ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Գրիգոր Արմենի Կիրակոսյան

$\mathcal{L}$-փաթեթի տիպի ինտեգրալ օպերատորների որոշ դասերի մասին:

Ա.01.02 – «Դիֆերենցիալ հավասարումներ, մաթեմատիկական ֆիզիկա»
մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման համար

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ – 2025

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Григор Арменович Киракосян

О некоторых классах интегральных операторов типа $\mathcal{L}$-свертки.

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.02- “Дифференциальные уравнения, математическая физика”

ЕРЕВАН - 2025

Ատենախոսության թեման հաստատվել է ՀՀ ԳԱԱ մաթեմատիկայի ինստիտուտում

Գիտական ղեկավար՝	Ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու Ա.Հ. Քամալյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	Ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Վ.Ն. Մարգարյան
	Ֆիզ. մաթ. գիտ. թեկնածու Գ.Ս. Հակոբյան
Առաջատար կազմակերպություն՝	Հարավային դաշնային համալսարան (ք. Դոնի Ռոստով, ՌԴ)

Պաշտպանությունը կկայանա 2025թ. հունիսի 2-ին, ժ. 15:00-ին Երևանի պետական համալսարանի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ալեք Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2025թ. ապրիլի 28-ին:

Մասնագիտական խորհրդի գիտական քարտուղար
ֆիզ. մաթ. գիտ. դոկտոր Կ.Լ. Ավետիսյան

Тема диссертации утверждена в институте математики НАН РА

Научный руководитель :	кандидат физ. мат. наук А.Г. Камалян
Официальные оппоненты :	доктор физ. мат. наук В.Н. Маргарян
	кандидат физ. мат. наук Г.С. Акобян
Ведущая организация :	Южный федеральный университет (г. Ростов-на-Дону, РФ)

Защита состоится 2-го июня 2025г. в 15:00 часов на заседании действующего в Ереванском государственном университете специализированного совета 050, по адресу: Ереван 0025, ул. А. Манукяна, 1.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Ереванского государственного университета.

Автореферат разослан 28-го апреля 2025г.

Ученый секретарь специализированного совета,
доктор физ. мат. наук К.Л. Аветисян

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

В различных задачах механики, физики и математики (см. [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]) возникает необходимость исследования уравнения типа свертки. В настоящее время имеется обширная литература, посвящённая исследованию различных аспектов операторов типа свёртки (см. например [8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]).

Уравнения свёртки на полуоси впервые были рассмотрены Винером и Хопфом (см. [15]), в честь которых эти уравнения и получили своё название.

Теория Фредгольма для операторов Винера–Хопфа была развита в работах М. Крейна, И. Гохберга, Р. Дудучавы, Р. Шнайдера, А. Бётчера, И. Спитковского и других авторов (см. [16, 17, 18, 19, 20]).

Ядро уравнения свертки $K(x,t) = k(x-t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(\partial_x + \partial_t)K = 0.$$

В работах [21, 22, 23] рассмотрены интегральные уравнения с ядрами, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям более общего вида. В частности, исследована задача фредгольмовости и обратимости этих операторов.

Оператор свертки $W^0(a)$ на оси с символом $a \in L_\infty(\mathbb{R})$ в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ может быть определена по формуле $W^0(a) = F^{-1}m(a)F$, где F – преобразование Фурье, а $m(a)$ – оператор умножения на функцию a.

В работе [24] введено понятие оператора $\mathcal{L}$-свертки путем замены оператора Фурье на частично изометрический оператор, являющийся спектральным преобразованием самосопряжённого оператора Штурма–Лиувилля. В этой работе также введено и изучено фредгольмовые свойства оператора $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+)$, где $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. В случае нулевого потенциала эти операторы совпадают с операторами свертки и Винера–Хопфа. В работах [25, 26, 27, 28] в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+)$ подробно исследован случай безотражательного потенциала при различных предположениях относительно символа оператора.

Цель работы.

(1) Изучить задачу фредгольмовости оператора $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа в весовых пространствах Лебега с произвольным весом Макенхаупта, в случае безотражательного потенциала.

(2) Выделить классы интегральных операторов, допускающих реализацию в виде операторов $\mathcal{L}$-свертки и операторов $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа, и исследовать их фредгольмовые свойства на основе этих реализаций.

(3) Выявить новые классы операторов, не допускающие реализацию в виде операторов $\mathcal{L}$-свертки и $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа, но обладающие близкими свойствами.

Методы исследования. В работе применены методы спектральной теории дифференциальных операторов, теории операторов Винера-Хопфа и Тёплица, а также общей теории фредгольмовых операторов.

Научная новизна. В работе получены следующие основные результаты:

(1) В случае безотражательного потенциала и кусочно-непрерывного матричного символа получен критерий фредгольмовости оператора $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа в пространствах $L_p(\mathbb{R}, w)$, $1 < p < \infty$, с произвольным весом Макенхаупта, а также получена формула для индекса.

(2) Получено интегральное представление посредством интегрально-показательных функций для оператора $W^0_{\mathcal{L}}(-sgn)$ в пространстве $L_p(\mathbb{R}, w)$ в случае безотражательного потенциала

$$v(x) = -\frac{2\mu^2}{ch^2\mu(x-\xi)},$$

где m и μ – произвольные положительные числа, а $\xi = {}^1\!/_{2\mu}\ \ln({}^{m^2}\!/_{2\mu})$.

(3) Получено интегральное представление для одного класса операторов $W_{\mathcal{L}}(a)$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}_+)$ в случае рационального коэффициента отражения

$$r(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2+1}.$$

(4) Получены критерии обратимости и фредгольмовости операторов $U^*m(a)U$ и $\pi_+U^*m(a)U\pi^0_+$ действующих в пространствах $L^n_2(\mathbb{R})$ и $L^n_2(\mathbb{R}_+)$ соответственно, в случае, когда потенциал является дельта-распределением Дирака, а оператор U построен на основе аналогов решений Йоста.

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер и посвящена исследованию интегральных уравнений на оси и полуоси, обобщающих классические операторы свёртки и Винера-Хопфа. Полученные результаты могут быть применены в теории интегральных операторов.

Публикации. Основные результаты диссертации были опубликованы в 5 научных статьях. Список статей приведен в конце списка литературы.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения и списка цитированной литературы, включающего 59 наименований. Объем диссертации – 110 страниц.

Содержание работы

Во введении приведен исторический обзор результатов, связанных с темой диссертации а также краткое описание содержания диссертации.

В первой главе рассматривается уравнение Штурма-Лиувилля, вводится понятия данных рассеяния, безотражательного потенциала и спектрального преобразования. Рассмотрена также уравнения Гельфанда-Левитана-Марченко.

Пусть $\mathcal{L}$ – самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R})$, порожденный дифференциальным выражением

$$ly := -y'' + v(x)y = \lambda^2 y, \tag{1}$$

с вещественным потенциалом v, удовлетворяющий условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)|v(x)|dx < \infty. \tag{2}$$

Решения Йоста $e_\pm(x,\lambda)$ представляют собой решения уравнения (1), (2), определяемые граничными условиями

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{i\lambda x} e_\pm(x,\lambda) = 1, \quad \lim_{x\to\pm\infty} e^{i\lambda x} e'_\pm(x,\lambda) = i\lambda. \tag{3}$$

При вещественных значениях $\lambda \neq 0$ пары функций $e_+(x,\lambda)$, $e_+(x,-\lambda)$ и $e_-(x,\lambda)$, $e_-(x,-\lambda)$ образуют фундаментальные системы решений (1). В частности,

$$e_+(x,\lambda) = b(\lambda)e_-(x,-\lambda) + b_0(\lambda)e_-(x,\lambda).$$

Функция $b_0(\lambda)$ аналитична в верхней полуплосткости $\operatorname{Im}\lambda > 0$ и имеет там лишь конечное число простых нулей $i\mu_k$ ($\mu_k > 0$, $k = 1,\ldots N$), которые лежат на мнимой полуоси.

Каждое собственное значение $\lambda_k = (i\mu_k)^2$ ($k = 1,\ldots,N$) является простым, и ему соответствуют собственная функция $e_+(x, i\mu_k)$ и линейно зависимая от нее собственная функция $e_-(x,-i\mu_k)$ (см. [29, 30, 31]). Функция $t(\lambda) = b_0^{-1}(\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) называется коэффициентом прохождения.

Обратные величины норм собственных функций

$$m_k^{\pm} := \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |e_{\pm}(x,\pm i\mu_k)|^2\,dx\right)^{-1/2}$$

называют нормирующими множителями.

Функции $r_-(\lambda) = b(\lambda)t(\lambda)$ и $r_+(\lambda) = -b(-\lambda)t(\lambda)$ называются соответственно левым и правым коэффициентами отражения, а наборы величин $\{r_+(\lambda), i\mu_k, m_k^+; k = 1,\ldots,N\}$ и $\{r_-(\lambda), i\mu_k, m_k^-; k = 1,\ldots,N\}$ называют соответственно правым и левым данными рассеяния.

Обратная задача теории рассеяния уравнения (1) состоит в восстановлении потенциала по левым или правым данным рассеяния и нахождении необходимых и достаточных условий, которым должен удовлетворять взятый набор $\{r(\lambda), i\mu_k, m_k; k = 1,\ldots,N\}$, чтобы он являлся левыми либо правыми данными рассеяния уравнения (1) при некотором потенциале v, удовлетворяющему условию (2).

Интерес представляют те данные рассеяния, при которых уравнения Гельфанда–Левитана–Марченко (см. [30]) допускают явное решение. К таким данным, например, относится набор вида $\{0, i\mu_k, m_k; k = 1,\ldots,N\}$, где μ_k, m_k положительные числа, причем μ_k различны друг от друга. Потенциалы, обладающие данными рассеяния такого типа, называются *безотражательными*, так как в этом случае $r_{\pm} = 0$. Таким примером является также набор $\left\{-\frac{1}{\lambda^2+1}, 0, 0\right\}$.

С помощью решений Йоста и коэффициента прохождения, операторы $U_{\pm} : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ определяются согласно формуле

$$U_{\mp}y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}t(\lambda)\int_{-\infty}^{\infty} e_{\pm}(x,\pm\lambda)y(x)dx, \tag{4}$$

а частичная изометрия $U : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ строится по формуле

$$U = m(\chi_+)U_- + m(\chi_-)JU_+, \tag{5}$$

и называется спектральным преобразованием оператора $\mathcal{L}$.

Во второй главе приведены необходимые для дальнейшего свойства фредгольмового оператора, свойства весовых пространств с весом Макенхаупта, критерий фредгольмовости Теплицева оператора с кусочно-непрерывным символом, сформулирован локальный прицип‌ Гохберга-Крупника, даны определения операторов $\mathcal{L}$-свертки и $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа. При некоторых ограничениях на весовую функцию доказана компактность Ганкелева оператора с непрерывным символом.

Линейный ограниченный оператор $A : X \to Y$, где X, Y – банаховы пространства, называется фредгольмовым, если его образ замкнут (т.е. $\operatorname{Im}A = \overline{\operatorname{Im}A}$), и конечномерны его ядро $\ker A := \{x \in X; Ax = 0\}$ и коядро $\operatorname{Coker}A := {}^{Y}\!/_{\operatorname{Im}A}$. Число $\operatorname{Ind}A := \dim\ker A - \dim\operatorname{Coker}A$ называют индексом оператора A, а множество $\{\lambda \in \mathbb{C}; T - \lambda I$ не фредгольмов$\}$ – существенным спектром оператора A.

Для линейного пространства X через X^n (соответственно через $X^{n\times n}$) будем обозначать множество n-мерных столбцов (соответственно $n \times n$ матриц). Для оператора A, действующего из линейного пространства X в линейное пространство Y, оператор

$$diag(A, \dots, A) \colon X^n \to Y^n$$

также будем обозначать через A, т.е. действие оператора A на X^n будем понимать покомпонентно.

Функцию $a \in L_\infty(\mathbb{R})$ будем называть U-мультипликатором в $L_p(\mathbb{R}, w)$, если отображение $f \mapsto U^* m(a) U f$ отображает $L_2(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R}, w)$ в себя и существует постоянная $c > 0$ такая, что одновременно для всех $f \in L_2(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R}, w)$ имеет место неравенство

$$\|U^* m(a) U f\|_{p,w} \le c \|f\|_{p,w}.$$

Поскольку $L_2(\mathbb{R}) \cap L_p(\mathbb{R}, w)$ плотно в $L_p(\mathbb{R}, w)$, то сказанное означает, что оператор $U^* m(a) U$ допускает непрерывное продолжение до действующего на $L_p(\mathbb{R}, w)$ ограниченного оператора, который мы будем обозначать через $W^0_{\mathcal{L}}(a)$ и будем называть оператором $\mathcal{L}$-свертки на $L_p(\mathbb{R}, w)$ с символом a.

Множество U-мультипликаторов будем обозначать через $\mathcal{M}_{p,w,\mathcal{L}}$. В случае $a = (a_{ij}) \in \mathcal{M}^{n\times n}_{p,w,\mathcal{L}}$ под оператором $\mathcal{L}$-свертки мы понимаем оператор

$$W^0_{\mathcal{L}}(a) = \big(W^0_{\mathcal{L}}(a_{ij})\big) : L^n_p(\mathbb{R}, w) \to L^n_p(\mathbb{R}, w),$$

здесь, как и в дальнейшем, через $L^n_p(\mathbb{R}, w)$ будем обозначать алгебру $(L_p(\mathbb{R}, w))^n$ (см. определение пространства X^n для банахова пространства X).

Определим операторы $\pi_+ : L_p(\mathbb{R}, w) \to L_p(\mathbb{R}_+, w)$, $\;\pi^0_+ : L_p(\mathbb{R}_+, w) \to L_p(\mathbb{R}, w)$ по формулам

$$(\pi_+ y)(x) = y(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \qquad (\pi^0_+ y)(x) = \begin{cases} y(x), & \text{если } x \in \mathbb{R}_+, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R}_-. \end{cases}$$

Пусть $a \in \mathcal{M}^{n\times n}_{p,w,\mathcal{L}}$. Оператор $W_{\mathcal{L}}(a) := \pi_+ W^0_{\mathcal{L}}(a) \pi^0_+ \colon L^n_p(\mathbb{R}_+, w) \to L^n_p(\mathbb{R}_+, w)$, $1 < p < \infty$ будем называть оператором $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа с символом a.

Поскольку при $v = 0$, оператор U совпадает с преобразованием Фурье F, то операторы $W^0_{\mathcal{L}}(a)$ и $W_{\mathcal{L}}(a)$ в этом случае совпадают, соответственно определёнными в весовых пространствах, оператором свёртки и оператором Винера-Хопфа (см. [8]). По этой причине в этом случае во всех обозначениях мы опускаем индекс $\mathcal{L}$ и будем пользоваться стандартными обозначениями $\mathcal{M}_{p,w}$, $\mathcal{M}^{n\times n}_{p,w}$, $W^0(a)$, $W(a)$. Множество мульпликаторов $\mathcal{M}_{p,w}$ (см. [8]) является банаховой алгеброй с нормой

$$\|a\|_{\mathcal{M}_{p,w}} := \left\|W^0(a)\right\|_{B(L_p(\mathbb{R},w))}.$$

Через $PC := PC(\dot{\mathbb{R}})$ обозначим алгебру всех кусочно-непрерывных функций на $\dot{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Другими словами, функция a принадлежит PC тогда и только тогда, когда для любого $x_0 \in \dot{\mathbb{R}}$ существуют пределы $a(x_0 - 0) := \lim\limits_{x \to x_0 - 0} a(x)$, $a(x_0 + 0) := \lim\limits_{x \to x_0 + 0} a(x)$, причем

$$a(\infty - 0) := a(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} a(x), \qquad a(\infty + 0) := a(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} a(x).$$

Функции из PC имеющие ограниченную вариацию $Var(a)$ принадлежат алгебре $\mathcal{M}_{p,w}$. Обозначим через $PC_{p,w}$ (соответственно $C_{p,w}(\dot{\mathbb{R}})$) замыкание в $\mathcal{M}_{p,w}$ множества кусочно непрерывных функций имеющих ограниченную вариацию и не более чем конечное число скачков (соответственно непрерывных на $\dot{\mathbb{R}}$ функций) и пусть $C_{p,w}(\bar{\mathbb{R}}) := PC_{p,w} \cap C(\bar{\mathbb{R}})$, где $\bar{\mathbb{R}} = R \cup \{\pm\infty\}$ – двухточечная компактификация $\mathbb{R}$.

Пусть $\nu \in (0,1)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Множество

$$\mathcal{A}(z_1, z_2; \nu) := \left\{ \frac{z_2 e^{2\pi(x+i\nu)} - z_1}{e^{2\pi(x+i\nu)} - 1}\,, \quad x \in \mathbb{R} \right\} \cup \{z_1, z_2\}$$

является дугой окружности, соединяющей точки z_1 и z_2, и содержащая концевые точки z_1 и z_2. Рассмотрим также множество

$$\mathcal{H}(z_1, z_2; \nu_1, \nu_2) = \bigcup_{\nu \in [\nu_1, \nu_2]} \mathcal{A}(z_1, z_2; \nu)$$

называемое рогом между z_1 и z_2 из $\mathbb{C}$, и определяемое числами ν_1, ν_2, $0 < \nu_1 \leqslant \nu_2 < 1$ (см. [8]).

Каждое из множеств (см. [8])

$$I_\xi(p,w) = \left\{ \mu \in \mathbb{R}\colon \left| \frac{x-\xi}{x-i} \right|^{\mu} w(x) \in A_p(\mathbb{R}) \right\}, \quad \xi \in \mathbb{R}$$
$$I_\infty(p,w) = \left\{ \mu \in \mathbb{R}\colon |x-i|^{-\mu}\, w(x) \in A_p(\mathbb{R}) \right\}$$

является открытым интервалом длиной не превышающей единицу и содержащий 0

$$I_\xi(p,w) = \left(-\nu_\xi^-(p,w), 1 - \nu_\xi^+(p,w) \right), \quad \xi \in \dot{\mathbb{R}},$$

где $0 < \nu_\xi^-(p,w) \leqslant \nu_\xi^+(p,w) < 1$. Рассмотрим также числа $\nu_x^0(p,w) = \frac{1}{2}\left(\nu_x^-(p,w) + \nu_x^+(p,w)\right)$, где $x \in \dot{\mathbb{R}}$.

В третьей главе получен критерий фредгольмовости оператора $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа в весовых пространствах в случае безотражательного потенциала и кусочно-непрерывного матричного символа.

Теорема 3.5.1. *Пусть $w \in A_p(\mathbb{R})$, $a \in PC_{p,w}^{n\times n}$, $\mathcal{L}$– оператор, порождённый дифференциальным уравнением Штурма–Лиувилля, соответствующим безотражательному потенциалу. Тогда оператор $W_{\mathcal{L}}(a)$ фредгольмов в пространстве $L_p^n(\mathbb{R}_+, w)$ тогда и только тогда, когда*

$$\det[(1-\mu)a(x-0) + \mu a(x+0)] \neq 0 \quad \textit{при} \ \ x \in \mathbb{R} \quad \textit{и} \ \ \mu \in \mathcal{H}\left(0,1; \nu_\infty^-(p,w), \nu_\infty^+(p,w)\right) \quad \textit{и}$$
$$\det[(1-\mu)a(+\infty) + \mu a(-\infty)] \neq 0 \quad \textit{при} \ \ \mu \in \mathcal{H}\left(0,1; \nu_0^-(p,w), \nu_0^+(p,w)\right).$$

В этой главе также исследуется задача вычисления индекса фредгольмового оператора $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа, получены формулы индекса при различных предположениях. Полученные результаты проанализированы в случаях, когда: символ имеет конечное число разрывов; символ является непрерывным; символ является скалярной функцией.

В четвертой главе исследуется обратимость одного класса интегральных операторов путем их реализации как оператора $\mathcal{L}$-свёртки, и также фредгольмовость иного класса интегральных операторов путем их реализации как оператора $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа.

Пусть m и μ произвольные положительные числа, $\xi = {}^1\!/_{2\mu} \ln({}^{m^2}\!/_{2\mu})$, $d \in \mathbb{C}$. Определим функцию φ следующим выражением

$$\varphi(x) := \frac{m\, e^{\mu\xi}}{2\,\mathrm{ch}(\mu\,(x-\xi))} = \frac{2\,\mu\, m\, e^{\mu x}}{m^2 + 2\,\mu\, e^{2\mu x}}\,.$$

Рассмотрим интегральный оператор $T_d : L_p(\mathbb{R}, w) \to L_p(\mathbb{R}, w)$, $w \in A_p(\mathbb{R})$, $1 < p < \infty$, действующий по формуле

$$(T_d y)(x) := (Sy)(x) - \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(Ei(\mu(s-x)) - Ei(\mu(x-s))\right) \varphi(x)\, \varphi(s)\, y(s)\, ds +$$

$$+ d\, \varphi(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(s)\, y(s)\, ds,$$

где

$$Ei(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\, dt$$

интегральная показательная функция, S – сингулярный интегральный оператор на оси.

Техника обращения оператора T_d основана на теории операторов $\mathcal{L}$-свёртки. В частности, в приведенной ниже теореме T_d реализуется как оператор $\mathcal{L}$-свёртки с символом, равным $a(x) = -\operatorname{sgn}(x)$, в случае, когда $\mathcal{L}$ порождена уравнением Штурма-Лиувилля с некоторым безотражательным потенциалом (см. [32]).

Теорема 4.1.2. *В случае $d \neq 0$ оператор T_d ограничен и обратим в $L_p(\mathbb{R}, w)$, $1 < p < \infty$. Более того, $T_d^{-1} = T_{d^{-1}}$. В случае $d = 0$, оператор T_0 является обобщенно обратимым, т.е. $T_0 T_0 T_0 = T_0$. Уравнение*

$$T_0 y = f, \qquad f \in L_p(\mathbb{R}, w),$$

имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, \varphi(x)\, dx = 0.$$

Если это условие выполняется, то общее решение имеет вид

$$y = T_0 f + \alpha \varphi,$$

где α произвольное комплексное число.

Пусть $S : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ сингулярный интегральный оператор, а $P_+ = \frac{1}{2}(I + S)$ его проектор. Пусть функция k принадлежит подпространству $L_1(\mathbb{R}) \cap H_2(\mathbb{R})$, где $H_2(\mathbb{R}) := P_+ L_2(\mathbb{R})$. Кроме того, предположим, что существует функция d такая, что $d, d' \in L_1(\mathbb{R})$ и $d'' = k$. Рассмотрим интегральный оператор $\mathcal{T} : L_2(\mathbb{R}_+) \to L_2(\mathbb{R}_+)$, определенный по формуле

$$(\mathcal{T} y)(x) = y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} y(t) k(t-x) dt +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2e^{-2x}}{4 - e^{-2x}} \int\limits_{0}^{+\infty} \left(1 + \frac{e^{-2t}}{4 - e^{-2t}}\right) y(t) \int\limits_{0}^{+\infty} k(t - x - \tau) e^{-\tau} d\tau dt +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{e^{-2x}}{4 - e^{-2x}}\right) \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{2e^{-2t}}{4 - e^{-2t}} y(t) \int\limits_{-\infty}^{0} k(t - x - \tau) e^{\tau} d\tau dt,$$

Теорема 4.2.1. *Пусть выполнены следующие условия:*

(1) *потенциал* v *оператора* $\mathcal{L}$ *определяется правым набором данных рассеяния* $\left\{-\frac{1}{\lambda^2+1}, 0, 0\right\}$*;*

(2) $k \in L_1(\mathbb{R}) \cap H_2(\mathbb{R})$;

(3) *существует функция* $d \in L_1(\mathbb{R})$*, такая что* $d' \in L_1(\mathbb{R})$ *и* $d'' = k$*;*

(4) *функция* a *определяется равенством*

$$a(\lambda) = 1 + \frac{(F^{-1}k)(\lambda)}{\lambda^2(\lambda^2+2)(\lambda^2+1)^2};$$

тогда имеет место равенство $\mathcal{T} = W_{\mathcal{L}}(a)$.

Теорема 4.2.2. *При условиях (2) и (3) теоремы 4.2.1 оператор* $\mathcal{T}$ *фредгольмов тогда и только тогда, когда*

$$a(\lambda) = 1 + \frac{(F^{-1}k)(\lambda)}{\lambda^2(\lambda^2+2)}(\lambda^2+1)^2 \neq \frac{1}{\lambda^2(\lambda^2+2)} \quad \text{при } \lambda > 0.$$

При выполнении этого условия индекс оператора $\mathcal{T}$ *может быть вычислен по формуле*

$$\operatorname{Ind}\mathcal{T} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty d\operatorname{Arg}\left[\frac{(\sqrt{\lambda}+\sqrt{2}i)(\lambda(\lambda+2)a(\sqrt{\lambda})+1)}{(\sqrt{\lambda}+i)^4(\sqrt{\lambda}-\sqrt{2}i)}\right].$$

В пятой главе рассмотрено уравнение Штурма-Лиувилля с потенциалом равным дельта распределении Дирака, и получены аналоги решений Йоста. С помощью этих решений определяется оператор U, который также является частичной изометрией. Вводится понятие операторов m-свертки и m-Винера-Хопфа. Получены критерии фредгольмовости и обратимости этих операторов.

Рассмотрим следующую задачу:

(A) *Найти функцию* $y \in C(\mathbb{R})$ *удовлетворяющую на множествах* $(-\infty, \xi)$ *и* (ξ, ∞) *дифференциальному уравнению*

$$-y'' = \lambda^2 y$$

такую, что выполнено следующее граничное условие

$$\frac{dy}{dx}(\xi+0,\lambda) - \frac{dy}{dx}(\xi-0,\lambda) = -q\,y(\xi,\lambda).$$

Решения этой задачи $e_\pm(x,\lambda)$ удовлетворяющие дополнительным условиям

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{-i\lambda x}\, e_\pm(x,\lambda) = 1,$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{-i\lambda x}\, \frac{d}{dx}e_\pm(x,\lambda) = i\lambda,$$

имеют следующий вид

$$e_+(x,\lambda) = \begin{cases} \left(1+\dfrac{q}{2i\lambda}\right)e^{i\lambda x} - \dfrac{q\,e^{i2\lambda\xi}}{2i\lambda}\,e^{-i\lambda x}, & x<\xi,\\ e^{i\lambda x}, & x>\xi. \end{cases}$$

$$e_-(x,\lambda) = \begin{cases} e^{i\lambda x}, & x<\xi,\\ \left(1-\dfrac{q}{i2\lambda}\right)e^{i\lambda x} + \dfrac{q\,e^{i2\lambda\xi}}{i2\lambda}\,e^{-i\lambda x}, & x>\xi. \end{cases}$$

Заметим, что задача (A) эквивалентно решению уравнения

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} - q\,\delta(x-\xi) - \lambda^2\right] y(x,\lambda) = 0,$$

где δ – дельта распределение Дирака, в обобщенном смысле. Исходя из этой аналогии будем называть функции $e_\pm$ решениями Йоста задачи (A). По этой аналогии коэффициент прохождения имеет вид

$$t(\lambda) = \frac{i2\lambda}{q + i2\lambda}\,,$$

а коэффициенты отражения $r_\pm$ равны

$$r_-(\lambda) = -\frac{q\,e^{i2\lambda\xi}}{q+i2\lambda}, \quad r_+(\lambda) = -\frac{q\,e^{-i2\lambda\xi}}{q+i2\lambda}.$$

Функции $u_\mp(x,\lambda) = t(\lambda)e_\pm(x,\pm\lambda)$ принимают вид

$$u_-(x,\lambda) = \begin{cases} e^{i\lambda x} - \dfrac{q\,e^{i2\lambda\xi}}{q+i2\lambda}\,e^{-i\lambda x}, & x<\xi, \\ \dfrac{i2\lambda}{q+i2\lambda}\,e^{i\lambda x}, & x>\xi. \end{cases}$$

$$u_+(x,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{i2\lambda}{q+i2\lambda}\,e^{-i\lambda x}, & x<\xi, \\ e^{-i\lambda x} - \dfrac{q\,e^{-i2\lambda\xi}}{q+i2\lambda}\,e^{i\lambda x}, & x>\xi. \end{cases}$$

Функции $u^\pm$ порождают интегралы

$$(U_\pm y)(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u^\pm(x,\lambda)y(x)dx, \quad \lambda\in\mathbb{R},$$

которые сходятся по норме $L_2(\mathbb{R})$ и определяют ограниченные операторы $U_\pm : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$. Аналогично (5), определим оператор $U : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ с помощью равенства

$$U := m(\chi_+)U_- + m(\chi_-)JU_+.$$

Теорема 5.7.1. *Оператор U является частичной изометрией. Справедливы тождества*

$$UU^* = I, \quad U^*U = I - P,$$

где $P : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ одномерный проектор определенный равенством

$$Py(x) = \frac{|q|}{2}\,e^{-\frac{|q|}{2}\,|x-\xi|}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|q|}{2}|t-\xi|}y(t)\,dt.$$

Пусть $a \in L_\infty^{n\times n}(\mathbb{R})$, $\sigma_\xi(x) = e^{ix\xi}$, $r(x) = r_-(x)\sigma_{-2\xi}(x)$. Определим также матрицы-функции

$$\begin{gathered}
A_+^+(x) = \frac{1}{2}\left(r(x) + r(-x)\right)\left(a(x) - a(-x)\right)\chi_+(x),\\
A_-^-(x) = \frac{1}{2}\left(r(x) + r(-x)\right)\left(a(x) - a(-x)\right)\chi_-(x),\\
A_-^+(x) = r(-x)a(x), \quad A_+^-(x) = r(x)a(x),\\
B_+^+(x) = \sigma_{-2\xi}(x)r(x)\left(a(-x)\chi_+(x) + a(x)\chi_-(x)\right),\\
B_-^-(x) = \sigma_{-2\xi}(x)r(-x)\left(a(x)\chi_+(x) + a(-x)\chi_-(x)\right),\\
B_-^+(x) = \frac{1}{2}\sigma_{-2\xi}(x)\left(r(-x) - r(x)\right)\left(a(-x) - a(x)\right)\chi_-(x),\\
B_+^-(x) = \frac{1}{2}\sigma_{-2\xi}(x)\left(r(-x) - r(x)\right)\left(a(x) - a(-x)\right)\chi_+(x).
\end{gathered}$$

Теорема 5.8.1. *Имеет место равенство*

$$\begin{gathered}
U^*m(a)U := W_m^0(a,0) = W^0(a) + m(\chi_\xi^+)\left(W^0(A_+^+) + JW^0(B_+^+)\right)m(\chi_\xi^+)+\\
+m(\chi_\xi^+)\left(W^0(A_-^+) + JW^0(B_-^+)\right)m(\chi_\xi^-) + m(\chi_\xi^-)\left(W^0(A_+^-) + JW^0(B_+^-)\right)m(\chi_\xi^+)+\\
+m(\chi_\xi^-)\left(W^0(A_-^-) + JW^0(B_-^-)\right)m(\chi_\xi^-),
\end{gathered}$$

где χ_ξ^+, χ_ξ^- – характеристические функции множеств $(\xi, +\infty)$ и $(-\infty, \xi)$ соответственно.

Оператор $W_m^0(a,d) := (W_m^0(a,0) + dP) : L_2^n(\mathbb{R}) \to L_2^n(\mathbb{R})$, где $d \in \mathbb{C}$, будем называть оператором m-свёртки, а оператор $W_m(a,d) = \pi_+ W_m^0(a,d)\pi_+^0 : L_2^n(\mathbb{R}_+) \to L_2^n(\mathbb{R}_+)$ – оператором m-Винера-Хопфа.

Заметим, что наиболее простой вид, операторы $W_m^0(a,d)$ и $W_m(a,d)$ имеют в случае, когда a – чётная матрица-функция. Действительно в этом случае

$$\begin{gathered}
A_+^+ = A_-^- = B_-^+ = B_+^- = 0,\\
B_+^+(x) = \sigma_{-2\xi}(x)r(x)a(-x), \quad B_-^-(x) = \sigma_{-2\xi}(x)r(-x)a(x).
\end{gathered}$$

В этой главе приведено полное исследование задачи разрешимости уравнения

$$W_m^0(a,d)y = f, \quad f \in L_2^n(\mathbb{R}). \tag{6}$$

Обозначим через φ функцию, определённую по формуле

$$\varphi(x) = \frac{|q|}{\sqrt{2}}\exp\left(-\frac{|q|}{2}|x - \xi|\right),$$

а через $\Lambda_\varphi : L_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$ функционал, действующий по формуле

$$\Lambda_\varphi y = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)y(x)dx.$$

Теорема 5.9.1. *Пусть $a \in L_\infty^{n\times n}(\mathbb{R})$. Для разрешимости уравнения*

$$W_m(a,0)y = f \tag{7}$$

в пространстве $L_2^n(\mathbb{R})$ необходимо выполнение условия

$$\Lambda_\varphi(f) = 0.$$

При выполнении этого условия, уравнение (7) *разрешимо тогда и только тогда, когда в* $L_2^n(\mathbb{R})$ *разрешимо уравнение*

$$m(a)z = Uf. \tag{8}$$

Теорема 5.9.2. *Пусть* $a \in L_\infty^{n\times n}(\mathbb{R})$, $d \neq 0$. *Тогда уравнение* (6) *разрешимо в* $L_2^n(\mathbb{R})$ *тогда и только тогда, когда в* $L_2^n(\mathbb{R})$ *разрешимо уравнение* (8).

Следующая теорема даёт необходимые и достаточные условия фредгольмовости и обратимости оператора $W_m^0(a,d)$.

Теорема 5.9.3. *Пусть оператор* $a \in L_\infty^{n\times n}(\mathbb{R})$, $d \in \mathbb{C}$. *Оператор* $W_m^0(a,d)$ *фредгольмов тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\operatorname{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}} |\det a(x)| > 0.$$

При выполнении этого условия

$$\operatorname{Ind} W_m^0(a,d) = 0.$$

При $d \neq 0$ *оператор* $W_m^0(a,d)$ *обратим. При* $d = 0$ *имеет место равенство*

$$\ker W_m^0(a,0) = \operatorname{coker} W_m^0(a,0) = \operatorname{span}\{\varphi\}.$$

Определенные на полуоси $\mathbb{R}_+$ операторы $W_m(a,d)$ имеют гораздо более сложную структуру, чем $W_m^0(a,d)$. Исследование этих операторов сводится к исследованию сингулярных интегральных операторов с отражением (более подробно см. [33]). Это обстоятельство позволяет исследовать фредгольмовые свойства этих операторов.

Пусть определённая на $\mathbb{R}_+$ матрица-функция c задана формулой

$$c(x) = \begin{pmatrix} a^+(x) - r(x)r(-x)a(-x) & -\sigma_{2\xi}(x)r(-x)E_n \\ \sigma_{-2\xi}(x)r(x)E_n & (a(-x))^{-1} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $a^+(x) = a(x) + \frac{1}{2}(r(x)+r(-x))(a(x)-a(-x))\chi_+(x)$, а E_n – единичная матрица порядка n. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.11.1. *Пусть* $\xi \le 0$, $a \in PC^{n\times n}$, $d \in \mathbb{C}$, *а матриц-функция* c *определена по формуле* (9). *Тогда оператор* $W_m(a,d) : L_2^n(\mathbb{R}_+) \to L_2^n(\mathbb{R}_+)$ *является фредгольмовым тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

(1) $\operatorname{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}_-} |\det a(x)| > 0$;

(2) $\det c(x\pm 0) \neq 0$, *для* $x \in \mathbb{R}_+$ *и*

$$\frac{1}{2\pi}\arg\det\lambda_j(x) + \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z},$$

для всех $x \in \mathbb{R}_+$ *и всех собственных значений* $\lambda_j(x)$ *матрицы* $c(x-0)c(x+0)$;

(3) *уравнение*

$$\det\left(\lambda^2 E_n - (a(+\infty))(a(-\infty))^{-1}\right) = 0,$$

не имеет решений, лежащих на луче $\left\{re^{i\frac{\pi}{4}} : r \in (0,\infty)\right\}$.

Весовую функцию ρ определим равенством $\rho(x) = |x|^{-1/4}$ и обозначим через $L_2(\mathbb{R},\rho)$ лебегово пространство с весом ρ и с нормой

$$\|f\|_{2,\rho} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \rho^2(t)\,dt\right)^{1/2}.$$

Как известно (более подробно см. [24]), сингулярный интегральный оператор S ограничен в пространстве $L_2(\mathbb{R}, \rho)$, а оператор $P_+ = \frac{1}{2}(I+S)$ является проектором. Рассмотрим весовое пространство Харди $H_2(\mathbb{R}, \rho) := P_+ L_2(\mathbb{R}, \rho)$.

Пусть $a \in L_\infty^{n\times n}(\mathbb{R})$ и $\tilde{a} := Ja$. Матрицу-функцию $g(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$ определим по формуле

$$g(x) = \begin{pmatrix} a & ar\sigma_\xi & r\sigma_{2\xi}E_n & ar\sigma_\xi \\ -\sigma_{-\xi}E_n & E_n & 0 & 0 \\ 0 & r\sigma_{-\xi}E_n & (1+r)(\tilde{a})^{-1} & r\sigma_{-\xi}E_n \\ 0 & rE_n & \sigma_\xi(1+r)(\tilde{a})^{-1} & (1+r)E_n \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что при выполнении условия

$$\operatorname{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}_-} |\det a(x)| > 0, \tag{10}$$

$g \in L_\infty^{4n\times 4n}(\mathbb{R}_+)$. Определённую на $\mathbb{R}$ матрицу-функцию G порядка $8n$ определим по формулам

$$G(x) = \begin{pmatrix} -g(\sqrt{x}) & \frac{1}{2}(E_{2n} - E'_{2n}) \\ 0 & E_{2n} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}_+,$$

и

$$G(x) = \begin{pmatrix} E_{2n} & -\frac{1}{2}(E_{2n} - E'_{2n}) \\ -2E_{2n} & E'_{2n} \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}_-,$$

где

$$E'_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ E_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим также теплицев оператор (см. [8])

$$T(G) = P_+\, m(G)\ : H_2^{8n}(\mathbb{R}, \rho) \to H_2^{8n}(\mathbb{R}, \rho).$$

Теорема 5.11.2. *Пусть $\xi > 0$, $d \in \mathbb{C}$, $a \in L_\infty^{n\times n}(\mathbb{R})$ и выполнено условие* (10). *Оператор $W_m(a,d)$ фредгольмов тогда и только тогда, когда фредгольмов оператор $T(G)$. В случае фредгольмовости этих операторов имеет место формула*

$$\operatorname{Ind} W_m(a,d) = \operatorname{Ind} T(G) - n.$$

Список литературы

[1] В. А. Амбарцумян, Научные труды. т. 1. Ереван, (1960).

[2] С. Чандрасекар, Перенос лучистой энергии. Москва, ИЛ, (1953).

[3] В. В. Соболев, Рассеяние света в атмосферах планет. Москва, Наука, (1972).

[4] В. В. Солодовников, Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. Москва, Физмат, (1960).

[5] Х. Хенел, А. Мауэ, К. Вестпфаль, Теория дифракции. Москва, Мир, (1964).

[6] М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев, О движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости. Труды конференции по теории волнового сопротивлени, ЦАГИ, (1937).

[7] А. Н. Панченков, Гидродинамика подводного крыла. Киев, Наукова Думка, (1965).

[8] A. Böttcher, Y. I. Karlovich, I. M. Spitkovsky, Convolution Operators and Factorization of Almost Periodic Matrix Functions. Birkhäuser, Basel (2002).

[9] Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский, Уравнения типа свертки. Москва, Наука, (1978).

[10] С. Пресдорф, Некоторые классы сингулярных уравнений. Москва, Мир, (1979).

[11] Л. Г. Арабаджян, Н. Б. Енгибарян, Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения. Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал., 22, ВИНИТИ, М., (1984), 175–244.

[12] И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман, Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. Москва, Наука (1971).

[13] A. Böttcher, B. Silbermann, Analysis of Toeplitz Operators. Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1990).

[14] L. A. Sakhnovich, Integral equations with difference kernels on intervals. v. 86, Birkhäuser, Basel, (1986).

[15] N. Wiener, E. Hopf, Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Phys.-Math. Kl. 30/32, (1931), 696–706.

[16] М. Г. Крейн, Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. Успехи матем. наук, т. 13, N5, (1958), 3–120.

[17] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов. Успехи матем. наук, т. 13, N2, (1958), 3–72.

[18] Р. В. Дудучава, Интегральные уравнения светки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики. Труды Тбил. МИАН Груз. ССР, т.60, (1979).

[19] R. Schneider, Integral equations with piecewise continuous coefficients in L^p-spaces with weight. Journal of Integral Equations, 9(2), (1985), 135–152.

[20] A. Böttcher, I. M. Spitkovsky, Wiener-Hopf integral operators with PC symbols on spaces with Muckenhoupt weight. Revista Matemática Iberoamericana, 9(2), (1993), 257–279.

[21] А. Г. Камалян, К. П. Хачатрян, А. Б. Нерсесян, Разрешимость интегральных уравнений с операторами типа свертки. Изв. НАН Армении, математика, т. 29, № 6, (1994), 181–191.

[22] А. Г. Камалян, А. Б. Нерсесян, К. П. Хачатрян, Интегральные операторы $\mathcal{L}$-свертки на полуоси. Доклады НАН Армении, т. 111, № 1, (2011), 15–22.

[23] А. Г. Камалян, Т. В. Саргсян, Разрешимость одного класса интегральных уравнений на полуоси. Математика в высшей школе, том. 8, N1, (2012), 58–67.

[24] А. Г. Камалян, И. М. Спитковский, О фредгольмовости одного класса операторов типа свертки, Матем. заметки 104, вып. 3, (2018), 407–421.

[25] А. Г. Камалян, М. И. Караханян, А. О. Оганесян, Об одном классе операторов $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа, Изв. НАН Армении, Математика 53, no. 3, (2018), 21–27.

[26] D. Hasanyan, A. Kamalyan, M. Karakhanyan, I. M. Spitkovsky, Integral Operators of the $\mathcal{L}$-Convolution Type in the Case of a Reflectionless Potential, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 291, (2019), 175–197.

[27] H. A. Asatryan, A. G. Kamalyan, M. I. Karakhanyan, On $\mathcal{L}$-convolution Type Operators with Semi-Almost Periodic Symbols, Reports NAS of Armenia 119, no. 1, (2019), 22–28.

[28] H. A. Asatryan, A. G. Kamalyan, M. I. Karakhanyan, On a Class of Integro-Difference Equations. Reports NAS of Armenia 119, no. 2, (2019), 103–109.

[29] Л. Д. Фаддеев, Обратная задача квантовой теории рассеяния. Итоги науки и техники, Сер. Соврем. пробл. мат., 3 ВИНИТИ, Москва, (1974), 93–180.

[30] В. А. Марченко, Операторы Штурма-Лиувиля и их приложения. Наукова думка, Киев (1977).

[31] В. Юрко, Введение в теорию обратных спектральных задач. Физмат, Москва (2007).

[32] Ф. Калоджеро, А. Дегасперис, Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений, Москва, Мир, (1985).

[33] A. G. Kamalyan, On singular integral operators with reflection. Adv. Oper. Theory 10, 26, (2025), 1–36.

Публикации автора

[1*] А. Г. Камалян, Г. А. Киракосян, Операторы $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа в весовых пространствах в случае безотражательного потенциала. Изв. НАН Армении, Математика, 57(2), (2022), 112–121.

[2*] G. A. Kirakosyan, On the invertibility of one integral operator. Armenian Journal of Mathematics, 14(6), (2022), 1–10.

[3*] А. Г. Камалян, Г. А. Киракосян, О фредгольмовости одного класса операторов $\mathcal{L}$-Винера–Хопфа. Доклады НАН РА, Т. 123, No3-4, (2023), 15–20.

[4*] Г. А. Киракосян, О матричных операторах $\mathcal{L}$-Винера-Хопфа в случае безотражательного потенциала. Изв. НАН Армении, Т. 60, No1, (2025), 25–44.

[5*] А. Г. Камалян, Г. А. Киракосян, Об одном классе мозаичных операторов типа свёртки. Доклады НАН РА, Т. 125, No1, (2025), 15–21.

Ամփոփում

Ատենախոսությունը բաղկացած է ներածությունից և հինգ գլուխներից:
Առաջին գլխում ներկայացված են անհրաժեշտ տվյալներ իրական առանցքի վրա v պոտենցիալով Շտուրմ-Լիուվիլի հավասարման տեսությունից, որը բավարարում է հետևյալ պայմանին

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)|v(x)|dx<\infty$$

Կառուցվում է U մասնակի իզոմետրիան, որը անկյունագծայնացնում է ինքնահամալուծ Շտուրմ-Լիուվիլի $\mathcal{L}$ օպերատորը՝ $U^*m(a)U=m(\lambda^2)$, որտեղ $m(a)$-ն a ֆունկցիայով (կամ մատրից-ֆունկցիայով) բազմապատկման օպերատորն է: Ներկայացվում են սեփական ֆունկցիաների որոշ հատկություններ՝ առանց անդրադարձման պոտենցիալի դեպքում, ինչպես նաև Յոստի լուծումների և անցման գործակցի բացահայտ տեսքերը, երբ ցրման տվյալները ունեն հետևյալ տեսքը $\{-(\lambda^2+1)^{-1},0,0\}$:
Երկրորդ գլխում ներկայացվում են անհրաժեշտ տեղեկություններ Ֆրեդհոլմյան օպերատորների ընդհանուր տեսությունից և Տյոպլիցի օպերատորների տեսությունից: Սահմանվում է $\mathcal{M}_{p,w,\mathcal{L}}$ բազմապատկիչների դասը: Լեբեգի $L_p(\mathbb{R},w)$ կշռային տարածություններում, որտեղ w-ն Մուկենհաուպտի կշիռ է, $\mathcal{L}$-փաթեթի $W^0_{\mathcal{L}}(a)$ օպերատորը $a\in\mathcal{M}_{p,w,\mathcal{L}}$ սիմվոլով սահմանվում է որպես $U^*m(a)U$ օպերատորի անընդհատ շարունակություն $L_p(\mathbb{R},w)\cap L_2(\mathbb{R})$-ից $L_p(\mathbb{R},w)$-ի վրա: Եթե $a=(a_{ij})\in\mathcal{M}^{n\times n}_{p,w,\mathcal{L}}$, ապա $\mathcal{L}$-փաթեթի օպերատորը սահմանվում է որպես $W^0_{\mathcal{L}}(a)=(W^0_{\mathcal{L}}(a_{ij}))^n_{i,j=1}$: Ներդրման $\pi^0_+:L_p(\mathbb{R}_+,w)\to L_p(\mathbb{R},w)$ և պրոյեկցիայի $\pi_+:L_p(\mathbb{R},w)\to L_p(\mathbb{R}_+,w)$ օպերատորների օգնությամբ սահմանվում է $\mathcal{L}$-Վիներ-Հոփֆի օպերատորը՝ $W_{\mathcal{L}}(a)=\pi_+W^0_{\mathcal{L}}(a)\pi^0_+$: Երբ $\mathcal{L}=I$ (այսինքն՝ զրոյական պոտենցիալի դեպքում), այս օպերատորները համընկնում են դասական փաթեթի և Վիներ-Հոփֆի օպերատորների հետ:
Երրորդ գլխում կառուցվում է Ֆրեդհոլմի տեսությունը $L^n_p(\mathbb{R}_+,w)$ տարածություններում մատրիցային $\mathcal{L}$-Վիներ-Հոփֆի օպերատորի համար առանց անդրադարձման պոտենցիալի և կտոր առ կտոր անընդհատ սիմվոլի դեպքում:
Չորրորդ գլխում ուսումնասիրվում է $T_d:L_p(\mathbb{R},w)\to L_p(\mathbb{R},w)$ օպերատորը, որը գործում է հետևյալ բանաձևերով

$$(T_dy)(x):=(Sy)(x)-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(Ei(\mu(s-x))-Ei(\mu(x-s))\right)\varphi(x)\,\varphi(s)\,y(s)\,ds+$$

$$+d\,\varphi(x)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)\,y(s)\,ds,$$

որտեղ S-ը իրական առանցքի վրա սինգուլյար ինտեգրալ օպերատորն է, Ei-ն էքսպոնենցիալ ցուցչային ֆունկցիան է, $m,\mu>0$, իսկ

$$\varphi(x):=\frac{2\,\mu\,m\,e^{\mu x}}{m^2+2\,\mu\,e^{2\mu x}},$$

և $\mathcal{T}:L_2(\mathbb{R}_+)\to L_2(\mathbb{R}_+)$ օպերատորը, որը գործում է հետևյալ բանաձևով

$$(\mathcal{T}y)(x)=y(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}y(t)k(t-x)dt+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2e^{-2x}}{4-e^{-2x}}\int_{0}^{+\infty}\left(1+\frac{e^{-2t}}{4-e^{-2t}}\right)y(t)\int_{0}^{+\infty}k(t-x-\tau)e^{-\tau}d\tau dt+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1+\frac{e^{-2x}}{4-e^{-2x}}\right)\int_{0}^{+\infty}\frac{2e^{-2t}}{4-e^{-2t}}y(t)\int_{-\infty}^{0}k(t-x-\tau)e^{\tau}d\tau dt,$$

որտեղ k ֆունկցիան պատկանում է $L_1(\mathbb{R})\cap H_2(\mathbb{R})$ ենթատարածությանը ($H_2(\mathbb{R})$՝ Հարդիի դաս): Բացի այդ, ենթադրվում է, որ գոյություն ունի d ֆունկցիա, որ $d, d' \in L_1(\mathbb{R})$ և $d'' = k$: T_d օպերատորը ռեալիզացվում է որպես $a(x) = -sgn(x)$ սիմվոլով $\mathcal{L}$-փաթեթի օպերատոր՝ առանց անդրադարձման պոտենցիալի դեպքում, իսկ $\mathcal{T}$ օպերատորը ռեալիզացվում է որպես որոշակի սիմվոլով $\mathcal{L}$-Վիներ-Հոփֆի օպերատոր՝ $\{-(\lambda^2+1)^{-1}, 0, 0\}$ ցրման տվյալների դեպքում: Այս փաստերը հնարավորություն են տալիս ուսումնասիրել T_d օպերատորի հակադարձելիությունը և $\mathcal{T}$ օպերատորի ֆրեդհոլմությունը:
Հինգերորդ գլխում սահմանվում են $\mathbb{R}$-ում անընդհատ $e_{\pm}(x,\lambda)$ ֆունկցիաներ, որոնք բավարարում են $-y'' = \lambda^2 y$ դիֆերենցիալ հավասարմանը $(-\infty,\xi)$, $(\xi,+\infty)$, $\xi \in \mathbb{R}$ բազմություններում, $e_{\pm}(x,\lambda) = e^{ix\lambda}$ հավասարություններին, երբ $\pm(x-\xi) > 0$, և

$$\frac{dy}{dx}(\xi+0,\lambda) - \frac{dy}{dx}(\xi-0,\lambda) = -q\, y(\xi,\lambda)$$

սահմանային պայմանին: Առաջին գլխին անալոգ ձևով այս ֆունկցիաները օգտագործելով Յոստի լուծումների փոխարեն կառուցվում է U օպերատորը: Ապացուցվում են $UU^* = I$, $U^*U = I - P$ հավասարությունները, որտեղ P-ն միաչափ օպերատոր է: $W_m^0(a,d) = U^*m(a)U + dP$, $(a \in L_\infty(\mathbb{R}),\ d \in \mathbb{C})$ օպերատորները $\mathcal{L}$-փաթեթի օպերատորներ չեն: Այնուամենայնիվ, ապացուցվում է, որ $W_m^0(a,d)$ և $W_m(a,d) = \pi_+ W_m^0(a,d)\pi_+^0$ օպերատորները ունեն հակադարձելիության և ֆրեդհոլմության հատկություններ, որոնք մոտ են $W_{\mathcal{L}}^0(a)$ և $W_{\mathcal{L}}(a)$ օպերատորների համապատասխան հատկություններին:

Abstract

The dissertation consists of an introduction and five chapters.
The first chapter provides the necessary information from the theory of the Sturm-Liouville equation on the real axis with a potential v satisfying the condition

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)|v(x)|dx<\infty.$$

The construction of a partial isometry U that diagonalizes the self-adjoint Sturm-Liouville operator $\mathcal{L}$ is provided: $U^*m(a)U=m(\lambda^2)$, where $m(a)$ is the multiplication operator by the function (or matrix-function) a. Some properties of eigenfunctions in the case of reflectionless potential are given, along with the explicit form of the Jost solutions and the transmission coefficient in the case when the scattering data is $\{-(\lambda^2+1)^{-1},0,0\}$.
The second chapter presents the necessary information from the general theory of Fredholm operators and the theory of Toeplitz operators. The class of multipliers $\mathcal{M}_{p,w,\mathcal{L}}$ is defined. In the weighted Lebesgue spaces $L_p(\mathbb{R},w)$, where w is a Muckenhoupt weight, the $\mathcal{L}$-convolution operator $W^0_{\mathcal{L}}(a)$ with symbol $a\in\mathcal{M}_{p,w,\mathcal{L}}$ is defined as the continuous extension of the operator $U^*m(a)U$ from $L_p(\mathbb{R},w)\cap L_2(\mathbb{R})$ on $L_p(\mathbb{R},w)$. In the case $a=(a_{ij})\in\mathcal{M}^{n\times n}_{p,w,\mathcal{L}}$, the $\mathcal{L}$-convolution operator is understood as the operator $W^0_{\mathcal{L}}(a)=(W^0_{\mathcal{L}}(a_{ij}))^n_{i,j=1}$. Using the operators of embedding $\pi^0_+ : L_p(\mathbb{R}_+,w)\to L_p(\mathbb{R},w)$ and projection $\pi_+ : L_p(\mathbb{R},w)\to L_p(\mathbb{R}_+,w)$, the $\mathcal{L}$-Wiener-Hopf operator is defined as $W_{\mathcal{L}}(a)=\pi_+W^0_{\mathcal{L}}(a)\pi^0_+$. In the case when $\mathcal{L}=I$ (i.e., zero potential case), these operators coincide with the classical convolution and Wiener-Hopf operators.
In the third chapter, the Fredholm theory of the matrix $\mathcal{L}$-Wiener-Hopf operator in the spaces $L^n_p(\mathbb{R}_+,w)$ is constructed in the case of a reflectionless potential and piecewise continuous symbol.
The fourth chapter studies the operator $T_d : L_p(\mathbb{R},w)\to L_p(\mathbb{R},w)$, acting by the formula

$$(T_dy)(x):=(Sy)(x)-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(Ei(\mu(s-x))-Ei(\mu(x-s))\right)\varphi(x)\,\varphi(s)\,y(s)\,ds+$$
$$+d\,\varphi(x)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)\,y(s)\,ds,$$

where S is the singular integral operator on the axis, Ei is the exponential integral function, $m,\mu>0$, and

$$\varphi(x):=\frac{2\,\mu\,m\,e^{\mu x}}{m^2+2\,\mu\,e^{2\mu x}},$$

and operator $\mathcal{T} : L_2(\mathbb{R}_+)\to L_2(\mathbb{R}_+)$, acting by the formula

$$(\mathcal{T}y)(x)=y(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}y(t)k(t-x)dt+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2e^{-2x}}{4-e^{-2x}}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(1+\frac{e^{-2t}}{4-e^{-2t}}\right)y(t)\int\limits_{0}^{+\infty}k(t-x-\tau)e^{-\tau}d\tau dt+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(1+\frac{e^{-2x}}{4-e^{-2x}}\right)\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{2e^{-2t}}{4-e^{-2t}}y(t)\int\limits_{-\infty}^{0}k(t-x-\tau)e^{\tau}d\tau dt,$$

where the function k belongs to the subspace $L_1(\mathbb{R}) \cap H_2(\mathbb{R})$ ($H_2(\mathbb{R})$ is the Hardy class). Besides, suppose there exists a function d such that $d, d' \in L_1(\mathbb{R})$ and $d'' = k$. The operator T_d is realized as the $\mathcal{L}$-convolution operator with symbol $a(x) = -sgn(x)$ in the reflectionless potential case, and the operator $\mathcal{T}$ is realized as the $\mathcal{L}$-Wiener-Hopf operator with some symbol in the case of scattering data $\{-(\lambda^2 + 1)^{-1}, 0, 0\}$. These facts allow the study of the invertibility of the operator T_d and the Fredholmness of the operator $\mathcal{T}$.

In the fifth chapter, continuous functions $e_\pm(x, \lambda)$ on $\mathbb{R}$ are defined, which satisfy the differential equation $-y'' = \lambda^2 y$ on the sets $(-\infty, \xi),\ (\xi, +\infty),\ \xi \in \mathbb{R}$, the equalities $e_\pm(x, \lambda) = e^{ix\lambda}$ for $\pm(x - \xi) > 0$, and the boundary condition

$$\frac{dy}{dx}(\xi + 0, \lambda) - \frac{dy}{dx}(\xi - 0, \lambda) = -q\, y(\xi, \lambda).$$

In complete analogy with the first chapter, using these functions instead of the Jost solutions, the operator U is constructed. The equalities $UU^* = I,\ U^*U = I - P$ are proved, where P is a one-dimensional operator. The operators $W_m^0(a, d) = U^*m(a)U + dP,\ (a \in L_\infty(\mathbb{R}),\ d \in \mathbb{C})$ are not $\mathcal{L}$-convolution operators. Despite this, it is proven that the operators $W_m^0(a, d)$ and $W_m(a, d) = \pi_+ W_m^0(a, d)\pi_+^0$ possess invertibility and Fredholm properties close to those of the operators $W_{\mathcal{L}}^0(a)$ and $W_{\mathcal{L}}(a)$, respectively.