

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Մանուկյան Ավետիք Հայկի

Հատուկ կառուցվածքի մատրիցների Մուր-Պենրոուզի
հակադարձման մեթոդների մշակում

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

Ա.01.07 «Հաշվողական մաթեմատիկա»
մասնագիտությամբ ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների
թեկնածուի գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

Երևան - 2026

YEREVAN STATE UNIVERSITY

Avetik Hayk Manukyan

Development of the Moore-Penrose inversion methods
for matrices of special structure

SYNOPSIS

of the dissertation for the degree of candidate of
physical and mathematical sciences in the specialty
A.01.07 «Computational Mathematics»

Yerevan - 2026

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում:

Գիտական ղեկավար՝	Ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Յու. Ռ. Հակոբյան
Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝	Ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Յու. Մ. Մովսիսյան
Առաջատար կազմակերպություն՝	Ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Ա. Գ. Մանուկյան Հայաստանի ազգային պոլիտեխնիկական համալսարան (ՀԱՊՀ)

Պաշտպանությունը կայանալու է 2026թ. հունիսի 17-ին, ժ. 15⁰⁰-ին ԵՊՀ-ում գործող ՀՀ ԲԿԳԿ-ի 050 մասնագիտական խորհրդի նիստում հետևյալ հասցեով՝ 0025, Երևան, Ալ. Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրն առաքված է 2026թ. մայիսի 14-ին:

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական քարտուղար,
Ֆիզ.-մաթ.գիտ. դոկտոր՝



Կ.Լ. Ավետիսյան

Dissertation topic was approved at the Yerevan State University.

Scientific supervisor:	Doctor of Physico-Mathematical Sciences Yu. R. Hakopian
Official opponents:	Doctor of Physico-Mathematical Sciences Yu. M. Movsisyan Candidate of Physico-Mathematical Sciences A. G. Manukyan
Leading organization:	National Polytechnic University of Armenia

Defense of the thesis will be held at the meeting of the specialized council 050 of HESC (Higher Education and Science Committee) of the Republic of Armenia at Yerevan State University on June 17, 2026 at 15⁰⁰ (0025, Yerevan, A. Manoogian str. 1).

You can get acquainted with the thesis in the library of Yerevan State University.

Synopsis was sent on May 14, 2026

Scientific secretary of specialized council,
Doctor of Physico-Mathematical Sciences



K. L. Avetisyan

GENERAL DESCRIPTION OF THE THESIS

Many problems of modern science are reduced to solving systems of high-order linear algebraic equations, which often turn out to be inconsistent. These are problems that arise in the least squares method, mathematical statistics, linear programming and etc. In such cases, the system can be "solved" by choosing some compromise - the equations of the system may not be satisfied completely, but only to a certain extent. The most effective approach to such a "solution" of inconsistent systems is *pseudoinversion* (or *generalized inversion*) of the system matrix. Let us briefly introduce this concept.

Consider a system of linear algebraic equations

$$Ax = b \tag{1}$$

with matrix $A \in \mathbf{C}^{m \times n}$. This system does not always has a solution in the classical sense. It is obvious that system (1) is consistent if and only if $b \in \text{im}A$, where $\text{im}A$ is *the image* of the matrix A , defined as follows:

$$\text{im}A \equiv \{y \in \mathbf{C}^m : \exists x \in \mathbf{C}^n, y = Ax\}.$$

Let us set the following problem: *find* $\bar{x} \in \mathbf{C}^n$, *for which*

$$\|A\bar{x} - b\| = \min_{x \in \mathbf{C}^n} \|Ax - b\|. \tag{2}$$

This problem is called *the least squares problem* for system (1). It has been established that the solution of problem (2) is reduced to the solution of the so-called *normal system*^{1,2}

$$A^*Ax = A^*b, \tag{3}$$

where A^* is the conjugate transpose of the matrix A . Under the additional condition $x \in \text{im}A^*$, the normal system (3) has a unique solution, which is called *the normal pseudosolution* of system (1). Thus, for each vector $b \in \mathbf{C}^m$, by setting in correspondence the normal pseudosolution of the system (1), we establish the mapping

$$\mathbf{C}^m \ni b \longrightarrow x \in \mathbf{C}^n.$$

By this very fact, the matrix $A^+ \in \mathbf{C}^{n \times m}$ that implements the specified mapping is defined:

$$x = A^+b. \tag{4}$$

The matrix A^+ is called *the pseudoinverse* of the matrix A .

The concept of generalized inversion (or pseudoinversion) was first mentioned in 1903, in the work of the Swedish mathematician E.Fredholm³, where he investigated generalized inversions of integral operators. In 1912, the American mathematician W.Hurwitz⁴ gave an algebraic formulation of the pseudoinversion of Fredholm integral operators. The concept of a pseudoinverse matrix was introduced in 1920 by the American mathematician E.Moore⁵ in his

¹D. Kincaid, W. Cheney, Numerical analysis, Brooks/Cole, Pacific Grove, CA , 1991.

²C. Lawson, R. Hanson, Solving Linear Squares Problems, Prentice-Hall, New York, 1974.

³E. Fredholm, Sur une class d'equations fonctionnelles, Acta Math. 27, 1903, pp. 365-390

⁴W. Hurwitz, On the pseudo-resolvent to the kernel of an integral equation, Trans. Amer. Math. Soc., 13, 1912, pp. 405-418

⁵E. Moore, On the reciprocal of the general algebraic matrix, Bull. Amer. Math. Soc., 26, 1920, pp. 394-395

article, where pseudoinverses of differential and integral operators were studied. However, in subsequent years there was no continuation of work in this direction. Interest in pseudoinverse matrices, after a break of almost thirty years, reawakened in the 1950s, in connection with the intensification of research on the least squares method. Here it is worth mentioning the works of Swedish mathematician A. Bjerhammar^{6,7}, in which the author "rediscovered" the Moore inversion and also pointed out the connection between pseudoinversion and solution of systems of linear algebraic equations. Finally, in 1955, the English mathematician R. Penrose generalized Bjerhammar's results and proved that for any matrix A , the Moore inverse matrix A^+ is uniquely determined by the following four conditions:

$$AA^+A = A, \quad A^+AA^+ = A^+, \quad (A^+A)^* = A^+A, \quad (AA^+)^* = AA^+. \quad (5)$$

The relations (5) are called *Penrose conditions*. This result turned out to be so significant and important that it served as an impetus for the intensive development of the theory known as *the Moore-Penrose inversion*. Currently, the Moore-Penrose inversion is one of the most relevant areas of both matrix theory and computational mathematics (see fundamental monographs^{8,9}).

The thesis is devoted to the development and theoretical justification of Moore-Penrose inversion methods for matrices of special structure – bidiagonal, tridiagonal skew-symmetric and skew-Hermitian matrices. The main focus of the study is on the analytical inversion of specified matrices and the construction, on this basis, the numerical algorithms of optimal order of computational complexity.

Actuality of the Subject. The Moore-Penrose inverse is the most popular type of matrix generalized inverses, or pseudoinverses, which has many applications both in matrix theory and numerical linear algebra. A common use of the Moore-Penrose inverse is to compute the least squares solution to the systems of linear algebraic equations. The pseudoinverse matrices allows us to obtain generalizations of classical solutions for many problems, to understand the meaning of frequently occurring incorrect solutions, and to find ways to their regularization. Today, there are various methods and algorithms for Moore-Penrose inversion: using the skeleton matrix decomposition, methods based on the QR -decomposition of the matrix, Greville's method and others^{8,9}. Moreover, the most efficient method for computing the Moore-Penrose inverse is based on the singular value decomposition (abbreviated SVD) of the matrix^{8,9}. Note that all the above mentioned methods are oriented towards matrices of general structure. At the same time, there is a need to develop pseudoinversion algorithms for matrices of special structure - sparse matrices, band matrices, etc. In other words, for matrices with a large number of zeros at pre-specified locations. Such matrices are often encountered in applications. Using information about the location of zeros in the matrix at predetermined positions will allow to develop efficient algorithms with significantly lower computational costs.

The Aim of the Thesis. The main objective of the work is to develop methods for Moore-Penrose inversion of bidiagonal, tridiagonal skew-symmetric and skew-Hermitian matrices. It is well known that the Moore-Penrose inverse of a matrix can be found via SVD of this matrix. In this regard, there exist the most effective algorithm that consists of two stages. At the first

⁶A. Bjerhammar, Application of calculus of matrices to method of least squares with special reference to geodetic calculations, Trans. Roy. Inst. Tech., 49, 1951, pp. 1-89

⁷A. Bjerhammar, Rectangular reciprocal matrices with special reference to geodetic calculations, Bull. Geodesique, 1951, pp. 188-220

⁸A. Ben-Israel, T.N.E. Greville, Generalized Inverses. Theory and Applications, Springer, 2, 2003.

⁹G.H. Golub, Ch.F. van Loan, Matrix Computations, The Johns Hopkins University Press, 1996

stage, an initial matrix is reduced to upper bidiagonal form (*the Golub-Kahan bidiagonalization algorithm*^{9,10}). The second stage is known as *the Golub-Reinsch algorithm*^{9,11}. This is an iterative procedure that generates a sequence of bidiagonal matrices converging to a diagonal form. By acting in this way, we get an approximation to the SVD of bidiagonal matrix and thereby the approximation to its Moore-Penrose inverse. The goal set in the thesis was to develop a direct method of Moore-Penrose inversion for bidiagonal matrices, which can be considered as an alternative to iterative Golub-Reinsch algorithm. In other words, it is possible to calculate the Moore-Penrose inverse of a bidiagonal matrix without using the SVD. Moreover, the approach applied to bidiagonal matrices can be used to obtain explicit expressions for the elements of the Moore-Penrose inverse of tridiagonal skew-symmetric and skew-Hermitian matrices.

Object of Study. The Moore-Penrose inverses for bidiagonal matrices, tridiagonal skew-symmetric and skew-Hermitian matrices.

Methods of Study. The methods of numerical analysis, matrix theory and linear algebra have been used.

Scientific Innovation. As a result of the conducted research, both analytical methods and computational algorithms for Moore-Penrose inversion of sparse matrices of band structure were developed. Let us highlight the main scientific results of the thesis:

1. For nonsingular tridiagonal Hermitian matrices, a simple computational procedure to calculate the elements of the inverse matrix was developed; in the case of Toeplitz type tridiagonal matrices, the procedure leads to explicit formulas for the elements of the inverse matrix.
2. Explicit expressions for the elements of the Moore-Penrose inverse of complex upper bidiagonal matrices was obtained; based on the closed form formulas, a finite recursive numerical algorithm of optimal computational complexity was developed.
3. Closed form expressions for the elements of the Moore-Penrose inverse of real tridiagonal skew-symmetric matrices was derived; on the base of the formulas obtained, a numerical algorithm that is optimal in terms of the amount of computational efforts is constructed.
4. Explicit expressions for the elements of the Moore-Penrose inverse of tridiagonal skew-Hermitian matrices with zero diagonal elements was derived; on the base of the formulas obtained, a numerical algorithm with optimal computational efforts is developed.

Theoretical and Practical Value. The results obtained in the thesis have theoretical content and at the same time are oriented towards practical application. The derived explicit formulas for the elements of pseudoinverse matrices can be used in theoretical studies. The developed computational procedures for Moore-Penrose inversion of bidiagonal, skew-symmetric and skew-Hermitian matrices can be useful in constructing efficient numerical algorithms for large-scale linear algebra problems.

Approbation of the results. The main results of the thesis were presented at the scientific conference "Computer Science and Applied Mathematics" (Yerevan State University, 23-25

¹⁰G.H. Golub, W. Kahan, Calculating the Singular Values and Pseudo-Inverse of a Matrix, SIAM J. Num. Anal., 2, 1971, pp. 205-224.

¹¹G.H. Golub, C. Reinsch, Singular Value Decomposition and Least Squares Solutions, Numer. Math., 14, 1970, pp. 403-420.

March, 2022), at the international conference "Algebra, Logic and their Applications" (Yerevan State University, 13-19 October, 2024) and at the scientific conference "Current Issues in Computer Science and Applied Mathematics" (Yerevan State University, 28-30 April, 2025).

Publications. The results of the thesis were published in six scientific articles.

Structure of the thesis. The thesis consists of an introduction, four chapters, a conclusion and a bibliography. It contains 106 pages, including 5 figures.

CONTENT OF THE THESIS

In **Introduction** the actuality of the topic is discussed, the aim and the problems of the thesis are formulated.

In **Chapter 1** we focus our attention on complex Hermitian tridiagonal matrices. A fairly simple computational procedure was constructed, consisting of a sequence of recurrence relations, leading to the calculation of the elements of inverse matrices. In special cases, in particular for Toeplitz tridiagonal Hermitian matrices, the procedure can become the basis for deriving closed-form expressions for the elements of the inverse matrices.

In Section 1.1 a nonsingular tridiagonal Hermitian matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ \overline{b_1} & a_2 & b_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \overline{b_{n-2}} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ & & & \overline{b_{n-1}} & a_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

is considered, where $a_i, i = 1, 2, \dots, n$ are real numbers and $b_i \neq 0$ for $i = 1, 2, \dots, n-1$. We assume that $n > 3$. The requirement that subdiagonal (superdiagonal) elements of the matrix be nonzero is not restrictive. Indeed, if some of these elements are equal to zero, the problem of computing the inverse matrix is decomposed into several similar problems for tridiagonal matrices of lower order. We note right away that \bar{z} stands for the complex conjugate of the complex number z .

In Section 1.2, some preliminary results were obtained, namely the first and last columns of the matrix A^{-1} were calculated.

In Section 1.3, the main result of Chapter 1 was obtained. The following procedure to calculate the elements of the inverse matrix $A^{-1} = [x_{ij}]_{n \times n}$ was constructed.

Procedure Inv3d Hermitian

1. Input elements a_1, a_2, \dots, a_n and b_1, b_2, \dots, b_{n-1} of the matrix A given in (6).
2. Calculate the quantities f_i, g_i, p and q :

$$f_i = \frac{a_i}{b_{i-1}}, g_i = \frac{b_i}{b_{i-1}}, i = 2, 3, \dots, n-1; p = \frac{a_1}{b_1}, q = \frac{a_n}{b_{n-1}}.$$

3. Calculate recursively the quantities μ_i :

$$\begin{aligned} \mu_n &= 1, \mu_{n-1} = -q, \\ \mu_i &= -f_{i+1}\mu_{i+1} - g_{i+1}\mu_{i+2}, i = n-2, n-3, \dots, 1. \end{aligned}$$

4. Calculate recursively the quantities ν_i :

$$\nu_1 = 1, \nu_2 = -p,$$

$$\nu_i = -\frac{1}{g_{i-1}}(\nu_{i-2} + f_{i-1}\nu_{i-1}), \quad i = 3, 4, \dots, n.$$

5. Calculate the quantity t :

$$t = (a_1\mu_1 + b_1\mu_2)^{-1}.$$

6. Calculate the lower triangular part of the matrix A^{-1} :

$$x_{ij} = t\mu_i\bar{\nu}_j, \quad i = j, j+1, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

7. Set the upper triangular part of the matrix A^{-1} :

$$x_{ij} = \bar{x}_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, j-1; \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

8. Output the matrix $A^{-1} = [x_{ij}]_{n \times n}$.

End procedure

The procedure **Inv 3d Hermitian** can be useful for the following purposes. Firstly, it can be used as a basis of numerical algorithms for inverting nonsingular tridiagonal Hermitian matrices. In this case, it is easy to make sure that computing the lower triangular part of the matrix A^{-1} requires $0.5n^2 + O(n)$ arithmetical operations with complex numbers. Thus, we have a numerical algorithm with an optimal number of arithmetic operations.

In [Section 1.4](#), applying the procedure **Inv 3d Hermitian**, we derive explicit expressions for the inverse of Teoplitz tridiagonal Hermitian matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & b & & & \\ \bar{b} & a & b & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \bar{b} & a & b \\ & & & \bar{b} & a \end{bmatrix} \quad (7)$$

of order n , where a is a real number and $b \neq 0$. Additionally, we assume that

$$|a| \geq 2|b|. \quad (8)$$

Condition (8) ensures the nonsingularity of the matrix (7).

If $|a| > 2|b|$, then for the values $j = 1, 2, \dots, n$, we obtain that

$$x_{ij} = \frac{(-1)^{j-i}}{r} \frac{\left[\left(\frac{a+r}{2b} \right)^i - \left(\frac{a-r}{2b} \right)^i \right] \left[\left(\frac{a+r}{2b} \right)^{n+1-j} - \left(\frac{a-r}{2b} \right)^{n+1-j} \right]}{\left[\left(\frac{a+r}{2b} \right)^{n+1} - \left(\frac{a-r}{2b} \right)^{n+1} \right]}$$

if $i = 1, 2, \dots, j-1$ and

$$x_{ij} = \frac{(-1)^{i-j}}{r} \frac{\left[\left(\frac{a+r}{2b} \right)^{n+1-i} - \left(\frac{a-r}{2b} \right)^{n+1-i} \right] \left[\left(\frac{a+r}{2b} \right)^j - \left(\frac{a-r}{2b} \right)^j \right]}{\left[\left(\frac{a+r}{2b} \right)^{n+1} - \left(\frac{a-r}{2b} \right)^{n+1} \right]}$$

if $i = j, j+1, \dots, n$, where

$$r = \sqrt{a^2 - 4|b|^2}.$$

If $|a| = 2|b|$, then for the values $j = 1, 2, \dots, n$, we find that

$$x_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j-i} \frac{(n+1-j)i}{n+1} \frac{2}{a} \left(\frac{a}{2b} \right)^{i-1} \left(\frac{a}{2b} \right)^{j-1}, & i = 1, 2, \dots, j-1, \\ (-1)^{i-j} \frac{(n+1-i)j}{n+1} \frac{2}{a} \left(\frac{a}{2b} \right)^{i-1} \left(\frac{a}{2b} \right)^{j-1}, & i = j, j+1, \dots, n. \end{cases}$$

In the following sections of Chapter 1 some applications of obtained results were discussed.

In [Section 1.5](#), an alternative method for finding the coefficients of a natural cubic spline on a uniform set of knots is proposed. The method is based on the analytical inversion of tridiagonal matrices, which made it possible to obtain closed-form expressions for the coefficients. This approach allows us to both identify the analytical dependence of the spline coefficients on its values at the knots and obtain simple formulas for calculating these coefficients, bypassing the solution of the system.

In [Section 1.6](#), we point out another application of the analytical inversion of tridiagonal symmetric Toeplitz matrices, namely, the problem of proving the stability in grid C -norm of the implicit difference scheme for the heat equation.

The **Chapter 2** is devoted to the Moore-Penrose inversion of bidiagonal matrices. First, we obtain explicit expressions for the entries of the Moore-Penrose inverse. Secondly, based on the closed form formulas, we get a finite recursive numerical algorithm of optimal computational complexity.

In [Section 2.1](#) we briefly outline the phases typically included in computing the Moore-Penrose inverse of general matrices. The main objective of the Chapter is formulated, the main purpose of which is to develop the method for Moore-Penrose inversion of upper bidiagonal matrices that may be considered as an alternative to Golub-Reinsch procedure (see above **The Aim of the Thesis**).

In [Section 2.2](#) a singular complex bidiagonal matrix

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ & a_{22} & a_{23} & & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & & a_{n-1\ n-1} & a_{n-1\ n} \\ & 0 & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (9)$$

is considered. We assume that $a_{i\ i+1} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Otherwise, if some of super-diagonal elements of matrix A are equal to zero, the problem of computing the Moore-Penrose inverse is decomposed into several similar problems for bidiagonal matrices of lower order.

To compute the Moore-Penrose inverse of the matrix A , we apply a special partition of this matrix into blocks. The partitioning procedure uses the arrangement of zeros on the main diagonal of matrix.

As a result, our task is to find the Moore-Penrose inverses for blocks of the following three types:

- type 1: bidiagonal block of a size $m \times m$;
- type 2: bidiagonal block of a size $m - 1 \times m$;
- type 3: bidiagonal block of a size $m \times m - 1$.

In Fig. 1 we schematically give the types of diagonal blocks (the mark \star stands for a nonzero entry).

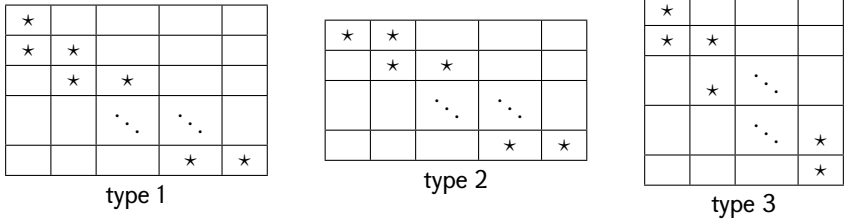


Fig. 1. The types of diagonal blocks.

Computing the Moore-Penrose inverse for a block of type 1 is not difficult, as it is nonsingular matrix. Consider a square matrix

$$B = \begin{bmatrix} d_1 & & & & \\ b_1 & d_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & b_{m-1} & d_m \end{bmatrix},$$

where $d_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ and $b_i \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, m - 1$.

The elements of matrix $B^+ = [z_{ij}]_{m \times m}$ are as follows: for $i = 1, 2, \dots, m$ we have

$$z_{ij} = \frac{(-1)^{i+j}}{d_i} \prod_{s=j}^{i-1} r_s, \quad j = 1, 2, \dots, i - 1; \quad z_{ii} = \frac{1}{d_i};$$

$$z_{ij} = 0, \quad j = i + 1, i + 2, \dots, m,$$

where

$$r_s \equiv \frac{b_s}{d_s}, \quad s = 1, 2, \dots, m - 1.$$

To calculate the Moore-Penrose inverses for the blocks of type 2 and 3, in [Section 2.3](#) we outline an approach based on well-known equality

$$A^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (A^* A + \varepsilon I)^{-1} A^*, \quad (10)$$

where I is the identity matrix, that is valid for any complex matrix^{8,9}.

As regards the block of type 2, consider an $m - 1 \times m$ bidiagonal matrix

$$B = \begin{bmatrix} d_1 & b_1 & & & & \\ & d_2 & b_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & d_{m-2} & b_{m-2} & \\ & & & & d_{m-1} & b_{m-1} \end{bmatrix}, \quad (11)$$

where $b_i, d_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, m - 1$ and $m \geq 2$. To invert $L(\varepsilon) \equiv B^*B + \varepsilon I$ matrix, we take advantage of **Procedure Inv3dHermitian** developed in Section 1.3. According to (10)

$$B^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} L(\varepsilon)^{-1} B^*. \quad (12)$$

Finding first the inverse matrix $L(\varepsilon)^{-1}$, the elements of matrix $L(\varepsilon)^{-1} B^*$ are calculated and a character of their dependence on the parameter ε is revealed. Then, according to equality (12), passing to the limit when $\varepsilon \rightarrow +0$, we arrive to a closed form expressions for the elements of matrix B^+ .

In [Section 2.4](#) we formulate and prove some auxiliary formulas and relations that will be used in the subsequent sections of this chapter.

In [Section 2.5](#) the following main statement is achieved.

Theorem 2.5.1. *Let B be an $m - 1 \times m$ bidiagonal matrix given in (11). Then the elements of the Moore-Penrose inverse $B^+ = [z_{ij}]_{m \times m-1}$ of this matrix are as follows:*

1) for $j = 1, 2, \dots, m - 1$ and $i = 1, 2, \dots, j$:

$$z_{ij} = \frac{(-1)^{j-i} \sum_{k=1}^{m-j} \left(\prod_{s=j}^{m-k} \frac{1}{r_s} \right) \left(\prod_{s=m-k+1}^{m-1} \bar{r}_s \right)}{d_j \left(\prod_{s=1}^{i-1} r_s \right) \sum_{k=1}^m \left(\prod_{s=1}^{m-k} \frac{1}{r_s} \right) \left(\prod_{s=m-k+1}^{m-1} \bar{r}_s \right)};$$

2) for $j = 1, 2, \dots, m - 1$ and $i = j + 1, j + 2, \dots, m$:

$$z_{ij} = \frac{(-1)^{i-j+1} \left(\prod_{s=i}^{m-1} r_s \right) \sum_{k=1}^j \left(\prod_{s=1}^{k-1} \frac{1}{\bar{r}_s} \right) \left(\prod_{s=k}^{j-1} r_s \right)}{d_j \sum_{k=1}^m \left(\prod_{s=1}^{m-k} \frac{1}{\bar{r}_s} \right) \left(\prod_{s=m-k+1}^{m-1} r_s \right)},$$

where the quantities r_s are defined

$$r_s \equiv \frac{b_s}{d_s}, \quad s = 1, 2, \dots, m - 1; \quad r_0 = r_m = 1.$$

Thus in Theorem 2.5.1 we get formulas for the elements of the Moore-Penrose inverse of a block of type 2. In addition, based on the expressions and recurrence relations obtained in this section, we suggest a numerical algorithm to compute the elements of matrix $B^+ = [z_{ij}]_{m \times m-1}$.

Procedure ($B \Rightarrow B^+$)/**type 2**

1. Input the elements $b_i, d_i, 1 \leq i \leq m-1$ of matrix B (see (11));
2. Compute the quantities r_s :

$$r_s = b_s/d_s, \quad s = 1, 2, \dots, m-1; \quad r_0 = r_m = 1.$$

3. Compute the quantities $\overset{\circ}{\mu}_i$:

$$\overset{\circ}{\mu}_m = 1; \quad \overset{\circ}{\mu}_i = -r_i \overset{\circ}{\mu}_{i+1}, \quad i = m-1, m-2, \dots, 1.$$

4. Compute the quantities $\overset{\circ}{\nu}_i$:

$$\overset{\circ}{\nu}_1 = 1; \quad \overset{\circ}{\nu}_{i+1} = -\overset{\circ}{\nu}_i / r_i, \quad i = 1, 2, \dots, m-1.$$

5. Compute the quantities φ_j :

$$\begin{aligned} \varphi_{m-1} &= -r_{m-1}/|b_{m-1}|^2; \\ \varphi_j &= -r_j(|d_{j+1}|^2 \varphi_{j+1} + \overset{\circ}{\mu}_{j+1})/|b_j|^2, \quad j = m-2, m-3, \dots, 1. \end{aligned}$$

6. Compute the quantities ψ_j :

$$\psi_1 = -1/|d_1|^2; \quad \psi_j = -(\overline{b_{j-1}} d_{j-1} \psi_{j-1} + \overset{\circ}{\nu}_j)/|d_j|^2, \quad j = 2, 3, \dots, m-1.$$

7. Compute the upper triangular part of matrix B^+ ; for $1 \leq j \leq m-1$:

$$z_{ij} = \overset{\circ}{\nu}_i \cdot \overline{d_j \varphi_j / (\overset{\circ}{\mu}_1 + |d_1|^2 \varphi_1)}, \quad i = 1, 2, \dots, j.$$

8. Compute the lower triangular part of matrix B^+ ; for $1 \leq j \leq m-1$:

$$z_{ij} = \overset{\circ}{\mu}_i \cdot \overline{d_j \psi_j / (\overset{\circ}{\mu}_1 + |d_1|^2 \varphi_1)}, \quad i = j+1, j+2, \dots, m.$$

9. Output the matrix $B^+ = [z_{ij}]_{m \times m-1}$.

End procedure

The numerical implementation of **Procedure** ($B \Rightarrow B^+$)/**type 2** requires $m^2 + O(m)$ arithmetical operations. The latter means that this algorithm is of optimal computational complexity.

As regards the block of type 3, the problem of finding the Moore–Penrose inverse for such a block is reduced to the previous case. Indeed, by virtue of well-known property⁸ we have

$$B^+ = ((B^*)^+)^*,$$

where B^* is already the block of type 2.

So, based on the above research, we come to the following result. Let a singular upper bidiagonal matrix A given in (9), with nonzero superdiagonal elements, be represented in the block form, according to the rule described in Section 2.2. Then the matrix A^+ also has the block structure that is consistent with the block structure of matrix A . For blocks of type 1 and 2 we have obtained closed form expressions for the elements of their Moore–Penrose

inverses. The problem of computing the Moore–Penrose inverse for block of type 3 is reduced to a similar problem for a block of type 2.

In **Chapter 3** we deduce closed form expressions for the elements of the Moore-Penrose inverse of tridiagonal real skew-symmetric matrices. Both even and odd orders of the matrices are considered. On the base of the formulas obtained, algorithms that are optimal in terms of the amount of computational work are constructed.

In Section 3.1 a tridiagonal skew-symmetric matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & & & \\ -a_1 & 0 & a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -a_{n-2} & 0 & a_{n-1} \\ & & & -a_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

is considered, where $n \geq 3$. We assume that $a_i \neq 0$ for all $i = 1, 2, \dots, n-1$. This requirement is not restrictive, since if some of the overdiagonal elements of A are equal to zero, then we can represent this matrix in block-diagonal form

$$A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_l),$$

where diagonal blocks A_i , $1 \leq i \leq l$ are either skew-symmetric matrices with nonzero overdiagonal elements, or zero blocks. In this case

$$A^+ = \text{diag}(A_1^+, A_2^+, \dots, A_l^+).$$

We will consider separately the matrices of even and odd orders in the next sections.

In Section 3.2, let $n = 2m$. From (12) we have

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & & & \\ -a_1 & 0 & a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -a_{2m-2} & 0 & a_{2m-1} \\ & & & -a_{2m-1} & 0 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

According to the above assumption about the overdiagonal elements, this matrix is nonsingular. This statement we conclude from the easily proven equality

$$\det A = (a_1 a_3 \dots a_{2m-1})^2.$$

In this section we arrive at the following statement.

Theorem 3.2.1. *Nonzero elements of the matrix $A^{-1} = [z_{ij}]_{2m \times 2m}$ are computed by the following formulas:*

$$\left. \begin{aligned} z_{2i \ 2k-1} &= \frac{1}{a_{2k-1}} \prod_{s=k}^{i-1} \rho_s, \quad i = k, k+1, \dots, m, \\ z_{2i-1 \ 2k} &= -\frac{1}{a_{2k-1}} \prod_{s=i}^{k-1} r_s, \quad i = 1, 2, \dots, k \end{aligned} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

where

$$\rho_s \equiv \frac{a_{2s}}{a_{2s+1}}, \quad r_s \equiv \frac{a_{2s}}{a_{2s-1}}, \quad s = 1, 2, \dots, m-1.$$

Based on the above closed form expressions, let us write a computational procedure to calculate the elements of the inverse matrix $A^{-1} = [z_{ij}]_{2m \times 2m}$ for skew-symmetric matrix A given in (13).

Procedure MPIverse/even order

1. Input elements $a_1, a_2, \dots, a_{2m-1}$ of the matrix A (see (13)).
2. Calculate the quantities ρ_s :

$$\rho_s = a_{2s}/a_{2s+1}, \quad s = 1, 2, \dots, m - 1.$$

3. Set $z_{ij} = 0$ for $i, j = 1, 2, \dots, 2m$.
4. Calculate nonzero elements from the lower triangular part of A^{-1} :

$$\left. \begin{aligned} z_{2k \ 2k-1} &= 1/a_{2k-1}, \\ z_{2i+2 \ 2k-1} &= z_{2i \ 2k-1} \rho_i, \quad i = k, k + 1, \dots, m - 1 \end{aligned} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

5. Set nonzero elements from the upper triangular part of A^{-1} :

$$z_{2i-1 \ 2k} = -z_{2k \ 2i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, k; \ k = 1, 2, \dots, m.$$

6. Output the matrix $A^{-1} = [z_{ij}]_{2m \times 2m}$.

End procedure

A simple calculations show that computing all nonzero elements of the lower triangular part of the matrix A^{-1} requires $0.5m^2 + O(m)$ multiplications. Note that the number of mentioned nonzero elements is $m(m + 1)/2$.

In [Section 3.3](#), let $n = 2m + 1$. Then from (12) we have

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & & & & \\ -a_1 & 0 & & a_2 & & 0 \\ & & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & -a_{2m-1} & 0 & a_{2m} \\ & & & & -a_{2m} & 0 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Regardless of the values of the overdiagonal elements, this matrix is singular. Indeed,

$$\det A = \det A^T = \det(-A) = (-1)^{2m+1} \det A = -\det A,$$

from which it follows that $\det A = 0$.

Let us introduce bidiagonal matrix

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 & & & \\ & a_3 & -a_4 & 0 & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{2m-1} & -a_{2m} \end{bmatrix} \tag{15}$$

of the size $m \times m + 1$. Next, we define the following matrices:

$$P = [p_{ij}]_{(2m+1) \times m}, \quad p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } i = 2j, \\ 0, & \text{if } i \neq 2j, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, m$$

and

$$Q = [q_{ij}]_{(m+1) \times (2m+1)}, \quad q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } j = 2i - 1, \\ 0, & \text{if } j \neq 2i - 1, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m + 1.$$

Then the matrix A can be written as follows:

$$A = (PBQ)^T - PBQ. \quad (16)$$

Lemma 3.3.1. *Let the matrix A defined in (14) be written in the form (16). Then*

$$A^+ = (Q^T B^+ P^T)^T - Q^T B^+ P^T. \quad (17)$$

So, the problem of finding the Moore-Penrose inverse for matrix A given in (14) is reduced to a similar problem for matrix B defined in (15).

In [Section 3.4](#) an approach to derive the Moore-Penrose inverse of the matrix B is based upon the well-known formula

$$B^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (B^T B + \varepsilon I_{m+1})^{-1} B^T \quad (17)$$

(see (10)). Our plan is as follows. First we find the inverse matrix $(B^T B + \varepsilon I_{m+1})^{-1}$. Further, the elements of the matrix $(B^T B + \varepsilon I_{m+1})^{-1} B^T$ are calculated and a character of their dependence on the parameter ε is revealed. Thereafter, according to the equality (17), passing to the limit when $\varepsilon \rightarrow +0$, we will arrive at closed form expressions for the elements of the matrix B^+ .

To obtain the inverse matrix $(B^T B + \varepsilon I_{m+1})^{-1} = [x_{ij}(\varepsilon)]_{m+1 \times m+1}$, we take advantage of **Procedure Inv3dHermitian** developed in [Section 1.3](#).

[Section 3.5](#) is devoted to the derivation of several auxiliary formulas and relations.

In [Section 3.6](#) the elements of the matrix B^+ are derived.

Theorem 3.6.1. *Let B be an $m \times m + 1$ bidiagonal matrix given in (15). It is assumed that $a_i \neq 0$, $1 \leq i \leq 2m$. Then the elements of the Moore-Penrose inverse $B^+ = [w_{ij}]_{m+1 \times m}$ are as follows: for $1 \leq j \leq m$,*

$$w_{ij} = \frac{\left(\prod_{s=1}^{i-1} \frac{1}{r_s} \right) \sum_{k=j}^m \left(\prod_{s=j}^k \frac{1}{r_s} \right) \left(\prod_{s=k+1}^m r_s \right)}{a_{2j-1} \sum_{k=0}^m \left(\prod_{s=1}^k \frac{1}{r_s} \right) \left(\prod_{s=k+1}^m r_s \right)}, \quad i = 1, 2, \dots, j$$

and

$$w_{ij} = - \frac{\left(\prod_{s=i}^m r_s \right) \sum_{k=1}^j \left(\prod_{s=1}^{k-1} r_s \right) \left(\prod_{s=k}^{j-1} \frac{1}{r_s} \right)}{a_{2j-1} \sum_{k=0}^m \left(\prod_{s=1}^k \frac{1}{r_s} \right) \left(\prod_{s=k+1}^m r_s \right)}, \quad i = j + 1, j + 2, \dots, m + 1,$$

where

$$r_s = a_{2s}/a_{2s-1}, \quad s = 1, 2, \dots, m.$$

In Theorem 3.6.1 we give formulas for the elements of matrix B^+ . In addition, based on the expressions and recurrence relations obtained above, below we suggest a numerical procedure to compute the elements of the matrix $B^+ = [w_{ij}]_{m+1 \times m}$.

Procedure MPInverse B^+

1. Input elements a_1, a_2, \dots, a_{2m} of the matrix B (see (15)).
2. Calculate the quantities r_s :

$$r_s = a_{2s}/a_{2s-1}, \quad s = 1, 2, \dots, m.$$

3. Calculate the quantities $\overset{\circ}{\mu}_i$:

$$\overset{\circ}{\mu}_{m+1} = 1; \quad \overset{\circ}{\mu}_i = r_i \overset{\circ}{\mu}_{i+1}, \quad i = m, m-1, \dots, 1.$$

4. Calculate the quantities $\overset{\circ}{\nu}_i$:

$$\overset{\circ}{\nu}_1 = 1; \quad \overset{\circ}{\nu}_{i+1} = \overset{\circ}{\nu}_i / r_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

5. Calculate the quantities R_i :

$$R_m = \frac{r_m}{a_{2m}^2}; \quad R_i = \frac{r_i}{a_{2i}^2} (a_{2i+1}^2 R_{i+1} + \overset{\circ}{\mu}_{i+1}), \quad i = m-1, m-2, \dots, 1.$$

6. Calculate the quantities S_i :

$$S_1 = \frac{1}{a_1^2}; \quad S_i = \frac{1}{a_{2i-1}^2} \frac{1}{r_{i-1}} (a_{2i-2}^2 S_{i-1} + \overset{\circ}{\nu}_{i-1}), \quad i = 2, 3, \dots, m.$$

7. Calculate the quantity

$$\sigma \equiv a_1^2 R_1 + \overset{\circ}{\mu}_1.$$

8. Calculate the elements of matrix B^+ :

$$w_{ij} = \begin{cases} a_{2j-1} \overset{\circ}{\nu}_i R_j / \sigma, & i = 1, 2, \dots, j, \\ -a_{2j-1} \overset{\circ}{\mu}_i S_j / \sigma, & i = j+1, j+2, \dots, m+1 \end{cases}; \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

9. Output matrix $B^+ = [w_{ij}]_{m+1 \times m}$.

End procedure

Direct calculations show that the numerical implementation of the procedure **MPInverse B^+** requires $m^2 + O(m)$ arithmetical operations. By this very fact, the algorithm may be considered as an optimal one.

In [Section 3.7](#) the elements of the matrix A^+ of odd order are calculated.

Theorem 3.7.1. Let A be a skew-symmetric matrix of order $2m + 1$ given in (14). It is assumed that $a_i \neq 0$, $1 \leq i \leq 2m$. The elements of the Moore-Penrose inverse $A^+ = [z_\alpha \beta]_{2m+1 \times 2m+1}$ are as follows:

$$\left. \begin{aligned} z_{2i-1, 2j} &= -w_{ij} \\ z_{2j, 2i-1} &= w_{ij} \end{aligned} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, m+1, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

where w_{ij} are the elements of the matrix B^+ obtained in Theorem 3.6.1; the remaining elements of the matrix A^+ are equal to zero.

Summing up the results obtained, we want to emphasize two main points. First, we have obtained closed form expressions for the elements of the Moore-Penrose inverse of odd order tridiagonal skew-symmetric matrices. Secondly, on the basis of the obtained formulas and relations, a numerical algorithm which is optimal in terms of computational costs was constructed.

The matrix A is said to be *skew-Hermitian* if $A^* = -A$. As follows from the definition, the diagonal elements of a skew-Hermitian matrix are either purely imaginary numbers or zeros.

In **Chapter 4** we discuss the case when all diagonal elements are zero. Consider a tridiagonal matrix.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & & & \\ -\overline{a_1} & 0 & a_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -\overline{a_{n-2}} & 0 & a_{n-1} \\ & & & -\overline{a_{n-1}} & 0 \end{bmatrix}$$

where $n \geq 3$. We assume that $a_i \neq 0$ for all $i = 1, 2, \dots, n-1$. This requirement is not restrictive, since if some of the overdiagonal elements of A are equal to zero, the problem of computing the Moore-Penrose inverse is decomposed into several similar problems for matrices of lower order.

To find the Moore-Penrose inverse for tridiagonal skew-Hermitian matrices, we will use an approach developed in Chapter 3 for skew-symmetric matrices. We will consider separately the matrices of even and odd orders.

In Section 4.1 the matrices of even order are considered. Let $n = 2m$. Then we have

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & & & 0 \\ -\overline{a_1} & 0 & a_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -\overline{a_{2m-2}} & 0 & a_{2m-1} \\ & & & -\overline{a_{2m-1}} & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

According to above assumption about the overdiagonal elements, this matrix is nonsingular. It follows from the easily proven equality

$$\det A = (|a_1| \cdot |a_3| \cdot \dots \cdot |a_{2m-1}|)^2.$$

Thus, in our case $A^+ = A^{-1}$. Finding the inverse matrix will be based on a special decomposition of the matrix A . To do this, we introduce into consideration bidiagonal matrix.

$$B = \begin{bmatrix} -\overline{a_1} & a_2 & & & 0 \\ & -\overline{a_3} & a_4 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -\overline{a_{2m-3}} & a_{2m-2} \\ & & & & -\overline{a_{2m-1}} \end{bmatrix} \quad (19)$$

of order m . Next we define the following matrices.

$$P = [p_{ij}]_{m \times 2m}, \quad p_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } j = 2i, \\ 0, & \text{if } j \neq 2i, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

$$Q = [q_{ij}]_{m \times 2m}, \quad q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } j = 2i - 1, \\ 0, & \text{if } j \neq 2i - 1, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Then the matrix A can be written as follows:

$$A = P^T B Q - (P^T B Q)^*. \quad (20)$$

Proceeding from (20) we can verify that

$$A^{-1} = Q^T B^{-1} P - (Q^T B^{-1} P)^*.$$

So, the problem of finding the inverse for the matrix A from (18) is reduced to the problem of inverting the matrix matrix B defined in (19).

Lemma 4.1.1. *The elements of the matrix $B^{-1} = [w_{ij}]_{m \times m}$ are as follows: for the indices $j = 1, 2, \dots, m$ we have:*

$$w_{ij} = -\frac{1}{\overline{a_{2j-1}}} \prod_{s=i}^{j-1} r_s, \quad i = 1, 2, \dots, j-1, \quad w_{jj} = -\frac{1}{\overline{a_{2j-1}}}; \quad w_{ij} = 0, \quad i = j+1, j+2, \dots, m.$$

where

$$r_s \equiv \frac{a_{2s}}{\overline{a_{2s-1}}}, \quad s = 1, 2, \dots, m-1.$$

It can be readily seen that calculations require $m^2/2 + O(m)$ complex arithmetical operations.

Theorem 4.1.1. *The elements of the matrix $A^{-1} = [z_{ij}]_{2m \times 2m}$ are as follows:*

$$z_{2i-1 \ 2j} = w_{ij}, \quad z_{2j \ 2i-1} = -\overline{w_{ij}}, \quad j = i, i+1, \dots, m; \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

The remaining elements of the matrix are equal to zero.

Lemma 4.4.1. Let B be a bidiagonal matrix given in (22) and $a_i \neq 0$, $1 \leq i \leq 2m$. Then the elements of the Moore–Penrose inverse $B^+ = [w_{ij}]_{(m+1) \times m}$ are as follows: for $1 \leq j \leq m$,

$$w_{ij} = -\frac{\left(\prod_{s=1}^{i-1} \frac{1}{r_s}\right) \sum_{k=j}^m \left(\prod_{s=j}^k \frac{1}{r_s}\right) \left(\prod_{s=k+1}^m \bar{r}_s\right)}{\bar{a}_{2j-1} \sum_{k=0}^m \left(\prod_{s=1}^k \frac{1}{r_s}\right) \left(\prod_{s=k+1}^m \bar{r}_s\right)}, \quad i = 1, 2, \dots, j,$$

and

$$w_{ij} = \frac{\left(\prod_{s=i}^m r_s\right) \sum_{k=1}^j \left(\prod_{s=1}^{k-1} r_s\right) \left(\prod_{s=k}^{j-1} \frac{1}{\bar{r}_s}\right)}{\bar{a}_{2j-1} \sum_{k=0}^m \left(\prod_{s=1}^k \frac{1}{r_s}\right) \left(\prod_{s=k+1}^m r_s\right)}, \quad i = j+1, \dots, m+1.$$

where

$$r_s \equiv \frac{a_{2s}}{a_{2s-1}}, \quad s = 1, 2, \dots, m.$$

As in Section 3.6, below we also suggest a numerical procedure to compute the elements of the matrix $B^+ = [w_{ij}]_{m+1 \times m}$.

Procedure MPinverse B^+

1. Input elements a_1, a_2, \dots, a_{2m} of the matrix B .
2. Calculate the quantities r_s :

$$r_s \equiv \frac{a_{2s}}{a_{2s-1}}, \quad s = 1, 2, \dots, m.$$

3. Calculate the quantities $\tilde{\mu}_i$:

$$\tilde{\mu}_{m+1} = 1, \quad \tilde{\mu}_i = r_i \tilde{\mu}_{i+1}, \quad i = m, m-1, \dots, 1.$$

4. Calculate the quantities \tilde{v}_i :

$$\tilde{v}_1 = 1, \quad \tilde{v}_{i+1} = \frac{\tilde{v}_i}{r_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

5. Calculate the quantities R_i :

$$R_m = \frac{r_m}{|a_{2m}|^2}, \quad R_i = \frac{r_i (|a_{2i+1}|^2 R_{i+1} + \tilde{\mu}_{i+1})}{|a_{2i}|^2}, \quad i = m-1, m-2, \dots, 1.$$

6. Calculate the quantities S_i :

$$S_1 = \frac{1}{|a_1|^2}, \quad S_i = \frac{|a_{2i-2}|^2 S_{i-1} + \tilde{v}_{i-1}}{|a_{2i-1}|^2 r_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots, m.$$

7. Calculate

$$\sigma = |a_1|^2 R_1 + \tilde{\mu}_1.$$

8. Calculate the elements of matrix B^+ :

$$w_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{2j-1} \tilde{v}_i \overline{R_j}}{\overline{\sigma}}, & i = 1, 2, \dots, j, \\ \frac{a_{2j-1} \tilde{\mu}_i \overline{S_j}}{\sigma}, & i = j + 1, j + 2, \dots, m + 1, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

9. Output the matrix $B^+ = [w_{ij}]_{m+1 \times m}$.

End procedure

Direct calculations show that numerical implementation of the procedure **MPinverse** B^+ requires $m^2 + O(m)$ complex arithmetical operations. By this fact, the algorithm may be considered as an optimal one.

In [Section 4.5](#) the elements of the matrix A^+ of odd order are calculated.

Theorem 4.5.1. *Let A be a skew-Hermitian matrix of order $2m + 1$ given in (21). It is assumed that $a_i \neq 0$, $1 \leq i \leq 2m$. The elements of the Moore-Penrose inverse $A^+ = [z_{\alpha\beta}]_{2m+1 \times 2m+1}$ are as follows:*

$$z_{2i-1, 2j} = w_{ij}, \quad z_{2j, 2i-1} = -\overline{w_{ij}}, \quad i = 1, 2, \dots, m + 1, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Here w_{ij} are the elements of B^+ obtained in [Lemma 4.4.1](#). The remaining elements of A^+ are equal to zero.

To summarize, in conclusion we emphasize two main results of this Chapter. First, we obtained closed-form expressions for the elements of the Moore-Penrose inverse of tridiagonal skew-Hermitian matrices with zero diagonal. Second, on the basis of the obtained formulas, a numerical algorithm which is optimal in terms of computational costs was constructed.

Conclusions

1. For nonsingular tridiagonal Hermitian matrices, a simple computational procedure to calculate the elements of the inverse matrix was developed; in the case of Toeplitz type tridiagonal matrices, the procedure leads to explicit formulas for the elements of the inverse matrix.
2. Explicit expressions for the elements of the Moore-Penrose inverse of complex upper bidiagonal matrices was obtained; based on the closed form formulas, a finite recursive numerical algorithm of optimal computational complexity was developed.
3. Closed form expressions for the elements of the Moore-Penrose inverse of real tridiagonal skew-symmetric matrices was derived; on the base of the formulas obtained, a numerical algorithm that is optimal in terms of the amount of computational efforts is constructed.
4. Explicit expressions for the elements of the Moore-Penrose inverse of tridiagonal skew-Hermitian matrices with zero diagonal elements was derived; on the base of the formulas obtained, a numerical algorithm with optimal computational efforts is developed.

Publications on the topic of the thesis

1. Yu.R. Hakopian and A.H. Manukyan. Analytical inversion of tridiagonal Hermitian matrices, *Mathematical Problems of Computer Science*, 58 (2022) pp. 7-19,
2. Yu.R. Hakopian, A.H. Manukyan, H.V. Mikaelyan. The Moore-Penrose inverse of tridiagonal skew-symmetric matrices. I. *Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences* 57 (1) (2023) pp. 1-8,
3. Yu.R. Hakopian, A.H. Manukyan, H.V. Mikaelyan. The Moore-Penrose inverse of tridiagonal skew-symmetric matrices. II. *Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences* 57 (2) (2023) pp. 31-43,
4. Yu.R. Hakopian and A.H. Manukyan. On the Analytical Moore-Penrose Inversion of Complex Bidiagonal Matrices. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 46 (8), (2025) pp. 3994-4008,
5. A.H. Manukyan. The Moore-Penrose Inverse of Tridiagonal Skew-Hermitian Matrices With Zero Diagonal Elements. *Vestnik of the Russian-Armenian (Slavonic) University*, 1, (2024) pp. 8-16,
6. A.H. Manukyan. On the calculation of the coefficients of natural cubic splines on a equidistant set of knots. *Proceedings of the Yerevan State University, Physical and Mathematical Sciences* 59 (3) (2025) pp. 63-68,

Резюме

Диссертация посвящена разработке и теоретическому обоснованию методов обращения Мура-Пенроуза матриц специальной структуры – bidiagonalных, трехдиагональных кососимметричных и косоэрмитовых матриц. Основное внимание в исследовании уделяется аналитическому обращению заданных матриц и построению на этой основе оптимальных по порядку вычислительной сложности численных алгоритмов. Для любой $m \times n$ матрицы A обратная матрица Мура-Пенроуза A^+ размера $n \times m$ однозначно определяется с помощью следующих четырех условий:

$$AA^+A = A, \quad A^+AA^+ = A^+, \quad (A^+A)^* = A^+A, \quad (AA^+)^* = AA^+.$$

Обратная матрица Мура-Пенроуза – наиболее популярный тип обобщенных обратных матриц, или псевдообратных матриц, имеющий множество применений как в самой теории матриц, так и в вычисленной линейной алгебре. Она используется, например при решении систем линейных алгебраических уравнений методом наименьших квадратов. Псевдообратные матрицы позволяют получать обобщения классических решений для многих задач, прояснять смысл часто встречающихся некорректных решений и находить способы их регуляризации. В настоящее время существует множество методов и алгоритмов вычисления обратной матрицы Мура-Пенроуза: использование скелетного разложения матрицы, методы, основанные на QR-разложении матрицы, метод Гревилля и другие. Наиболее эффективный метод вычисления обратной матрицы Мура-Пенроуза основан на сингулярном разложении (сокращенно SVD) матрицы. Следует отметить, что все вышеупомянутые методы ориентированы на матрицы общей структуры. Одновременно с этим возникает необходимость в разработке алгоритмов псевдообращения для матриц специальной структуры – разреженных матриц, ленточных матриц и т. д. Иными словами, для матриц с большим количеством нулей в заранее заданных местах. Такие матрицы часто встречаются в приложениях. Использование информации о расположении нулей в матрице позволит разработать эффективные алгоритмы со значительно меньшими вычислительными затратами. Основная цель работы – разработка методов обращения Мура-Пенроуза bidiagonalных, трехдиагональных кососимметричных и косоэрмитовых матриц. Хорошо известно, что обратную матрицу Мура-Пенроуза можно найти с помощью сингулярного разложения этой матрицы. В этом отношении существует наиболее эффективный алгоритм, состоящий из двух этапов. На первом этапе исходная матрица приводится к верхней bidiagonalной форме (bidiagonalизации Голуба-Кахана). Второй этап известен как алгоритм Голуба-Райнша. Это итерационная процедура, которая генерирует последовательность bidiagonalных матриц, сходящихся к диагональной форме. Действуя подобным образом, мы получаем приближение к сингулярному разложению bidiagonalной матрицы и, следовательно, приближение к ее обратной матрице Мура-Пенроуза. Одной из основных задач диссертации являлось разработка прямого метода обращения матрицы Мура-Пенроуза для bidiagonalных матриц, который можно будет рассматривать как альтернативу итерационному алгоритму Голуба-Рейнша. Иными словами, можно вычислить обратную матрицу Мура-Пенроуза для bidiagonalной матрицы без использования сингулярного разложения. Более того, подход, применяемый к bidiagonalным матрицам, может быть использован для получения явных выражений элементов обратной матрицы Мура-Пенроуза для трехдиагональных кососимметричных и косоэрмитовых матриц.

В результате проведенных в работе исследований получены следующие основные результаты:

1. для невырожденных трехдиагональных эрмитовых матриц разработана простая вычислительная процедура для расчета элементов обратной матрицы; в случае трехдиагональных трёхдиагональных матриц эта процедура приводит к явным формулам для элементов обратной матрицы;
2. получены явные выражения для элементов обратной матрицы Мура-Пенроуза для комплексных верхних двухдиагональных матриц; на основе явных формул разработан оптимальный по порядку арифметических операций конечный численный алгоритм;
3. получены аналитические выражения для элементов обратной матрицы Мура-Пенроуза для трехдиагональных вещественных кососимметричных матриц; на основе полученных формул построен численный алгоритм, оптимальный с точки зрения объема вычислительных затрат;
4. получены явные выражения для элементов обратной матрицы Мура-Пенроуза для трехдиагональных косоэрмитовых матриц с нулевыми диагональными элементами; на основе полученных формул разработан оптимальный по порядку вычислительных затрат численный алгоритм.

Ամփոփում

Ատենախոսությունը նվիրված է հատուկ կառուցվածքի մատրիցների՝ երկանկյունագծային, երեքանկյունագծային շեղասիմետրիկ և շեղահերմիտյան մատրիցների Մուր-Պենրոուզի ընդհանրացված հակադարձման մեթոդների մշակմանը և տեսական հիմնավորմանը: Ուսումնասիրության հիմնական ուշադրության կենտրոնում են նշված մատրիցների վերլուծական հակադարձումը և դրա հիման վրա՝ ըստ հաշվողական աշխատանքի ծավալի օպտիմալ թվային ալգորիթմների կառուցումը:

Ցանկացած $m \times n$ չափի A մատրիցի համար $n \times m$ չափի Մուր-Պենրոուզի հակադարձ մատրիցը՝ A^+ , միարժեքորեն որոշվում է հետևյալ չորս պայմաններով.

$$AA^+A = A, \quad A^+AA^+ = A^+, \quad (A^+A)^* = A^+A, \quad (AA^+)^* = AA^+.$$

Մուր-Պենրոուզի հակադարձ մատրիցը ընդհանրացված հակադարձ մատրիցների կամ փսևդոհակադարձ մատրիցների ամենատարածված տեսակն է, որն ունի բազմաթիվ կիրառություններ ինչպես մատրիցների տեսության, այնպես էլ հաշվողական գծային հանրահաշվի մեջ: Այն կիրառվում է, օրինակ, գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի լուծման ժամանակ՝ փոքրագույն քառակուսիների մեթոդով: Փսևդոհակադարձ մատրիցները հնարավորություն են տալիս ստանալ բազմաթիվ խնդիրների դասական լուծումների ընդհանրացումներ, պարզաբանել հաճախ հանդիպող ոչ կոռեկտ լուծումների իմաստը և գտնել դրանց կանոնակարգման եղանակներ:

Ներկայումս գոյություն ունեն Մուր-Պենրոուզի հակադարձ մատրիցի հաշվարկման բազմաթիվ մեթոդներ և ալգորիթմներ՝ մատրիցի կմախքային վերլուծության օգտագործում, QR-վերլուծության վրա հիմնված մեթոդներ, Գրևիլի մեթոդ և այլն: Մուր-Պենրոուզի հակադարձ մատրիցի հաշվարկման առավել արդյունավետ մեթոդը հիմնված է մատրիցի սինգուլյար վերլուծության (կրճատ՝ SVD) վրա: Պետք է նշել, որ վերը նշված բոլոր մեթոդները նախատեսված են ընդհանուր կառուցվածք ունեցող մատրիցների համար: Միաժամանակ առաջանում է հատուկ կառուցվածք ունեցող մատրիցների՝ նոսր մատրիցների, ժապավենային մատրիցների և այլնի համար փսևդոհակադարձման ալգորիթմների մշակման անհրաժեշտություն: Այլ կերպ ասած՝ խոսքը վերաբերում է այն մատրիցներին, որոնք ունեն մեծ քանակությամբ զրոյական տարրեր նախապես տրված դիրքերում: Նման մատրիցները հաճախ հանդիպում են կիրառություններում: Մատրիցում զրոյական տարրերի տեղակայման մասին տեղեկատվության օգտագործումը հնարավորություն կտա մշակել արդյունավետ ալգորիթմներ՝ գալիորեն փոքր հաշվարկային ծախսերով:

Աշխատանքի հիմնական նպատակն է մշակել երկանկյունագծային, երեքանկյունագծային շեղասիմետրիկ և շեղահերմիտյան մատրիցների Մուր-Պենրոուզի հակադարձման մեթոդներ: Հայտնի է, որ Մուր-Պենրոուզի հակադարձ մատրիցը կարելի է գտնել տվյալ մատրիցի սինգուլյար վերլուծության միջոցով: Գոյություն ունի առավել արդյունավետ ալգորիթմ, որը բաղկացած է երկու փուլից: Առաջին փուլում սկզբնական մատրիցը բերվում է վերին երկանկյունագծային տեսքի (Գոլուբ-Կահան): Երկրորդ փուլը հայտնի է որպես Գոլուբ-Ռայնշի ալգորիթմ: Այն խտրացիոն գործընթաց է, որը գեներացնում է երկանկյունագծային մատրիցների հաջորդականություն, որը զուգամիտում է անկյունագծային տեսքի: Այս եղանակով ստացվում է երկանկյունագծային մատրիցի սինգուլյար վերլուծության մոտարկում և, հետևաբար, նրա Մուր-Պենրոուզի հակադարձ մատրիցի մոտարկում: Ատենախոսության

հիմնական խնդիրներից մեկն էր երկանկյունագծային մատրիցների համար Մուր-Պենրոուզի հակադարձ մատրիցի ուղղակի հաշվարկման մեթոդի մշակումը, որը կարող է դիտարկվել որպես Գոլուբ-Ռայնշի իտերացիոն ալգորիթմի այլընտրանք: Այլ կերպ ասած՝ հնարավոր է հաշվել երկանկյունագծային մատրիցի Մուր-Պենրոուզի հակադարձ մատրիցը՝ առանց սինգուլյար վերլուծության կիրառման: Ավելին, երկանկյունագծային մատրիցների համար կիրառվող մոտեցումը կարող է օգտագործվել երեքանկյունագծային շեղասիմետրիկ և շեղահերմիտյան մատրիցների Մուր-Պենրոուզի հակադարձ մատրիցի տարրերի բացահայտ բանաձևերը ստանալու համար:

Աշխատանքում կատարված հետազոտությունների արդյունքում ստացվել են հետևյալ հիմնական արդյունքները.

1. չվերասերված երեքանկյունագծային հերմիտյան մատրիցների համար մշակվել է հակադարձ մատրիցի տարրերի հաշվարկման պարզ հաշվարկային ալգորիթմ. երեքանկյունագծային Տյոպլիցիան մատրիցների դեպքում այս ալգորիթմը բերում է հակադարձ մատրիցի տարրերի բացահայտ բանաձևերի,
2. ստացվել են կոմպլեքս վերին երկանկյունագծային մատրիցների Մուր-Պենրոուզի հակադարձ մատրիցի տարրերի բացահայտ բանաձևերը. բացահայտ բանաձևերի հիման վրա մշակվել է թվային վերջավոր ալգորիթմ, որը օպտիմալ է՝ թվաբանական գործողությունների քանակի կարգի տեսանկյունից,
3. ստացվել են իրական երեքանկյունագծային շեղասիմետրիկ մատրիցների Մուր-Պենրոուզի հակադարձ մատրիցի տարրերի բացահայտ բանաձևերը. ստացված բանաձևերի հիման վրա կառուցվել է թվային ալգորիթմ, որը օպտիմալ է՝ հաշվարկային ծախսերի ծավալի տեսանկյունից,
4. զրոյական անկյունագծային տարրերով շեղահերմիտյան երեքանկյունագծային մատրիցների Մուր-Պենրոուզի հակադարձ մատրիցի տարրերի բացահայտ բանաձևերը. ստացված բանաձևերի հիման վրա մշակվել է թվային ալգորիթմ, որը օպտիմալ է՝ հաշվարկային ծախսերի կարգի տեսանկյունից:

Ն. Վան