կողմանի գրաֆների միջակայքային ներկելիությանը: Մասնավորապես, լրիվ 3-կողմանի գրաֆների համար, ապացուցվել են հետևյալ թեորեմները:

Թեորեմ 2.2.6. Կամայական $n \in \mathbb{N}$ համար $K_{2n, 2n, 2n}$ լրիվ երեք կողմանի գրաֆները ունեն միջակայքային $(8n - 2)$ -ներկում: Ավելին, $W(K_{2n, 2n, 2n}) = 8n - 2$:

Հետևանք 2.2.7. $K_{2n, 2n, 2n}$ լրիվ երեք կողմանի գրաֆը ունի միջակայքային t -ներկում, այն և միայն այն դեպքում երբ $4n \leq t \leq 8n - 2$:

Թեորեմ 2.2.8. $K_{m, n, n}$ գրաֆը միջակայքային ներկելի է, եթե m -ը զույգ է:

$K_{1, 1, 1, n}$ տիպի լրիվ 4-կողմանի գրաֆների միջակայքային կողային ներկումները ուսումնասիրվել են Շաո, Լի, Վանգ, Վանգ և Ժանգի²⁹ կողմից: Այդ հոդվածում հեղինակները ապացուցել են հետևյալը.

Թեորեմ 2.2.9. Եթե $n \equiv 1 \pmod{3}$ և $t \in \{n + 2, n + 3\}$, ապա $K_{1, 1, 1, n}$ գրաֆը ունի միջակայքային t -ներկում:

²⁹Z. Shao, Z. Li, B. Wang, Sh. Wang X. Zhang, Interval edge-coloring: A model of curriculum scheduling, AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, 17:3, 2020, pp. 725-729.

Եվ նույն հոդվածում առաջարկել են հետևյալ հիպոթեզը.

Հիպոթեզ 2.2. $K_{1,1,1,n}$ գրաֆը ունի միջակայքային t -ներկում, այն և միայն այն դեպքում երբ $n \equiv 1 \pmod{3}$ և $t \in \{n+2, n+3\}$:

2.1.1 պարագրաֆում հաստատվել է հեղինակների կողմից առաջարկված հիպոթեզը, դրանով իսկ ծածկելով $K_{1,1,1,n}$ տիպի գրաֆների միջակայքային կողային ներկելիության հարցը:

Թեորեմ 2.2.10. $K_{1,1,1,n}$ գրաֆը ունի միջակայքային t -ներկում, այն և միայն այն դեպքում երբ $n \equiv 1 \pmod{3}$ և $t \in \{n+2, n+3\}$:

2.3 պարագրաֆում ուսումնասիրվել են միջակայքային ներկում չունեցող լրիվ բազմակողմանի գրաֆները: Մասնավորապես, ապացուցվել են հետևյալ արդյունքները:

Թեորեմ 2.3.1. Կամայական կենտր $n \in \mathbb{N}$ -ի կամ զույգ r -ի համար, լրիվ r -կողմանի $K_{n,n+1,\dots,n+1}$ գրաֆը, որտեղ $r \geq 3$, չունի միջակայքային կողային ներկում, այսինքն՝ $K_{n,n+1,\dots,n+1} \notin \mathcal{N}$:

Թեորեմ 2.3.2. Կամայական $r \geq 2$, $m \geq 0$ և զույգ $n \geq 2$ ամբողջ թվերի համար, $K_{\underbrace{n,\dots,n}_r, rnm+n-1}$ լրիվ $(r+1)$ -կողմանի գրաֆը չունի միջակայքային կողային ներկում:

Թեորեմ 2.3.3. Կամայական $r \geq 2$, $m \geq 0$ և զույգ $n \geq 2$ ամբողջ թվերի համար, $K_{\underbrace{n,\dots,n}_r, rnm+n+1}$ լրիվ $(r+1)$ -կողմանի գրաֆը չունի միջակայքային կողային ներկում:

Հետևանք 2.3.4. $K_{2,2,n}$ գրաֆը ունի միջակայքային ներկում, այն և միայն այն դեպքում, երբ n -ը զույգ է:

Աշխատանքի երկրորդ գլուխը նվիրված է կակտուս գրաֆների միջակայքային կողային ներկումների գոյության, կառուցման և թվային պարամետրերի գնահատականների խնդիրների հետազոտմանը: Երրորդ գլխի առաջին պարագրաֆում տրվել է ընդհանուր վերին գնահատական կակտուս գրաֆների $W(G)$ պարամետրի համար:

Թեորեմ 3.1.1. Եթե G -ն կակտուս գրաֆ է, պարզ ցիկլ ζ է և միջակայքային ներկելի է, ապա

$$W(G) \leq |V(G)| - 1 - \sum_{i=1}^r \left\lfloor \frac{c_i - 3}{2} \right\rfloor,$$

որտեղ $c_1, c_2, \dots, c_r$ -ը G գրաֆի բոլոր պարզ ցիկլերի երկարություններն են:

Նշենք նաև, որ Թեորեմ 3.1.1-ում ստացված վերին գնահատականը հասանելի է:

3.2 պարագրաֆը նվիրված է կակտուս գրաֆների միջակայքային ներկելիության ճանաչման ալգորիթմին: Օգտագործել ստորև ձևակերպված երկու օժանդակ խնդիրները, կառուցվել է ալգորիթմ, որը մուտքում ունենալով G կակտուս գրաֆը, պատասխանում է գոյություն ունի արդյոք G գրաֆի միջակայքային կողային ներկում, թե ոչ:

Խնդիր 3.1. Տրված է n դրական ամբողջ թիվը և m բազմություններ, որոնցից i -րդը պարունակում է k_i հար ամբողջ թիվ $A_i = \{a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,k_i}\}$, որտեղ $1 \leq i \leq m$, $k_i \geq 1$, իսկ բազմության մեջ գտնվող թվերից յուրաքանչյուրը պարկանում է $[1, n]$ միջակայքային:

Անհրաժեշտ է գտնել $[1, n]$ միջակայքի բոլոր այն թվերը, որոնք կարելի է ներկայացնել $\sum_{i=1}^m (-1)^{p_i} a_{i, q_i}$ տեսքով, որտեղ յուրաքանչյուր $1 \leq i \leq m$ համար, $p_i \in \{0, 1\}$, $1 \leq q_i \leq k_i$:

Խնդիր 3.2. Տրված է n դրական ամբողջ թիվը և m բազմություններ, որոնցից i -րդը պարունակում է k_i հատ ամբողջ թիվ $A_i = \{a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,k_i}\}$, որտեղ $1 \leq i \leq m$, $k_i \geq 1$: Անհրաժեշտ է պատասխանել, հնարավոր է արդյոք $[0, n-1]$ միջակայքի ամբողջ թվերից ընտրել իրարից տարբեր $2m$ թվեր $x_1, x_2, \dots, x_{2m}$ և տրված m բազմություններից յուրաքանչյուրից ընտրել մեկ ամբողջ թիվ $d_1, d_2, \dots, d_m$ այնպես, որ $x_{2i} - x_{2i-1} = d_i$, յուրաքանչյուր $1 \leq i \leq m$ համար:

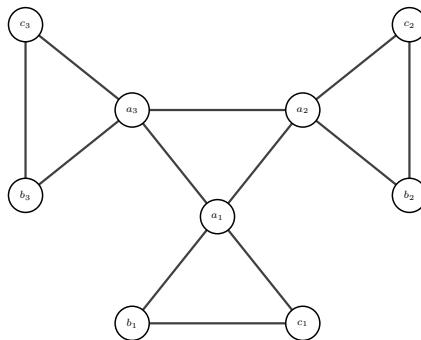
Խնդիր 3.1-ի և 3.2-ի համար առաջարկվել են, համապատասխանաբար, $O(mn^2)$ և $O(n^2 2^{n-1})$ բարդությամբ ալգորիթմներ: Այնուհետև, օգտագործելով այդ խնդիրները G կակտուս (N, M) -գրաֆի համար առաջարկվել է միջակայքային կողային ներկելիության $O(MN^2 + M^2 2^{\Delta(G)})$ բարդությամբ ճանաչման ալգորիթմ:

3.3 պարագրաֆում ուսումնասիրվել է կակտուս գրաֆների որոշակի դասի միջակայքային ներկելիության գոյության և կառուցման խնդիրները: Մասնավորապես, ապացուցվել են հետևյալ արդյունքները.

Թեորեմ 3.3.1. Եթե G գրաֆը կամուրջ չպարունակող կակտուս գրաֆ է այնպես, որ բավարարվում է հետևյալ պայմանը.

* G գրաֆում կամայական կենտ պարզ ցիկլի երկարություն մեծ կամ հավասար է գրաֆում պարզ կենտ ցիկլերի քանակից,

այպա G գրաֆը ունի միջակայքային կողային ներկում այն և միայն այն դեպքում, երբ $|E(G)| \equiv 0 \pmod{2}$:



Նկ. 3.1: 9 գագաթ ունեցող G գրաֆը, որը չունի միջակայքային կողային ներկում:

Թեորեմ 3.3.2. Եթե G -ն կակտուս գրաֆ է այնպես, որ բավարարվում են հետևյալ երկու պայմանները.

(a) G գրաֆում կամայական կենտ պարզ ցիկլի երկարություն մեծ կամ հավասար է գրաֆում պարզ կենտ ցիկլերի քանակից,

(b) G գրաֆի բոլոր պարզ ցիկլերի երկարությունների գումարը զույգ է,

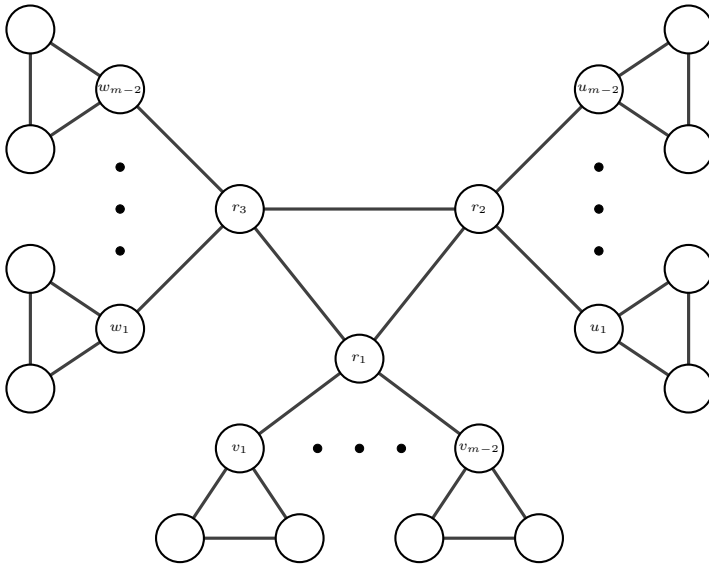
ապա G գրաֆը ունի միջակայքային կողային ներկում:

Հարկ է նշել, որ Թեորեմ 3.3.1-ի (*) պայմանի (նկ. 3.1) և Թեորեմ 3.3.2-ի (b) պայմանի բացակայության պարագայում նշված պնդումները սխալ են:

3.4 պարագրաֆը նվիրված է ցիկլիկ ծառերի միջակայքային կողային ներկումների գոյության, կառուցման և թվային պարամետրերի գնահատականների խնդիրների հետազոտմանը: Մասնավորապես, ապացուցվել է հետևյալը.

Թեորեմ 3.4.1. Կամայական G ցիկլիկ ծառ, որը կենտ երկարությամբ պարզ ցիկլ չէ, միջակայքային ներկելի է: Ավելին, $w(G) \leq \Delta(G) + 2$:

Նշենք, որ Թեորեմ 3.4.1-ի համար $w(G)$ պարամետրի վերին գնահատականը հասանելի է (նկ. 3.2):



Նկ. 3.2: G ցիկլիկ ծառի կառուցվածքի պատկերը, որի համար $w(G) = \Delta(G) + 2$:

Հիմնական արդյունքներն ու հետևությունները

Այս աշխատանքում դիտարկվել են գրաֆների տարբեր դասերի՝ Պ դասին պատկանելու խնդիրներ, այդ դասին պատկանող գրաֆների համար՝ $w(G)$ և $W(G)$ պարամետրերի գնահատման և ճշգրիտ արժեքների որոշման խնդիրներ, ցիկլային կառուցվածքի վրա

սահմանափակումներով գրաֆների դասերի միջակայքային ներկելիության խնդիրներ, ինչպես նաև գրաֆների որոշակի դասի միջակայքային ներկելիության ճանաչման ալգորիթմ:

Աշխատանքում ստացվել են հետևյալ արդյունքները:

1) Միջակայքային ներկումներ ունեցող գրաֆների $w(G)$ և $W(G)$ պարամետրերի հասանելի գնահատականներ և որոշ գրաֆների դասերի համար այդ պարամետրերի ճշգրիտ արժեքներ,

2) Հարթ և արտաքին հարթ գրաֆների միջակայքային կողային ներկումներում մասնակցող հնարավոր գույների քանակի հասանելի վերին գնահատականներ, մասնավորապես, Աքսենովիչի հիպոթեզի ապացույց,

3) Լրիվ բազմակողմանի գրաֆների միջակայքային կողային ներկում ունեցող որոշ դասերի նկարագրություն, մասնավորապես, ապացուցվել է, որ $K_{2n, 2n, 2n}$ գրաֆը ունի միջակայքային t -ներկում, այն և միայն այն դեպքում, երբ $4n \leq t \leq 8n - 2$, ինչպես նաև հաստատվել է Շաո, Լի, Վանգ, Վանգ և Ժանգի կողմից առաջարկված հիպոթեզը լրիվ 4-կողմանի գրաֆների միջակայքային ներկելիության մասին,

4) Լրիվ բազմակողմանի գրաֆների միջակայքային կողային ներկում չունեցող որոշ դասերի նկարագրություն, մասնավորապես, ապացուցվել է, որ լրիվ r -կողմանի $K_{n, n+1, \dots, n+1}$ գրաֆը չունի միջակայքային կողային ներկում, եթե n -ը կենտ է կամ r -ը զույգ,

5) G կակտուս (N, M) -գրաֆների միջակայքային կողային ներկելիության $O(MN^2 + M^{2\Delta(G)})$ բարդությամբ ճանաչման ալգորիթմ,

6) Կակտուս գրաֆների, ցիկլիկ ծառերի միջակայքային կողային ներկումների գոյության, կառուցման և թվային պարամետրերի գնահատականների հետ առնչվող մի շարք արդյունքներ, մասնավորապես, ապացուցել ենք, որ կամայական G ցիկլիկ ծառ, որը կենտ երկարությամբ պարզ ցիկլ չէ, միջակայքային ներկելի է, ավելին $w(G) \leq \Delta(G) + 2$:

Ատենախոսության թեմայի շրջանակներում հրապարակված աշխատանքների ցանկ

1. L. Muradyan, On interval edge-coloring of complete multipartite graphs, XIV Годишная научная конференция РАУ (Сборник статей), Ереван, Армения, 2020, стр. 41-45,
2. A. Sahakyan, L. Muradyan, Interval edge-coloring of even block graphs, Norwegian Journal of Development of the International Science, 70-1, (2021) pp. 26-30,
3. L. Muradyan, On interval edge-colorings of complete multipartite graphs, International Conference Mathematics & IT: Research and Education (MITRE-2021), Chişinău, Republic of Moldova, 2021, pp. 58-59,
4. L. Muradyan, On interval edge-colorings of complete multipartite graphs, Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences 56 (1) (2022) pp. 19-26,
5. L. Muradyan, P. Petrosyan, On the algorithm of recognizing of interval colorability of cactus graphs, XVII Годишная научная конференция РАУ (Сборник научных работ), Ереван, Армения, 2024, стр. 42-43,

6. L. Muradyan, On interval edge-coloring of planar graphs, Combinatorics 2024, Riva Marina Resort Carovigno (Br), Italy, 2024, p. 118,
7. P. Petrosyan, L. Muradyan, Some bounds on the number of colors in interval edge-colorings of graphs, Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences 58 (2) (2024) pp. 57–65,
8. A. Hambardzumyan, L. Muradyan, Upper bounds on the number of colors in interval edge-colorings of graphs, Discrete Mathematics 348 (2025) 114229,
9. L. Muradyan, Some bounds on the number of colors in interval edge colorings of cactus graphs, Abstracts of the conference "Current Issues in Computer Science and Applied Mathematics 2025", YSU, Yerevan, 2025, pp. 51–52:

Abstract

It is known that the problems arising from the modeling of real-life issues are, as a rule, not reduced to the classical vertex (or edge) coloring problem, but rather to the study of such colorings with various constraints. This makes the study of vertex (or edge) colorings with additional constraints important. For example, interval edge colorings of graphs, which are proper edge colorings where the edges incident to each vertex are colored with consecutive colors, can be used in the modeling of problems related to the existence and construction of compact schedules. This work is devoted to the study of interval edge colorings and their parameters.

We consider finite undirected graphs without loops and multiple edges. Let $V(G)$ and $E(G)$ denote the sets of vertices and edges, respectively. The maximum degree of vertices in graph G is denoted by $\Delta(G)$. A graph $G = (V, E)$ is called (n, m) -graph if $|V| = n$ and $|E| = m$.

A graph G is called a complete r -partite ($r \geq 2$) graph if its vertices can be partitioned into r independent sets $V_1, \dots, V_r$ such that each vertex in V_i is adjacent to all the other vertices in V_j for $1 \leq i < j \leq r$. A complete r -partite graph G is a complete balanced r -partite graph if $|V_1| = |V_2| = \dots = |V_r|$. Let $K_{n_1, \dots, n_r}$ denote a complete r -partite graph with independent sets $V_1, V_2, \dots, V_r$ of sizes $n_1, n_2, \dots, n_r$.

A graph G is planar if it can be drawn on the plane without edge crossings. A graph G is outerplanar if it has a planar drawing for which all vertices belong to the unbounded face of the drawing.

The graph G is called a cactus if the graph is connected and every edge belongs to at most one simple cycle. The graph G is called a cyclic tree if the graph is connected and every vertex belongs to at most one simple cycle.

A proper edge-coloring of graph G is a mapping $\alpha : E(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ such that $\alpha(e) \neq \alpha(e')$ for every pair of adjacent edges e and e' . If α is a proper edge-coloring of G and $v \in V(G)$, then $S(v, \alpha)$ denotes the set of colors adjacent to the vertex v .

A proper edge-coloring $\alpha : E(G) \rightarrow \{1, \dots, t\}$ is called interval t -coloring of G if all colors are used and for each $v \in V(G)$ the set $S(v, \alpha)$ is an interval of integers.

A graph G is interval colorable if it has an interval t -coloring for some positive integer t . The set of all interval colorable graphs is denoted by $\mathfrak{N}$. For a multigraph $G \in \mathfrak{N}$, the least and the greatest values of t for which G has an interval t -coloring are denoted by $w(G)$ and $W(G)$, respectively.

In this dissertation, we consider the problems related to determining whether graphs of various classes belong to the class $\mathfrak{N}$, as well as the problems of bounding and determining the parameters $w(G)$ and $W(G)$ for graphs belonging to $\mathfrak{N}$. The work also addresses the problem of interval colorability of classes of graphs with constraints on their cyclic structure, as well as an algorithm for recognizing the interval colorability of a certain class of graphs.

In particular, the following results were obtained.

1. Sharp bounds for the parameters $w(G)$ and $W(G)$ of graphs with interval colorings, and the exact values of these parameters for some classes of graphs,
2. Sharp upper bounds on the number of possible colors used in interval edge-colorings of planar and outerplanar graphs, in particular, a proof of Axenovich's conjecture,

3. A description of certain classes of complete multipartite graphs that admit interval edge colorings; in particular, it is proved that the graph $K_{2n, 2n, 2n}$ has an interval t -coloring if and only if $4n \leq t \leq 8n - 2$, and the conjecture by Shao, Li, Wang, Wang, and Zhang on the interval colorability of complete 4-partite graphs is confirmed,
4. A description of certain classes of complete multipartite graphs that do not admit interval edge-colorings; specifically, it is shown that the complete r -partite graph $K_{n, n+1, \dots, n+1}$ does not have an interval edge coloring if n is odd or r is even,
5. A recognition algorithm for interval colorability of cactus (N, M) -graphs with $O(MN^2 + M^2 2^{\Delta(G)})$ time complexity,
6. Some results related to the existence, construction, and estimation of numerical parameters of interval edge-colorings for cactus graphs and cyclic trees; in particular, it is proved that any cyclic tree G that is not a simple cycle of odd length is interval colorable, and $w(G) \leq \Delta(G) + 2$.

Резюме

Известно, что задачи, возникающие при моделировании прикладных проблем, как правило, сводятся не к классической задаче раскраски вершин (или рёбер), а к исследованию таких раскрасок с различными ограничениями. В свете этого, особую актуальность приобретает изучение раскрасок вершин (или рёбер) с дополнительными ограничениями. Например, интервальные рёберные раскраски графов – правильные рёберные раскраски, при которых рёбра, инцидентные каждой вершине, окрашены в последовательные цвета, могут использоваться при моделировании задач, связанных с существованием и построением компактных расписаний. Данная работа посвящена исследованию интервальных рёберных раскрасок и их параметров.

В диссертационной работе рассматриваются конечные неориентированные графы без кратных ребер и петель. Пусть $V(G)$ — множество вершин графа G , $E(G)$ — множество ребер графа G , а $\Delta(G)$ — максимальная степень вершин в графе G . Граф $G = (V, E)$ называется (n, m) -графом, если $|V| = n$ и $|E| = m$.

Граф G называется полным r -дольным графом ($r \geq 2$), если множество его вершин можно разбить на r независимых подмножеств $V_1, \dots, V_r$ так, что каждая вершина из V_i соединена со всеми вершинами из V_j при $1 \leq i < j \leq r$. Полный r -дольный граф G называется полным сбалансированным r -дольным графом, если $|V_1| = |V_2| = \dots = |V_r|$. Полный r -дольный граф с независимыми подмножествами $V_1, V_2, \dots, V_r$ размеров $n_1, n_2, \dots, n_r$ соответственно, обозначим через $K_{n_1, \dots, n_r}$.

Граф G называется планарным, если его можно изобразить на плоскости без пересечений рёбер. Граф G называется внешнепланарным, если у него существует планарное изображение, в котором все вершины принадлежат внешней (неограниченной) грани.

Граф G называется кактусом, если он связный и каждое ребро принадлежит не более чем одному простому циклу. Граф G называется циклическим деревом, если он связный и каждая вершина принадлежит не более чем одному простому циклу.

Функция $\alpha : E(G) \rightarrow \mathbb{Z}$ называется правильной реберной раскраской графа G , если смежные ребра окрашены в различные цвета. Если α — правильная реберная раскраска графа G и $v \in V(G)$, то через $S(v, \alpha)$ обозначим множество цветов ребер, инцидентных вершине v .

Правильная реберная раскраска $\alpha : E(G) \rightarrow \{1, \dots, t\}$ называется интервальной t -раскраской графа G , если каждый из t цветов использован и для любой вершины $v \in V(G)$ множество $S(v, \alpha)$ образует интервал целых чисел.

Граф G называется интервально раскрашиваемым, если он обладает интервальной t -раскраской для некоторого t . Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество всех интервально раскрашиваемых графов. Для графа $G \in \mathfrak{N}$ через $w(G)$ и $W(G)$ обозначим, соответственно, наименьшее и наибольшее t , при котором G обладает интервальной t -раскраской.

В настоящей работе для различных классов графов рассматривались как задачи принадлежности этих графов классу $\mathfrak{N}$, так и задачи оценивания и определения точных значений параметров $w(G)$ и $W(G)$ для графов, принадлежащих классу $\mathfrak{N}$. Кроме того, в работе рассматривались задачи интервальной раскрашиваемости различных классов графов с ограничениями на их циклическую структуру, а также алгоритм распознавания интервальной раскрашиваемости некоторого класса графов. В частности, получены

следующие результаты:

1. достижимые оценки параметров $w(G)$ и $W(G)$ интервально раскрашиваемых графов, а также точные значения этих параметров для некоторых классов графов;
2. достижимые верхние оценки числа цветов в интервальных реберных раскрасках планарных и внешнепланарных графов, в частности, доказательство гипотезы Аксенович;
3. описание некоторых классов полных многодольных графов, допускающих интервальную реберную раскраску, в частности, доказано, что граф $K_{2n, 2n, 2n}$ имеет интервальную t -раскраску тогда и только тогда, когда $4n \leq t \leq 8n - 2$, а также подтверждена справедливость гипотезы Шао, Ли, Вана, Вана и Чжана об интервальной раскраске полных 4-дольных графов;
4. описание некоторых классов полных многодольных графов, не обладающих интервальной реберной раскраской, в частности, показано, что полный r -дольный граф $K_{n, n+1, \dots, n+1}$ не имеет интервальной раскраски, если n нечётно или r чётно;
5. алгоритм распознавания интервальной раскрашиваемости кактусовых (N, M) -графов с временной сложностью $O(MN^2 + M^2 2^{\Delta(G)})$;
6. некоторые результаты, касающиеся задач существования, построения и оценки числовых параметров интервальных реберных раскрасок кактусов и циклических деревьев, в частности, доказано, что любое циклическое дерево G , которое не является простым циклом нечётной длины, является интервально раскрашиваемым, и, кроме того, $w(G) \leq \Delta(G) + 2$.

