

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Դրամբյան Արամ Կարենի

Գրաֆների ուժեղ կողային ներկումների մասին

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Ա.01.09 «Մաթեմատիկական կիրառություններ և մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

Երևան - 2025

ЕРЕВАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Драмбян Арам Каренович

О сильных реберных раскрасках графов

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.09 “Математическая кибернетика и математическая логика”

Ереван - 2025

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Հայ-Ռուսական համալսարանում:

Գիտական ղեկավար՝
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝

Առաջատար կազմակերպություն՝

Ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Պ. Ա. Պետրոսյան
Ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Ռ. Ռ. Քամալյան
Ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Ն. Ա. Խաչատրյան
ՀՀ ԳԱԱ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման
պրոբլեմների ինստիտուտ

Պաշտպանությունը կայանալու է 2025թ. հուլիսի 14-ին, ժ. 15⁰⁰-ին ԵՊՀ-ում գործող
ԲԿԳԿ-ի 050 «Մաթեմատիկա» մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝
0025, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2025թ. հունիսի 13-ին:

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
Ֆիզ.-մաթ.գիտ. դոկտոր՝



Կ.Լ. Ավետիսյան

Тема диссертации утверждена в Российско-Армянском университете.

Научный руководитель:
Официальные оппоненты:

Ведущая организация:

кандидат физ.-мат. наук П. А. Петросян
доктор физ.-мат. наук Р. Р. Камалян
кандидат физ.-мат. наук Н. А. Хачатрян
Институт проблем информатики и
автоматизации НАН РА

Защита состоится 14-го июля 2025г. в 15⁰⁰ часов на заседании действующего в
Ереванском государственном университете специализированного совета КВОН 050
“Математика”, по адресу: Ереван 0025, ул. А. Манукяна, 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ереванского государственного
университета.

Автореферат разослан 13-го июня 2025г.

Ученый секретарь
специализированного совета,
доктор физ.-мат. наук



К.Л. Аветисян

Աշխատանքի ընդհանուր նկարագիրը

Թեմայի արդիականությունը

Վերջին տասնամյակների ընթացքում գրաֆների տեսությունը, լինելով դիսկրետ մաթեմատիկայի հիմնական և դինամիկ զարգացող բաժիններից մեկը, դարձել է մաթեմատիկական ամենակարևոր գործիքը, որը լայնորեն օգտագործվում է գիտության տարբեր ոլորտներում, ինչպիսիք են գործողությունների հետազոտումը, արհեստական բանականությունը, բարդ ցանցերը, կապի տեսությունը, հաշվողական մեքենաների նախագծումը, տնտեսագիտությունը, կենսաբանությունը, ֆիզիկան, քիմիան և այլն: Գրաֆների տեսության բազմաթիվ խնդիրների շարքում առանձնահատուկ տեղ են զբաղեցնում գրաֆների ներկումների խնդիրները: Այդ խնդիրների կարևորությունը պայմանավորված է առկա սերտ կապով մի շարք կարևոր կիրառական խնդիրների հետ: Մասնավորապես, նշանակալի փոխադարձ կապ կա կարգացուցակների տեսության խնդիրների¹, անլար ռադիոհաղորդման ցանցերի հաճախականությունների նշանակման խնդիրների² և գրաֆների ներկումների խնդիրների միջև: Օրինակ, քննաշջանի օպտիմալ կարգացուցակ կառուցելու խնդիրը բերվում է գրաֆի քրոմատիկ թվի որոշմանը: Գրաֆի քրոմատիկ ինդեքսը գտնելու խնդրին բերվում է սպորտային մրցումների կարգացուցակ կազմելու խնդիրը, իսկ երկկողմանի գրաֆների հատուկ տիպի կողային ներկումների խնդիրները բազմաթիվ աշխատանքներում ծառայել են որպես ուսումնական դասացուցակների գոյության, կառուցման և թվային պարամետրերի գնահատման հարցերի հետազոտման մոդելներ:

Գրաֆների ուժեղ կողային ներկումները ներմուծվել են Զ. Ֆուկեի և Զ. Ժոլիվեյի³ կողմից 1983 թվականին: G գրաֆի ուժեղ կողային ներկումը, դա այդ գրաֆի կողերի ներկումն է, որի դեպքում ամեն մի գույնով ներկված կողերը կազմում են ուժեղ զուգակցում (դա զուգակցում է, որով ծնված ենթագրաֆը համընկնում է այդ զուգակցման հետ): G գրաֆի $\chi'_s(G)$ ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսը գույների այն նվազագույն քանակն է, որն անհրաժեշտ է G գրաֆի ուժեղ կողային ներկման համար: Նշենք նաև, որ 1985 թվականին Պ. Էրդյոշի և Զ. Նեշեթիլի⁴ կողմից առաջարկվել է հիպոթեզ, համաձայն որի $\chi'_s(G) \leq \frac{5}{4}\Delta^2(G)$, երբ $\Delta(G)$ -ն զույգ թիվ է և $\chi'_s(G) \leq \frac{1}{4}(5\Delta^2 - 2\Delta(G) + 1)$, երբ $\Delta(G)$ -ն կենտ թիվ է, որտեղ $\Delta(G)$ -ն G գրաֆի գագաթների առավելագույն աստիճանն է: Այս հիպոթեզը այժմ հայտնի է որպես Ուժեղ Կողային Ներկման Հիպոթեզ⁵: Ռ. Ֆաուդրին, Ռ. Շելպը, Ա. Դյարֆասը և Ժ. Տուզան⁶ ցույց են տվել, որ $\chi'_s(G) \leq 2\Delta^2(G) - 2\Delta(G) + 1$ ցանկացած G գրաֆի համար: Զ. Ֆուկեն և Զ. Ժոլիվեն, գրաֆների ուժեղ կողային ներկումներին նվիրված առաջին աշխատանքում, ապացուցել են, որ

¹D. Marx, Graph colouring problems and their applications in scheduling, Periodica Polytechnica Ser. El. Eng. 48, No. 1, 2004, pp. 11-16.

²C. L. Barrett, G. Istrate, V. A. Kumar, M. V. Marathe, S. Thite, S. Thulasidasan, Strong edge coloring for channel assignment in wireless radio networks, Fourth Annual IEEE International Conference on Pervasive Computing and Communications Workshops (PERCOMW'06), 2006, pp. 5-110.

³J.L. Fouquet, J.L. Jolivet, Strong edge-colorings of graphs and applications to multi-k-gons, Ars Combinatoria, Volume 16A, 1983, pp. 141-150.

⁴P. Erdős, J. Nešetřil, Problem, in: G. Halasz, V.T. Sos (Eds.) Irregularities of partitions, Springer, Berlin, 1989, pp. 162-163.

⁵T.R. Jensen, B. Toft, Graph coloring problems, Wiley Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, 1995.

⁶R.J. Faudree, R.H. Schelp, A. Gyárfás, Z. Tuza, The strong chromatic index of graphs, Ars Combinatoria 29, 1990, pp. 205-211.

երթե $G \neq C_5$, ապա $\chi'_s(G) \leq 2\Delta^2(G) - 2\Delta(G)$, որոտեղ C_5 -ը հինգ երկարությամբ պարզ ցիկլն է: Նշենք նաև, որ Մ. Մոլլոյը և Բ. Ռիդը ⁷ ապացուցել են, որ գոյություն ունի $\epsilon > 0$ թիվ, որ $\chi'_s(G) \leq (2 - \epsilon)\Delta^2(G)$ ցանկացած G գրաֆի համար: Մեծ առավելագույն աստիճան ունեցող G գրաֆների համար ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսի վերին գնահատականը սկզբից լավացվել է $\chi'_s(G) \leq 1.93\Delta^2(G)$ և $\chi'_s(G) \leq 1.835\Delta^2(G)$, այնուհետև $\chi'_s(G) \leq 1.772\Delta^2(G)$ ⁸ աշխատանքում: Հայտնի է, որ Ուժեղ Կողային Ներկման Հիպոթեզը ստույգ է բավականին փոքր առավելագույն աստիճան ունեցող գրաֆների համար: Մասնավորապես, Լ. Անդերսենը ⁹ և Պ. Հոռակը, Հ. Քինգը և Վ. Տրոտտերը ¹⁰ ցույց են տվել, որ երթե G գրաֆի համար $\Delta(G) \leq 3$, ապա $\chi'_s(G) \leq 10$: $\Delta(G) = 4$ դեպքը դիտարկվել է Պ. Հոռակի ¹¹ կողմից, որը ցույց է տվել, որ $\chi'_s(G) \leq 23$ և Դ. Կոենստոնի կողմից, որը ցույց է տվել, որ $\chi'_s(G) \leq 22$, այնուհետև՝ $\chi'_s(G) \leq 21$ ¹²: Նշենք նաև, որ ընդհանուր դեպքում գրաֆի նվազագույն գույներով ուժեղ կողային ներկման գտնելու խնդիրը հանդիսանում է NP-լրիվ խնդիր ¹³:

Գրաֆների ուժեղ կողային ներկումներին նվիրված հետազոտությունները վերջին չորս տասնամյակներում հիմնականում վերաբերում էին նոսր գրաֆներին, մինչդեռ խիտ և երկկողմանի գրաֆները մնում են քիչ հետազոտված: Ուժեղ կողային ներկումների հետազոտություններում անարդարացիորեն քիչ է ուշադրություն հատկացված տարբեր գրաֆային գործողությունների ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսի գնահատման հարցերին: Վերջին մի քանի տարիներին տարբեր հեղինակների կողմից ^{14,15} հետազոտվում են գրաֆների համարյա ուժեղ կողային ներկումները, որոնք 2005 թվականին ներմուծվել են Ա. Դյարֆաշի և Ա. Հուբենկոյի կողմից ¹⁶: Սակայն, այդ հեղինակների կողմից ստացված արդյունքները հիմնականում վերաբերվում են գրաֆների որոշ դասերի համարյա ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսի գնահատման խնդիրներին: Ընդհանուր առմամբ, քիչ են հետազոտված գրաֆների համարյա ուժեղ կողային ներկումների կառուցման և քրոմատիկ պարամետրերի գնահատման խնդիրները, ինչպես նաև ուժեղ և համարյա ուժեղ կողային ներկումների քրոմատիկ պարամետրերի միջև առկա կապերը:

Աշխատանքի հիմնական նպատակը և նրանում դիտարկված խնդիրները

Աշխատանքում դիտարկվել են գրաֆների ուժեղ կողային ներկումների գոյության, կառուցման և թվային պարամետրերի գնահատման, ինչպես նաև գրաֆային տարբեր

⁷M. Molloy, B. Reed, A bound on the strong chromatic index of a graph, Journal of Combin. Theory Ser. B 69, 1997, pp. 103-109.

⁸E. Hurley, R. de Joannis de Verclos, R. J. Kang, An improved procedure for colouring graphs of bounded local density, Advances in Combinatorics 7, 2022, 33p.

⁹L. D. Andersen, The strong chromatic index of a cubic graph is at most 10, Discrete Mathematics 108(1-3), 1992, pp. 231-252.

¹⁰P. Horák, H. Qing, W. T. Trotter, Induced matchings in cubic graphs, Journal of Graph Theory 17(2), 1993, pp. 151-160.

¹¹P. Horák, The strong chromatic index of graphs with maximum degree four, Contemporary methods in Graph Theory, 1990, pp. 399-403.

¹²M. Huang, M. Santana, G. Yu, Strong chromatic index of graphs with maximum degree four, Electron. J. Comb. 25, 2018, pp. 3-31.

¹³M. Mahdian, On the computational complexity of strong edge coloring, Discrete Applied Mathematics 118, 2002, pp. 239-248.

¹⁴A. A. Diwan, The minimum forcing number of perfect matchings in the hypercube, Discrete Mathematics 342(4), 2019, pp. 1060-1062.

¹⁵B. Lužar, M. Mockovčiková, R. Soták, Revisiting semistrong edge-coloring of graphs, Journal of Graph Theory 105(4), 2024, pp. 612-632.

¹⁶A. Gyárfás, A. Hubenko, Semistrong edge coloring of graphs, Journal of Graph Theory 49(1), 2005, pp. 39-47.

գործողությունների համար այդպիսի ներկումների գոյության, կառուցման և թվային պարամետրերի գնահատման խնդիրներ: Աշխատանքում դիտարկվել են նաև համարյա ուժեղ կողային ներկումները և ուսումնասիրվել են դրանց պարամետրերը, ինչպես նաև ուժեղ և համարյա ուժեղ կողային ներկումների պարամետրերի միջև առկա կապը: Աշխատանքի հիմնական նպատակն է վերոհիշյալ խնդիրների հետազոտումը գրաֆների տարբեր դասերի համար:

Հետազոտության օբյեկտները

Աշխատանքում հետազոտության օբյեկտներ են հանդիսանում գրաֆների տարբեր դասեր, գրաֆների հատուկ տիպի ֆակտորիզացիաներ, ուժեղ և համարյա ուժեղ կողային ներկումներ, այդպիսի ներկումներում մասնակցող զույների քանակներ: Հետազոտության օբյեկտներ են հանդիսանում նաև գրաֆային տարբեր գործողությունների ուժեղ և համարյա ուժեղ կողային ներկումները և դրանց քրոմատիկ պարամետրերը:

Հետազոտության մեթոդները

Հետազոտությունն իրականացվել է դիսկրետ մաթեմատիկայի, գրաֆների տեսության և դիսկրետ օպտիմիզացիայի մեթոդների օգնությամբ: Որոշ արդյունքների ստացման համար կիրառվել են համակարգչային փորձարկումներ:

Գիտական նորույթը

Աշխատանքում առաջին անգամ ուսումնասիրվել են մի շարք խորանարդային տեսքի գրաֆների և հատուկ տիպի ֆակտորիզացիաով (բաժանում) օժտված երկկողմանի գրաֆների ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսները: Աշխատանքում առաջարկվել է գրաֆների համարյա ուժեղ կողային ներկումներ կառուցելու նոր եղանակ, հիմնված այդ գրաֆների ուղղորդման վրա, որի օգնությամբ հաջողվել է վերևից գնահատել արտաքին հարթ գրաֆների համարյա ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսը: Դիտարկվել են որոշ գրաֆային գործողությունների ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսների և գրաֆների այլ թվային պարամետրերի միջև կապը: Աշխատանքում նկարագրվել են նաև գրաֆների նոր դասեր, որոնց ուժեղ և համարյա ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսները համընկնում են:

Ստացված արդյունքների գործնական կիրառությունը

Աշխատանքում օգտագործված հետազոտության մեթոդները և նրանում ստացված արդյունքներն ունեն ոչ միայն տեսական նշանակություն գրաֆների քրոմատիկ հատկությունների հետազոտման համար, այլև կարող են ունենալ գործնական կիրառություններ: Մասնավորապես, գրաֆների ուժեղ կողային ներկումները կիրառվում են անլար ռադիոհաղորդման ցանցերում, մեդիայի հասանելիության կառավարման հաղորդակարգի (MAC protocol) թողունակության որոշման խնդիրներում, և այլն:

Պաշտպանության ներկայացվող հիմնական դրույթները

Պաշտպանության են ներկայացվում հետևյալ հիմնական դրույթները.

1) Խորանարդային տեսքի գրաֆների ուժեղ կողային ներկումների կառուցում, ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսի ստորին և վերին գնահատականներ և որոշ խորանարդային տեսքի գրաֆների համար այդ պարամետրի ճշգրիտ արժեքներ,

2) Բրուալդիի և Մասսիի հիպոթեզի ապացույց՝ որոշակի ֆակտորիզացիայով օժտված երկկողմանի գրաֆների համար,

3) Գրաֆային գործողությունների ուժեղ կողային ներկումների կառուցում և ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսի հասանելի ստորին և վերին գնահատականներ,

4) Արտաքին հարթ գրաֆների համարյա ուժեղ կողային ներկումների կառուցում, համարյա ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսի վերին գնահատականներ և որոշ արտաքին հարթ գրաֆների դասերի համարյա ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսի հասանելի գնահատականներ,

5) Գրաֆային գործողությունների համարյա ուժեղ կողային ներկումների կառուցում և համարյա ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսի հասանելի վերին գնահատականներ,

6) Գրաֆների դասերի նկարագրում, որոնց ուժեղ և համարյա ուժեղ կողային ներկումների պարամետրերը համընկնում են:

Ստացված արդյունքների գրաքննությունը և փորձարկումը

Ստացված արդյունքները զեկուցվել են մի շարք գիտաժողովներում Հայաստանում և եվրոպական երկրներում.

1. Science and Technology Convergence Conference, Yerevan, Armenia, October 11-12, 2019,
2. XIV Годичная научная конференция РАУ, Ереван, Армения, 2-6 декабря, 2019,
3. Mathematics & IT: Research and Education (MITRE-2021), Chişinău, Republic of Moldova, July 01–03, 2021,
4. XV Годичная научная конференция РАУ, Ереван, Армения, 6-10 декабря, 2021,
5. Ինֆորմատիկա և կիրառական մաթեմատիկա «ԻԿՄ 50», Երևան, Հայաստան, Մարտի 23-25, 2022,
6. XVII Годичная научная конференция РАУ, Ереван, Армения, 4-8 декабря, 2023,
7. 14th International Conference on Computer Science and Information Technologies, Yerevan, Armenia, September 25-30, 2023,
8. International Conference dedicated to the 60th anniversary of the foundation of Vladimir Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science (IMCS-60), Chişinău, Republic of Moldova, October 10-13, 2024,
9. Համակարգչային գիտության և կիրառական մաթեմատիկայի արդի խնդիրներ «ՀԳԿՄԻԽ 2025», ԵՊՀ, Երևան, Ապրիլի 28-30, 2025:

Աշխատանքի առանձին հատվածները մանրամասն քննարկվել են տարբեր սեմինարների ընթացքում՝ Հայ-Ռուսական համալսարանում, Երևանի պետական համալսարանում և Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտում:

Հրապարակումները

Հետազոտության թեմայի վերաբերյալ տպագրվել են 12 գիտական աշխատանքներ:

Աշխատանքի ծավալը և կառուցվածքը

Աշխատանքի ծավալը կազմում է 111 էջ: Աշխատանքը բաղկացած է ներածությունից, երեք գլուխներից, եզրակացությունից և գրականության ցանկից: Աշխատանքը ներառում է 18 նկար:

Աշխատանքի պարունակությունը

Աշխատանքում դիտարկվում են ոչ կողմնորոշված հասարակ գրաֆներ՝ առանց պատիկ կողերի և օղերի: G գրաֆի գագաթների և կողերի բազմությունները նշանակենք, համապատասխանաբար, $V(G)$ -ով և $E(G)$ -ով: Ցանկացած $v \in V(G)$ -ի համար $d_G(v)$ -ով նշանակենք այդ գագաթի *աստիճանը* G -ում, $\delta(G)$ -ով և $\Delta(G)$ -ով նշանակենք G գրաֆի նվազագույն և առավելագույն աստիճանները, համապատասխանաբար, իսկ $N_G(v)$ -ով՝ v գագաթին կից գագաթների բազմությունը: G գրաֆի *առավելագույն կողի աստիճանը* սահմանվում է որպես $\Delta'(G) = \max_{(v,u) \in E(G)} \{d_G(v) + d_G(u) - 1\}$:

$f : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ ֆունկցիան կոչվում է G գրաֆի *ծիշտ գագաթային ներկմուն*, եթե կամայական $(v, u) \in E(G)$ կողի համար՝ $f(v) \neq f(u)$: Ծիշտ գագաթային ներկման համար անհրաժեշտ նվազագույն գույների քանակը կոչվում է *քրոմատիկ թիվ* և նշանակվում է $\chi(G)$ -ով:

Գրաֆը կոչվում է *հարթ*, եթե այն հնարավոր է պատկերել հարթության վրա այնպես, որ գրաֆի կողերը հատվեն միայն գագաթներում: Հարթության վրա պատկերված հարթ գրաֆը հարթությունը տրոհում է տիրույթների, որոնք կոչվում են *նիստեր*: Հարթ գրաֆը կոչվում է *արտաքին հարթ*, եթե այն հնարավոր է հարթության վրա պատկերել այնպես, որ նրա բոլոր գագաթները պատկանեն արտաքին (անվերջ) նիստին:

G գրաֆը կոչվում է *երկկողմանի*, եթե $V(G)$ -ն հնարավոր է բաժանել երկու անկախ բազմության: G երկկողմանի գրաֆի համար կօգտագործենք նաև (X, Y, E) նշանակումը, որտեղ $X \cup Y = V(G)$ անկախ գագաթների բազմություններն են, իսկ $E = E(G)$: $G = (X, Y, E)$ երկկողմանի գրաֆը կանվանենք (a, b) -*երկկողմանի*, եթե $a = \max_{x \in X} \{d_G(x)\}$ և

$$b = \max_{y \in Y} \{d_G(y)\}:$$

$n \in \mathbb{N}$ թվի համար, Q_n -ով նշանակվում է n -*չափանի խորանարդը*, որտեղ

- $V(Q_n) = \{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) : 1 \leq i \leq n, \alpha_i \in \{0, 1\}\},$
- $E(Q_n) = \{((\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n), (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n)) : (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) \text{ և } (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n) \text{ տարբերվում են միայն մեկ դիրքում}\}:$

Մենք օգտագործում ենք ընդունված P_n , C_n , K_n նշանակումները, համապատասխանաբար, n գագաթանի պարզ ճանապարհների, պարզ ցիկլերի, և լրիվ գրաֆների համար:

Դիցուք $V' \subseteq V(G)$ G գրաֆի գագաթների ենթաբազմություն է: $G[V']$ -ով նշանակենք V' բազմության գագաթներով ծնված ենթագրաֆը:

G գրաֆի M կողերի բազմությունը կոչվում է *զուգացկուն*, եթե M -ի ցանկացած երկու կող հարևան չեն: Կասենք, որ M զուգացկունը ծածկում է v գագաթը, եթե v -ն կից է M -ի կողերից որևէ մեկին: M զուգացկունով ծածկվող գագաթների բազմությունը կնշանակենք $V(M)$ -ով: M զուգացկունը կանվանենք *ուժեղ*, եթե $\Delta(G[V(M)]) = 1$, և *համարյա ուժեղ*, եթե յուրաքանչյուր $(v, u) \in M$ կողի համար, կամ $d_{G[V(M)]}(v) = 1$, կամ $d_{G[V(M)]}(u) = 1$:

G գրաֆի $(v, u) \in E(G)$ կողի կծկում գործողության արդյունքում կստանանք այն G' գրաֆը, որը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

$$\begin{aligned} V(G') &= (V(G) \setminus \{v, u\}) \cup \{w\}, w \notin V(G) \\ E(G') &= (E(G) \setminus \{e \mid e\text{-ն կից է } v\text{-ին կամ } u\text{-ին}\}) \\ &\cup \{(w, w') \mid w' \in (N_G(v) \cup N_G(u)) \setminus \{v, u\}\} : \end{aligned}$$

Կասենք, որ G գրաֆը պարունակում է H գրաֆը որպես *միներ*, եթե G -ից հնարավոր է ստանալ H -ը՝ գագաթներ, կողեր հեռացնելով և կողի կծկում գործողությունը կիրառելով:

$\alpha : E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ ֆունկցիան կոչվում է G գրաֆի *ծիշտ կողային ներկում*, եթե կամայական $v \in V(G)$ գագաթին կից կողերը ներկված են զույգ առ զույգ տարբեր գույներով:

Ակնհայտ է, որ կամայական գրաֆ ունի ծիշտ կողային ներկում (տարբեր կողեր կարող ենք ներկել տարբեր գույներով): Տրված G գրաֆի ծիշտ կողային ներկումներում անհրաժեշտ գույների նվազագույն քանակը կոչվում է *քրոմատիկ ինդեքս* և նշանակվում է $\chi'(G)$ -ով: Ըստ Վիգինսի¹⁷ հայտնի թեորեմի՝

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1:$$

Դիցուք α -ն G գրաֆի ծիշտ կողային ներկում է: Պարզ է, որ նույն գույնով ներկված կողերը հանդիսանում են զուգացկուն G գրաֆի համար: Եթե α ներկման յուրաքանչյուր գույնին համապատասխանող կողերի բազմությունը կազմում է ուժեղ (համարյա ուժեղ) զուգացկուն, ապա α -ն կոչվում է *ուժեղ (համարյա ուժեղ) կողային ներկում*, իսկ նվազագույն գույների քանակը, որն անհրաժեշտ է G գրաֆի ուժեղ (համարյա ուժեղ) կողային ներկման համար, կոչվում է *ուժեղ (համարյա ուժեղ) քրոմատիկ ինդեքս* և նշանակվում է $\chi'_s(G)$ -ով ($\chi'_{ss}(G)$)¹⁸:

Աշխատանքի առաջին գլուխը նվիրված է խորանարդային տեսքի գրաֆների, երկկողմանի գրաֆների, և ընդհանրացված թետա գրաֆների ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսների արժեքների որոշմանը և գնահատմանը:

Առաջին գլխի 1.1 պարագրաֆը նվիրված է Ֆիբոնաչիի և Լուկասի խորանարդների ուժեղ կողային ներկումներին: 1990 թվականին Ֆաուդրին, Շելպը, Դյարֆաշը, և Տուզան ցույց են տվել n -չափանի խորանարդների ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսի արժեքը:

Թեորեմ 1.1.1. *Եթե $n \geq 2$, ապա $\chi'_s(Q_n) = 2n$:*

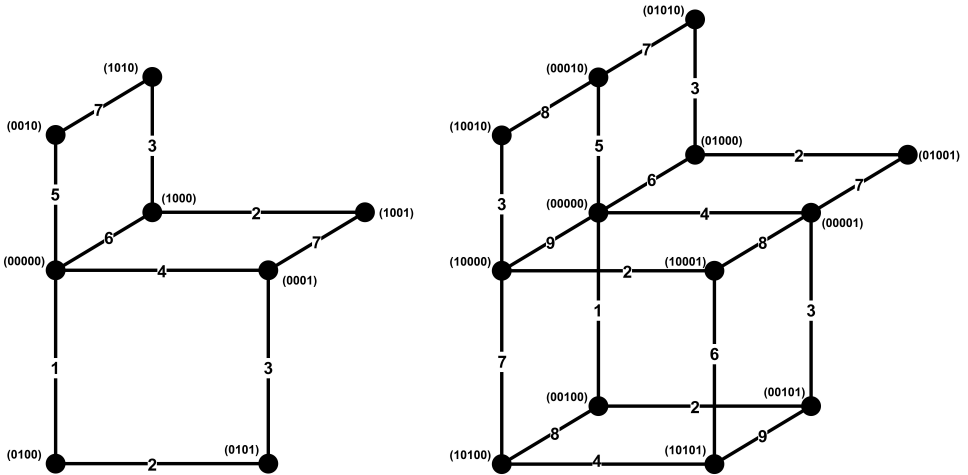
$n \in \mathbb{N}$ թվի համար, F_n -ով նշանակվում է n -չափանի *ֆիբոնաչիի խորանարդը*, որտեղ

- $V(F_n) = \{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) : 1 \leq i \leq n, \alpha_i \in \{0, 1\} \text{ և } (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) \text{ չի պարունակում հաջորդական 1-երի},$

¹⁷В.Г. Визинг, Хроматический класс мультиграфов, Кибернетика 3, 1965, стр. 29-39.

¹⁸Չսահմանված հասկացությունների և նշանակումների համար տե՛ս D.B. West, Introduction to Graph Theory, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.

- $E(F_n) = \{((\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n), (\beta_1\beta_2 \dots \beta_n)) : (\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n) \text{ և } (\beta_1\beta_2 \dots \beta_n) \text{ տարբերվում են միայն մեկ դիրքում}\}$:
- $n \in \mathbb{N}$ թվի համար, L_n -ով նշանակվում է n -չափանի *Լուկասի խորանարդը*, որտեղ
- $V(L_n) = \{(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n) : 1 \leq i \leq n, \alpha_i \in \{0, 1\} \text{ և } (\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n\alpha_1) \text{ չի պարունակում հաջորդական 1-եր}\}$,
- $E(L_n) = \{((\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n), (\beta_1\beta_2 \dots \beta_n)) : (\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n) \text{ և } (\beta_1\beta_2 \dots \beta_n) \text{ տարբերվում են միայն մեկ դիրքում}\}$:



Նկ. 1.1: F_4 և F_5 գրաֆների ուժեղ կողային ներկումները, համապատասխանաբար, 7 և 9 գույներով:

1.1 պարագրաֆում ստացվել են հետևյալ արդյունքները Ֆիբոնաչիի և Լուկասի խորանարդների ուժեղ քրոնատիկ ինդեքսի համար:

Թեորեմ 1.1.2. *Կամայական $n \geq 3$ բնական թվի համար ստույգ է հետևյալ հավասարությունը՝*

$$\chi'_s(F_n) = 2n - 1:$$

Թեորեմ 1.1.3. *Կամայական $n \geq 4$ բնական թվի համար ստույգ են հետևյալ անհավասարությունները՝*

$$2n - 2 \leq \chi'_s(L_n) \leq 2n - 1:$$

Ավելին, $\chi'_s(L_n) = 2n - 1$, երբ $n \leq 10$:

Նկար 1.1-ում պարկերված է F_4 և F_5 գրաֆների ուժեղ կողային ներկումները նվազագույն գույներով: 1.2 պարագրաֆը նվիրված է ընդլայնված խորանարդների ուժեղ կողային ներկումներին:

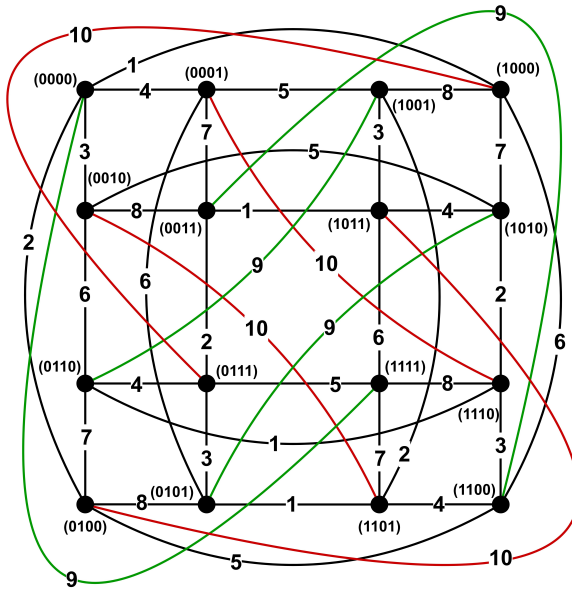
$n \in \mathbb{N}$ թվի համար, AQ_n -ով նշանակվում է n -չափանի *ընդլայնված խորանարդը*, որտեղ

- $V(AQ_n) = \{(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n) : 1 \leq i \leq n, \alpha_i \in \{0, 1\}\},$
- $E(AQ_n) = \{((\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n), (\beta_1\beta_2 \dots \beta_n)) : (\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n) \text{ և } (\beta_1\beta_2 \dots \beta_n) \text{ տարբերվում են միայն մեկ դիրքում կամ բոլոր դիրքերում}\}:$

1.2 պարագրաֆում է ցույց է տրվել $\chi'_s(AQ_n)$ -ի արժեքը, երբ n -ը զույգ է, և տրվել է $\chi'_s(AQ_n)$ -ի վերին գնահատական, երբ n -ը կենտ է:

Թեորեմ 1.2.1. *Կամայական $n \geq 3$ բնական թվի համար ստույգ են հետևյալ արտահայտությունները՝*

- (a) $\chi'_s(AQ_n) = 2n + 2$, երբ n -ը զույգ է,
- (b) $2n + 2 \leq \chi'_s(AQ_n) \leq 4n + 4$, երբ n -ը կենտ է:



Նկ. 1.2: AQ_4 գրաֆի ուժեղ կողային ներկումը 10 գույնով:

Նկար 1.2-ում պարկերված է AQ_4 գրաֆի ուժեղ կողային ներկումը նվազագույն գույներով:

1.3 պարագրաֆը նվիրված է խորանարդային կապակցված ցիկլերի ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսի վերին գնահատականներին:

$n \geq 3$ բնական թվի համար CCC_n -ով նշանակվում է n -չափանի խորանարդային կապակցված ցիկլերը, որտեղ

- $V(CCC_n) = \{((\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n), k) : 1 \leq i \leq n, \alpha_i \in \{0, 1\}, 1 \leq k \leq n\},$
- $((\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n), k), ((\beta_1\beta_2 \dots \beta_n), l)) \in E(CCC_n)$ եթե

- $k = l$ և $(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n)$ -ն և $(\beta_1\beta_2 \dots \beta_n)$ -ն տարբերվում են միայն k -րդ դիրքում, կամ
- $(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n) = (\beta_1\beta_2 \dots \beta_n)$ և k -ն հաջորդում է l -ին $(1, 2, \dots, n, 1)$ հաջորդականությամբ:

1.3 պարագրաֆում ապացուցվել է խորանարդային կապակցված ցիկլերի ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսի մասին հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 1.3.1. *Կամայական $n \geq 3$ բնական թվի համար ստույգ է հետևյալը՝*

- (a) $\chi'_s(CCC_3) = 6$,
- (b) $\chi'_s(CCC_n) \leq 6$, երբ n -ը բաժանվում է 4-ի,
- (c) $\chi'_s(CCC_n) \leq 8$, երբ n -ը բաժանվում է 6-ի,
- (d) $\chi'_s(CCC_n) \leq 9$, երբ n -ը բաժանվում է 3-ի:

1.4 պարագրաֆը նվիրված է որոշակի ֆակտորիզացիաներով օժտված երկկողմանի գրաֆների ուժեղ կողային ներկումներին: 1993 թվականին, Բրուալդին և Մասսին ձևակերպել են հետևյալ հիպոթեզը երկկողմանի գրաֆների համար¹⁹:

Հիպոթեզ 1.1. *Կամայական (a, b) -երկկողմանի G գրաֆի համար ստույգ է հետևյալ անհավասարությունը՝*

$$\chi'_s(G) \leq ab:$$

Առ այսօր, հիպոթեզ 1.1-ը հաջողվել ապացուցել միայն այն երկկողմանի գրաֆների համար, որոնց կողմերից մեկի գագաթի առավելագույն աստիճանը չի գերազանցում 3-ը^{20, 21}.

Թեորեմ 1.4.1. *Կամայական $(2, r)$ -երկկողմանի G գրաֆի համար ստույգ է հետևյալ անհավասարությունը՝*

$$\chi'_s(G) \leq 2r:$$

Թեորեմ 1.4.2. *Կամայական $(3, r)$ -երկկողմանի G գրաֆի համար ստույգ է հետևյալ անհավասարությունը՝*

$$\chi'_s(G) \leq 3r:$$

(a, b) -երկկողմանի $G = (X, Y, E)$ գրաֆը կանվանենք *երկհամասեռ*, եթե

- յուրաքանչյուր $x \in X$ գագաթի համար $d_G(x) = a$,
- յուրաքանչյուր $y \in Y$ գագաթի համար $d_G(y) = b$:

1.4 պարագրաֆում ստացվել են հետևյալ արդյունքները երկկողմանի գրաֆների ուժեղ կողային ներկումների մասին:

¹⁹R.A. Brualdi, J.J.Q. Massey, Incidence and strong edge colorings of graphs, Discrete Mathematics 122(1-3), 1993, pp. 51-58.

²⁰K. Nakprasit, A note on the strong chromatic index of bipartite graphs, Discrete Mathematics 308(16), 2008, pp. 3726-3728.

²¹M. Huang, G. Yu, X. Zhou, The strong chromatic index of $(3, \Delta)$ -bipartite graphs, Discrete Mathematics 340(5), 2017, pp. 1143-1149.

Թեորեմ 1.4.3. Կամայական համասեռ երկկողմանի $G = (X, Y, E)$ գրաֆի համար, որը չի պարունակում $K_{\Delta(G)+1}$ -ը որպես մինոր և $\Delta(G) \leq 5$, ստույգ է հետևյալ անհավասարությունը՝

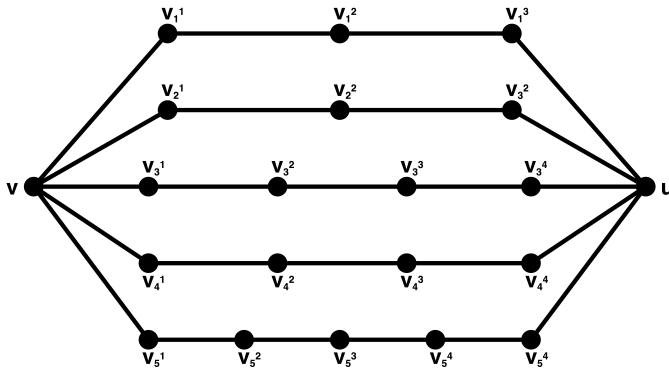
$$\chi'_s(G) \leq \Delta(G)^2:$$

Թեորեմ 1.4.4. Կամայական $(2l, 2r)$ -երկհամասեռ $G = (X, Y, E)$ գրաֆի համար, որը պրոհվում է r հար $(2l, 2)$ -երկհամասեռ ենթագրաֆների, ստույգ է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\chi'_s(G) \leq 4lr:$$

Նկատենք նաև, որ Թեորեմ 1.4.3-ը և Թեորեմ 1.4.4-ը հաստատում են Բրուալդիի և Մասսիի հիպոթեզը մասնավոր դեպքերում:

1.5 պարագրաֆում ուսումնասիրվել են ընդհանրացված թետա գրաֆների ուժեղ կողային ներկումները: Մասնավորապես, ստացվել է ընդհանրացված թետա գրաֆների ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսի արժեքը:



Նկ. 1.3: $\Theta(3^2, 4^2, 5^1)$:

$1 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_k$ և $n_1, n_2, \dots, n_k \geq 1$ բնական թվերի համար $\Theta(s_1^{n_1}, s_2^{n_2}, \dots, s_k^{n_k})$ -ն ընդհանրացված թետա գրաֆ է, որում 2 զագաթ միացված են n_1 հատ $s_1 + 1$ երկարության, n_2 հատ $s_2 + 1$ երկարության, $\dots$, n_k հատ $s_k + 1$ երկարության չհատվող ճանապարհներով (Օրինակ՝ Նկ 1.3):

Թեորեմ 1.5.1. Կամայական $k \geq 2$, $s_k > s_{k-1} > \dots > s_2 > s_1 \geq 2$ և $n_1 + n_2 + \dots + n_k \geq 6$ բնական թվերի համար, ստույգ է հետևյալը՝

$$\chi'_s(\Theta(s_1^{n_1}, s_2^{n_2}, \dots, s_k^{n_k})) = \begin{cases} n_1 + n_2 + \dots + n_k + 2, & \text{երբ } s_1 = 2 \text{ և } s_2 \in \{3, 4\}, \\ n_1 + n_2 + \dots + n_k + 1, & \text{մնացած դեպքերում:} \end{cases}$$

Թեորեմ 1.5.2. Կամայական $k \geq 2$, $s_k > s_{k-1} > \dots > s_2 > s_1 = 1$ և $2n_1 + n_2 + \dots + n_k \geq 6$ թվերի համար ստույգ է հետևյալը՝

$$\chi'_s(\Theta(s_1^{n_1}, s_2^{n_2}, \dots, s_k^{n_k})) = \begin{cases} 2n_1 + n_2 + \dots + n_k + 1, & \text{երբ } s_2 = 2, \\ 2n_1 + n_2 + \dots + n_k, & \text{մնացած դեպքերում:} \end{cases}$$

Աշխատանքի երկրորդ գլուխը նվիրված է գրաֆային մի շարք գործողությունների ուժեղ կողային ներկումներին: Գրաֆային գործողությունների ուժեղ կողային ներկումները առաջին անգամ դիտարկել է Տոգնին 2007 թվականին ²²: Մասնավորապես, հեղինակը ստացվել է գրաֆների դեկարտյան, ուղիղ և ուժեղ արտադրյալների ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսների հասանելի վերին գնահատականներ:

Թեորեմ 2.1.1. *Կամայական G և H գրաֆների համար ստույգ են հետևյալ անհավասարությունները՝*

$$\chi'_s(G \square H) \leq \chi'_s(G)\chi(H) + \chi'_s(H)\chi(G):$$

Թեորեմ 2.1.2. *Կամայական G և H գրաֆների համար ստույգ են հետևյալ անհավասարությունները՝*

$$\chi'_s(G \times H) \leq \chi'_s(G)\chi'_s(H):$$

Թեորեմ 2.1.3. *Կամայական G և H գրաֆների համար ստույգ են հետևյալ անհավասարությունները՝*

$$\chi'_s(G \boxtimes H) \leq \chi'_s(G)\chi(H) + \chi'_s(H)\chi(G) + 2\chi'_s(G)\chi'_s(H):$$

2.1 պարագրաֆում տրվել են հասանելի ստորին և վերին գնահատականներ գրաֆների լեքսիկոգրաֆիկ արտադրյալների ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսի համար:

G և H գրաֆների լեքսիկոգրաֆիկ արտադրյալը $G \circ H$ գրաֆն է, որտեղ՝

- $V(G \circ H) = V(G) \times V(H)$,
- $((v, x), (u, y)) \in E(G \circ H)$, եթե $(v, u) \in E(G)$, կամ $v = u$ և $(x, y) \in E(H)$:

Թեորեմ 2.1.4. *Կամայական G և H գրաֆների համար ստույգ են հետևյալ անհավասարությունները՝*

$$\chi'_s(G)|V(H)|^2 \leq \chi'_s(G \circ H) \leq \chi(G)\chi'_s(H) + \chi'_s(G)|V(H)|^2:$$

Ավելին, սրացված գնահատականները հասանելի են:

2.2 պարագրաֆում ուսումնասիրվել են գրաֆների կորանա արտադրյալների ուժեղ կողային ներկումները:

G և H գրաֆների $G \odot H$ կորոնա արտադրյալը կառուցվում է մեկ G գրաֆի կրկնօրինակից և $|V(G)|$ հատ H գրաֆի կրկնօրինակներից՝ միացնելով G գրաֆի i -րդ $(1 \leq i \leq |V(G)|)$ գագաթը H գրաֆի i -րդ կրկնօրինակի բոլոր գագաթներին:

2024 թվականին Թիրուն և Բալաջին դիտարկել են գրաֆների կորոնա արտադրյալի ուժեղ կողային ներկումները ²³ և ստացել են հետևյալ արդյունքը:

Թեորեմ 2.2.1. *Կամայական կապակցված G և H գրաֆների համար, որտեղ $|V(G)| \geq 2$ և $|V(H)| \geq 2$, ստույգ են հետևյալ անհավասարությունները՝*

$$\chi'_s(G) + \chi'_s(H) + |V(H)| \leq \chi'_s(G \odot H) \leq \chi'_s(G) + \chi'_s(H) + |V(G)||V(H)|:$$

²²O. Togni, Strong chromatic index of products of graphs, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 9, no. Graph and Algorithms, 2007.

²³V. S. Thiru, S. Balaji, Strong chromatic indices of certain binary operations on graphs, Discrete Mathematics, Algorithms and Applications 16(6), 2024, 2350073.

2.1 պարագրաֆում լավացվել է Թեորեմ 2.2.1-ի վերին գնահատականը և ցույց տրվել, որ նոր վերին գնահատականը հասանելի է:

Թեորեմ 2.2.2. *Կամայական կապակցված G և H գրաֆների համար, որտեղ $|V(G)| \geq 2$ և $|V(H)| \geq 2$, ստույգ են հետևյալ անհավասարությունները՝*

$$\Delta'(G \odot H) + 1 \leq \chi'_s(G \odot H) \leq \chi'_s(G) + D_{G \odot H} + \chi(G)|V(H)|,$$

որտեղ $D_{G \odot H} = \max\{0, \chi'_s(H) - (\chi'_s(G) - \Delta(G)) - (\chi(G) - 1)|V(H)|\}$: Ավելին, ստացված գնահատականները հասանելի են:

2.3 պարագրաֆում ուսումնասիրվել են կողային տրոհումներով գրաֆների, գրաֆների աստիճանների, և գրաֆների կոտորակային աստիճանների ուժեղ կողային ներկումները:

G գրաֆի և $n \in \mathbb{N}$ թվի համար, $G^{\frac{1}{n}}$ -ով նշանակվում է G գրաֆի կողային n -տրոհումով գրաֆը, որը ստացվում է G գրաֆից՝ յուրաքանչյուր կող փոխարինելով n երկարությամբ ճանապարհով:

Կապակցված G գրաֆի և $m \in \mathbb{N}$ թվի համար G^m -ով նշանակվում է G գրաֆի m -րդ աստիճանը, որտեղ $V(G^m) = V(G)$ և $E(G^m) = \{(u, v) : 1 \leq d_G(u, v) \leq m\}$:

2.3 պարագրաֆում ստացվել են կողային տրոհումներով գրաֆների և գրաֆների աստիճանների ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսների ճշգրիտ արժեքները՝ մասնավոր դեպքերում:

Թեորեմ 2.3.1. *Կամայական G գրաֆի և $n \geq 6$ թվի համար, որտեղ $\Delta(G) \geq 5$, ստույգ է հետևյալ հավասարությունը՝*

$$\chi'_s(G^{\frac{1}{n}}) = \Delta(G) + 1:$$

Լեմմա 2.3.2. *Կամայական $k, m \in \mathbb{N}$ թվերի համար, որտեղ $k \geq 3m + 1$, ստույգ է հետևյալ հավասարությունը՝*

$$\chi'_s(P_k^m) = \frac{3m(m+1)}{2}:$$

Լեմմա 2.3.3. *Կամայական $k, m \in \mathbb{N}$ թվերի համար, որտեղ $k \geq \frac{3m(m+1)}{2}$, ստույգ է հետևյալ հավասարությունը՝*

$$\chi'_s(C_k^m) = \frac{3m(m+1)}{2}:$$

Կապակցված G գրաֆի և $n, m \in \mathbb{N}$ թվերի համար $G^{\frac{m}{n}}$ -ով նշանակվում է G գրաֆի $\frac{m}{n}$ -րդ աստիճանը, որտեղ $G^{\frac{m}{n}} = (G^{\frac{1}{n}})^m$:

2.3 պարագրաֆում ստացվել են նաև հետևյալ արդյունքները գրաֆների կոտորակային աստիճանների համար:

Թեորեմ 2.3.4. *Կամայական կապակցված G գրաֆի և $n, m \in \mathbb{N}$ թվերի համար, որտեղ $n \geq 3m + 1$, ստույգ են հետևյալ անհավասարությունները՝*

$$M_{J^{\frac{m}{n}}}(G) \leq \chi'_s(G^{\frac{m}{n}}) \leq M_{J^{\frac{m}{n}}}(G) + \frac{3m(m+1)}{2},$$

որտեղ

$$\bullet M_{J^{\frac{m}{n}}}(G) = \frac{m^2 \Delta(G)^2 + m \Delta(G)(m - \Delta(G) + 5)}{4}, \text{ երբ } m\text{-ը զույգ է,}$$

$$\bullet M_J^{\frac{m}{n}}(G) = \frac{m^2 \Delta(G)^2 + m \Delta(G)(m - \Delta(G) + 3)}{4} + m, \text{ երբ } m\text{-ը կենսի է:}$$

Հետևանք 2.3.5. Կամայական $2k$ -համասեռ G գրաֆի և $n, m \in \mathbb{N}$ թվերի համար, երբ m -ը զույգ է և n -ը բաժանվում է $\frac{3}{2}m(m+1)$ -ի վրա, ստույգ է հետևյալ հավասարությունը՝

$$\chi'_s(G^{\frac{m}{n}}) = M_J^{\frac{m}{n}}(G),$$

$$\text{որպեսզի } M_J^{\frac{m}{n}}(G) = \frac{m^2 \Delta(G)^2 + m \Delta(G)(m - \Delta(G) + 5)}{4}:$$

Աշխատանքի երրորդ գլուխը նվիրված է գրաֆների համարյա ուժեղ կողային ներկումների կառուցման և գրաֆների համարյա ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսի հետազոտմանը: Գրաֆների համարյա ուժեղ կողային ներկումներին նվիրված առաջին աշխատանքում, Դյարֆաշը և Հուբենկոն դիտարկել են գրաֆների դասեր, որոնց ուժեղ և համարյա ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսների արժեքները համընկնում են: 2024 թվականին Լուծարը, Մոկոպյակովան, և Սոտակը ցույց են տվել, որ կամայական G գրաֆի համար $\chi'_{ss}(G) \leq \Delta(G)^2$ և կամայական կապակցված G գրաֆի համար, որտեղ $\Delta(G) \leq 3$ և G -ն տարբեր է $K_{3,3}$ -ից՝ $\chi'_{ss}(G) \leq 8$:

3.1 պարագրաֆում դիտարկվել են որոշ նոր գրաֆների ուժեղ և համարյա ուժեղ կողային ներկումները: Մասնավորապես, ստացվել են հետևյալ արդյունքները:

Թեորեմ 3.1.1. Կամայական մեկ պարզ ցիկլ պարունակող կապակցված G գրաֆի համար, որպեսզի $\Delta(G) \geq 4$, ստույգ է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\chi'_{ss}(G) \leq \Delta(G) + 1:$$

Կապակցված G գրաֆը է ցիկլիկ ծառ է, եթե G գրաֆի յուրաքանչյուր գագաթ պատկանում է առավելագույնը մեկ պարզ ցիկլի:

Թեորեմ 3.1.2. Կամայական G ցիկլիկ ծառի համար ստույգ է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\chi'_{ss}(G) \leq \Delta(G) + 2:$$

3.2 պարագրաֆում նկարագրվել է համարյա ուժեղ կողային ներկումներ կառուցելու նոր մոտեցում՝ հիմնված գրաֆների կողմնորոշման վրա: Մասնավորապես, այդ մոտեցման միջոցով ստացվել է հետևյալ արդյունքը արտաքին հարթ գրաֆների համար:

Թեորեմ 3.2.1. Կամայական արտաքին հարթ G գրաֆի համար ստույգ է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\chi'_{ss}(G) \leq 2\Delta(G) + \left\lfloor \frac{\Delta(G) + 1}{2} \right\rfloor + 2:$$

Ավելին, կամայական $k \in \mathbb{N}$ թվի համար գոյություն ունի արտաքին հարթ գրաֆ G այնպիսին, որ $\Delta(G) = k$ և $\chi'_{ss}(G) = 2k - 1$:

3.3 պարագրաֆում դիտարկվել են որոշ գրաֆային գործողությունների համարյա ուժեղ կողային ներկումները և նկարագրվել են գրաֆների նոր դասեր, որոնց ուժեղ և համարյա ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսների արժեքները համընկնում են: Մասնավորապես, ստացվել են հետևյալ արդյունքները:

Թեորեմ 3.3.1. Կամայական H և G գրաֆների համար սրույգ են հետևյալ անհավասարությունները՝

$$\chi'_{ss}(G)|V(H)|^2 \leq \chi'_{ss}(G \circ H) \leq \chi(G)\chi'_{ss}(H) + \chi'_{ss}(G)|V(H)|^2:$$

Ավելին, սրացված վերին գնահատականը հասանելի է:

Հետևանք 3.3.2. Կամայական $n \geq 6$ բնական թվի H գրաֆի համար, որտեղ $\chi'_s(H) = \chi'_{ss}(H)$, սրույգ են հետևյալ հավասարությունները՝

$$\chi'_s(P_n \odot H) = \chi'_{ss}(P_n \odot H) = 2\chi'_s(H) + 3|V(H)|^2:$$

Թեորեմ 3.3.3. Կամայական կապակցված G և H գրաֆների համար, որտեղ $|V(G)| \geq 2$ և $|V(H)| \geq 2$, սրույգ է հետևյալ անհավասարությունը՝

$$\chi'_{ss}(G \odot H) \leq \chi'_{ss}(G) + D'_{G \odot H} + |V(H)|,$$

որտեղ $D'_{G \odot H} = \max\{0, \chi'_{ss}(H) - (\chi'_{ss}(G) - \Delta(G))\}$: Ավելին, սրացված գնահատականը հասանելի է:

Հետևանք 3.3.4. Կամայական կապակցված H գրաֆի և $n \in \mathbb{N}$ թվի համար, որտեղ $V(H) \geq 2$, $\chi'_{ss}(H) = \chi'_s(H)$ և $\chi'_{ss}(H) \geq \frac{n(n-1)}{2} - (n-1)$, սրույգ են հետևյալ հավասարությունները՝

$$\chi'_s(K_n \odot H) = \chi'_{ss}(K_n \odot H) = \chi'_s(H) + (n-1) + |V(H)|:$$

G և H գրաֆների համար $G + H$ -ով նշանակվում է նրանց գումարը, որտեղ՝

- $V(G + H) = V(G) \cup V(H)$,
- $E(G + H) = E(G) \cup E(H) \cup \{(v, u) : v \in V(G), u \in V(H)\}$:

Պնդում 3.3.5. Կամայական G և H գրաֆների համար սրույգ է հետևյալ հավասարությունը՝

$$\chi'_{ss}(G + H) = \chi'_{ss}(G) + \chi'_{ss}(H) + |V(G)||V(H)|:$$

Հետևանք 3.3.6. Կամայական G և H գրաֆների համար, այնպիսին, որ $\chi'_{ss}(G) = \chi'_s(G)$ և $\chi'_{ss}(H) = \chi'_s(H)$, սրույգ են հետևյալ հավասարությունները՝

$$\chi'_s(G + H) = \chi'_{ss}(G + H) = \chi'_s(G) + \chi'_s(H) + |V(G)||V(H)|:$$

3.4 պարագրաֆը նվիրված է Հենմինգի գրաֆների համարյա ուժեղ կողային ներկումներին:

$n, m \in \mathbb{N}$ թվերի համար $H(n, m)$ Հենմինգի գրաֆը սահմանվում է հետևյալ կերպ.

- $V(H(n, m)) = \{(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) : 1 \leq i \leq n, 0 \leq \alpha_i \leq m-1\}$,
- $E(H(n, m)) = \{((\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n), (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n)) : (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n) \text{ և } (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n) \text{ տարբերվում են ճիշտ մեկ դիրքում}\}$:

3.4 պարագրաֆում ստացվել է Հենմինգի գրաֆների համարյա ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսի հետևյալ գնահատականները:

Թեորեմ 3.4.1. Կամայական $n, m \in \mathbb{N}$ թվերի համար ստույգ են հետևյալ անհավասարությունները՝

$$(a) \frac{(2n + m - 2)(m - 1)}{2} \leq \chi'_{ss}(H(n, m)) \leq nm(m - 1), \text{ երբ } m\text{-ը զույգ է,}$$

$$(b) \frac{(2n + m - 2)(m - 1)}{2} \leq \chi'_{ss}(H(n, m)) \leq \frac{(2n + 1)m(m - 1)}{2}, \text{ երբ } m\text{-ը կենտ է:}$$

Նկատենք, որ $H(n, 2) = Q_n$, և Թեորեմ 3.4.1-ում տրված վերին գնահատականը համընկնում է $\chi'_{ss}(Q_n)$ -ի համար հայտնի գնահատականի հետ և տալիս է պարամետրի ճշգրիտ արժեքը:

Հիմնական արդյունքներն ու հետևությունները

Այս աշխատանքում դիտարկվել են գրաֆների տարբեր դասերի ուժեղ և համարյա ուժեղ կողային ներկումների կառուցման, ուժեղ և համարյա ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսների արժեքների որոշման կամ գնահատման խնդիրները: Դիտարկվել են նաև գրաֆային մի շարք գործողությունների ուժեղ և համարյա ուժեղ կողային ներկումների կառուցման, և ուժեղ և համարյա ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսների արժեքների գնահատման խնդիրները՝ արտահայտված գրաֆների այլ թվային պարամետրերով, ինչպես նաև համընկնող ուժեղ և համարյա ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսների արժեքներով գրաֆների դասեր:

Աշխատանքում ստացվել են հետևյալ արդյունքները.

1) Ստացվել են Ֆիբոնաչիի և Լուկասի խորանարդների, ընդլայնված խորանարդների ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսների գնահատականներ, որոշ դեպքերում՝ ճշգրիտ արժեքներ, մասնավորապես, ապացուցվել է, որ կամայական $n \geq 3$ բնական թվի համար՝ $\chi'_s(F_n) = 2n - 1$ և $\chi'_s(AQ_n) = 2n + 2$, երբ n -ը զույգ է,

2) Հաստատվել է Բրուալդի-Մասսի հիպոթեզը համասեռ երկկողմանի G գրաֆների համար, երբ $\Delta(G) \leq 5$ և G -ն չի պարունակում $K_{\Delta(G)+1}$ -ը որպես մինոր, և որոշակի ֆակտորիզացիայով օժտված երկհամասեռ երկկողմանի գնահատման համար, մասնավորապես ապացուցվել է, որ եթե $(2l, 2r)$ -երկհամասեռ G գրաֆը տրոհվում է r հատ $(2l, 2)$ -երկհամասեռ ենթագրաֆների, ապա $\chi'_s(G) \leq 4lr$:

3) Ստացվել են հասանելի ստորին և վերին գնահատականներ գրաֆների լեքսիկոգրաֆիկ և կորոնա արտադրյալների, կոտորակային աստիճանների, Միչելյան գործողության ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսների համար, մասնավորապես, ցույց է տրվել, որ կամայական G և H գրաֆների համար $\chi'_s(G)|V(H)|^2 \leq \chi'_s(G \circ H) \leq \chi(G)\chi'_s(H) + \chi'_s(G)|V(H)|^2$, ավելին, ստացված գնահատականները հասանելի են,

4) Առաջարկվել է համարյա ուժեղ կողային ներկումներ կառուցելու նոր մոտեցում, որի միջոցով ցույց է տրվել արտաքին հարթ գրաֆների համարյա ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսի վերին գնահատական, մասնավորապես, ապացուցվել է, որ կամայական արտաքին հարթ G գրաֆի համար $\chi'_{ss}(G) \leq 2\Delta(G) + \left\lfloor \frac{\Delta(G) + 1}{2} \right\rfloor + 2$,

5) Ստացվել են հասանելի վերին գնահատականներ գրաֆների լեքսիկոգրաֆիկ և կորոնա արտադրյալների համարյա ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսի համար, մասնավորապես, ցույց է տրվել, որ եթե G -ն և H -ը կապացված գրաֆներ են և $|V(G)| \geq 2$, $|V(H)| \geq 2$, ապա $\chi'_{ss}(G \odot H) \leq \chi'_{ss}(G) + D'_{G \odot H} + |V(H)|$, որտեղ $D_{G \odot H} = \max\{0, \chi'_{ss}(H) - (\chi'_{ss}(G) - \Delta(G))\}$,

6) Կառուցվել են մի շարք գրաֆների դասեր, որոնց ուժեղ և համարյա ուժեղ քրոմատիկ ինդեքսների արժեքները համընկնում են, որոնցից են՝ $P_n \circ H$, $G + H$, երբ $n \geq 6$, $\chi'_s(G) = \chi'_{ss}(G)$ և $\chi'_s(H) = \chi'_{ss}(H)$:

Ատենախոսության թեմայի շրջանակներում հրապարակված աշխատանքների ցանկ

1. А. Драмбян, П. Петросян, Сильные реберные раскраски кубов Фибоначчи, XIV Годи́чная научная конференция РАУ (Сборник статей), Ереван, Армения, 2020, стр. 28–30,
2. A. Drambyan, P. Petrosyan, Strong edge colorings of Hamming graphs, International Conference Mathematics & IT: Research and Education (MITRE-2021), Chişinău, Republic of Moldova, 2021, pp. 30–31,
3. A. Drambyan, T. Petrosyan, Strong edge coloring of Fibonacci and Lucas cubes, Vestnik of Russian-Armenian University (series: Physical-mathematical and natural sciences), 1, 2022, pp. 23–29,
4. A. Drambyan, Strong edge coloring of Hamming graphs in special case, Vestnik of Russian-Armenian University (series: Physical-mathematical and natural sciences), 2, 2022, pp. 59–66,
5. A. Drambyan, P. Petrosyan, Strong Edge-Coloring of Hamming Graphs, Proceedings of CSIT Conference 2023, 2023, pp. 131–132,
6. A. Drambyan, P. Petrosyan, Strong edge-colorings of powers of paths and cycles, XVII Годи́чная научная конференция РАУ (Сборник статей), Ереван, Армения, 2024, стр. 35–37,
7. A. Drambyan, Strong edge-colorings of some lexicographic products of graphs, International Conference dedicated to the 60th anniversary of the foundation of Vladimir Andrunachievici Institute of Mathematics and Computer Science (IMCS-60), 2024, pp. 422–425.
8. A. Drambyan, On strong chromatic index of some operations on graphs, Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences 59 (1), 2025, pp. 1–9,
9. A. Drambyan, Semistrong edge-coloring of outerplanar graphs, Abstracts of the conference "Current Issues in Computer Science and Applied Mathematics 2025", YSU, Yerevan, 2025, pp. 17–18,
10. A. Drambyan, On strong chromatic index of lexicographic products of graphs, Vestnik of Russian-Armenian University (series: Physical-mathematical and natural sciences), 1, 2025, pp. 18–25:
11. П.А. Петросян, А.К. Драмбян, О сильных реберных раскрасках двудольных графов, Vestnik of Russian-Armenian University (series: Physical-mathematical and natural sciences), 1, 2025, pp. 33–40,
12. A. Drambyan, H. Mikaelyan, On semistrong edge-coloring of outerplanar graphs, Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences 59 (2), 2025, pp. 32–45:

Abstract

Edge-coloring problems of graphs are one of the well-known and dynamically evolving research directions in discrete mathematics. It is known that many real-life problems can be modeled using edge-colorings of graphs with various constraints. For example, channel-assignment problems in wireless radio networks reduce to strong edge-coloring problems of graphs. This work is devoted to the investigation of such colorings and their generalizations.

We consider finite undirected graphs without loops and multiple edges. We denote by $V(G)$ and $E(G)$ the sets of vertices and edges of a graph G , respectively. For any $v \in V(G)$, let $d_G(v)$ denote the degree of v in G , and let $\Delta(G)$ denote the maximum degree of G .

Let $V' \subseteq V(G)$ be a subset of the vertex set of a graph G . Denote by $G[V']$ the subgraph of G induced by the vertex set V' .

A set of edges M of a graph G is called a matching if no two edges in M are adjacent. A vertex v is said to be covered by the matching M if v is incident to an edge from M . Denote by $V(M)$ the set of vertices covered by matching M . The matching M is called strong if $\Delta(G[V(M)]) = 1$, and semistrong if for each edge $(v, u) \in M$, $d_{G[V(M)]}(v) = 1$ or $d_{G[V(M)]}(u) = 1$.

A proper edge-coloring of a graph G is a mapping $\alpha : E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ such that $\alpha(e) \neq \alpha(e')$ for every pair of adjacent edges e and e' . If in a proper edge-coloring α of G the set of edges of each color forms a strong (semistrong) matching, then α is called a strong (semistrong) edge-coloring. The minimum number of colors required for a strong (semistrong) edge-coloring of G is called the strong (semistrong) chromatic index of G and is denoted by $\chi'_s(G)$ ($\chi'_{ss}(G)$).

In this work, we consider the problems of constructing strong and semistrong edge-colorings of various classes of graphs, as well as determining or estimating the values of their strong and semistrong chromatic indices. We also investigate the construction of such colorings for various graph operations, estimate their chromatic indices in terms of other numerical graph parameters, and describe classes of graphs whose strong and semistrong chromatic indices coincide.

The following results are obtained:

1. The bounds or the exact values on the strong chromatic indices of the Fibonacci cubes F_n , the Lucas cubes L_n , and the augmented cubes AQ_n . In particular, it is proved that for any natural number $n \geq 3$, $\chi'_s(F_n) = 2n - 1$ and $\chi'_s(AQ_n) = 2n + 2$ for even n .
2. The Brualdi–Massey conjecture is confirmed for regular bipartite graphs G with $\Delta(G) \leq 5$ that do not contain $K_{\Delta(G)+1}$ as a minor, and for biregular bipartite graphs admitting a specific factorization. In particular, if a $(2l, 2r)$ –biregular bipartite graph G decomposes into $(2l, 2)$ –biregular r subgraphs, then $\chi'_s(G) \leq 4lr$.
3. Sharp lower and upper bounds on the strong chromatic indices of lexicographic products $G \circ H$, corona products $G \odot H$, fractional powers of graphs, and Mycielskian of graphs. Specifically, for any two graphs G and H ,

$$\chi'_s(G) |V(H)|^2 \leq \chi'_s(G \circ H) \leq \chi(G) \chi'_s(H) + \chi'_s(G) |V(H)|^2,$$

and these bounds are tight.

4. A new approach is suggested for constructing semistrong edge-colorings of graphs based on graph orientations, using which the upper bound on the semistrong chromatic index of outerplanar graphs is obtained. In particular, for any outerplanar graph G ,

$$\chi'_{ss}(G) \leq 2\Delta(G) + \left\lfloor \frac{\Delta(G)+1}{2} \right\rfloor + 2.$$

5. The tight upper bounds on the semistrong chromatic indices of lexicographic and corona products of graphs is derived, in particular, if G and H are connected graphs with $|V(G)| \geq 2$ and $|V(H)| \geq 2$, then

$$\chi'_{ss}(G \odot H) \leq \chi'_{ss}(G) + D'_{G \odot H} + |V(H)|,$$

where $D'_{G \odot H} = \max\{0, \chi'_{ss}(H) - (\chi'_{ss}(G) - \Delta(G))\}$.

6. Several classes of graphs are described for which the strong and semistrong chromatic indices coincide. In particular, for $n \geq 6$ and graphs G, H satisfying $\chi'_s(G) = \chi'_{ss}(G)$ and $\chi'_s(H) = \chi'_{ss}(H)$, the following hold: $\chi'_s(P_n \circ H) = \chi'_{ss}(P_n \circ H)$ and $\chi'_s(G + H) = \chi'_{ss}(G + H)$.

Резюме

Задачи раскрасок графов являются одним из известных и динамично развивающихся направлений исследований в дискретной математике. Известно, что многие прикладные задачи моделируются с помощью реберных раскрасок графов с дополнительными ограничениями. Так, например, задачи распределения частот в беспроводных радиосетях сводятся к задачам сильной реберной раскраски графов. Данная работа посвящена исследованию подобных раскрасок и их обобщений.

В диссертационной работе рассматриваются конечные неориентированные графы без кратных ребер и петель. Обозначим через $V(G)$ и $E(G)$ соответственно множества вершин и ребер графа G . Для любой вершины $v \in V(G)$ обозначим через $d_G(v)$ степень вершины v , а через $\Delta(G)$ — максимальную степень графа G .

Пусть $V' \subseteq V(G)$ — подмножество множества вершин графа G . Обозначим через $G[V']$ подграф графа G , порожденный вершинами V' .

Множество ребер $M \subseteq E(G)$ графа G называется паросочетанием, если никакие два ребра из M не имеют общей вершины. Скажем, что вершина v покрывается паросочетанием M , если вершина v инцидентна ребру из M . Обозначим через $V(M)$ множество вершин, покрытых паросочетанием M . Паросочетание M называется сильным, если $\Delta(G[V(M)]) = 1$, и почти сильным, если для каждого ребра $(v, u) \in M$ — $d_{G[V(M)]}(v) = 1$ или $d_{G[V(M)]}(u) = 1$.

Правильная реберная раскраска графа G это отображение $\alpha : E(G) \rightarrow \mathbb{N}$ такое, что $\alpha(e) \neq \alpha(e')$ для любых смежных ребер e и e' . Правильная реберная раскраска α графа G называется сильной (почти сильной), если ребра, окрашенные в один и тот же цвет, составляют сильное (почти сильное) паросочетание. Минимальное количество цветов, необходимое для сильной (почти сильной) реберной раскраски, называется сильным (почти сильным) хроматическим индексом графа G и обозначается через $\chi'_s(G)$ ($\chi'_{ss}(G)$).

В данной работе рассматриваются следующие задачи: построение сильных и почти сильных реберных раскрасок для различных классов графов и определение точных значений, либо оценка сильного (почти сильного) хроматического индекса. Кроме того, в работе исследуются задачи построения и оценки числовых параметров сильных и почти сильных реберных раскрасок различных операций над графами, а также описаны некоторые классы графов, для которых сильные и почти сильные хроматические индексы совпадают.

В работе получены следующие результаты:

1. оценки сильного хроматического индекса кубов Фибоначчи и кубов Лукаса, а также n -мерных расширенных кубов; в отдельных случаях установлены точные значения этого параметра, в частности, доказано, что для любого натурального $n \geq 3$ выполняются равенства $\chi'_s(F_n) = 2n - 1$ и $\chi'_s(AQ_n) = 2n + 2$ при четных n ;
2. подтверждена гипотеза Брюальди-Масси для регулярных двудольных графов G при $\Delta(G) \leq 5$ и отсутствии $K_{\Delta(G)+1}$ в качестве минора, а также для бирегулярных двудольных графов с заданной факторизацией, в частности, доказано, что для $(2l, 2r)$ -бирегулярного двудольного графа, разлагающегося на r непересекающихся $(2l, 2)$ -бирегулярных подграфов, выполняется неравенство $\chi'_s(G) \leq 4lr$;
3. достижимые нижние и верхние оценки сильного хроматического индекса для лексикографического произведения графов, короны графов, дробных степеней и

операции Мычельского графов, в частности, установлено, что для любых графов G и H справедливы неравенства $\chi'_s(G)|V(H)|^2 \leq \chi'_s(G \circ H) \leq \chi(G)\chi'_s(H) + \chi'_s(G)|V(H)|^2$;

4. предложен новый подход для построения почти сильных реберных раскрасок графов, обеспечивающий верхнюю оценку почти сильного хроматического индекса внешнепланарных графов, в частности, доказано, что для любого внешнепланарного графа G выполнено неравенство $\chi'_{ss}(G) \leq 2\Delta(G) + \left\lfloor \frac{\Delta(G) + 1}{2} \right\rfloor + 2$;
5. достижимые верхние оценки почти сильного хроматического индекса для лексикографического произведения графов и короны графов, в частности, установлено, что для связанных графов G и H при $|V(G)| \geq 2$ и $|V(H)| \geq 2$ выполняется

$$\chi'_{ss}(G \odot H) \leq \chi'_{ss}(G) + D'_{G \odot H} + |V(H)|,$$

где $D'_{G \odot H} = \max\{0, \chi'_{ss}(H) - (\chi'_{ss}(G) - \Delta(G))\}$;

6. построены классы графов с совпадающими значениями сильного и почти сильного хроматических индексов, в частности, для $n \geq 6$ и графов G, H таких, что $\chi'_s(G) = \chi'_{ss}(G)$ и $\chi'_s(H) = \chi'_{ss}(H)$ верно следующее: $\chi'_s(P_n \circ H) = \chi'_{ss}(P_n \circ H)$ и $\chi'_s(G + H) = \chi'_{ss}(G + H)$.

