ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Դպրոցական մաթեմատիկական օլիմպիադա

12 ապրիլի, 2026 թ.

Խնդիր 2.1: Դիցուք x, y, z իրական թվերը բավարարում են հետևյալ հավասարություններին.

$$(x-3)(y+3) = (y-3)(z+3) = -12 :$$

Գտնել $(x-1)(z+1)$ արտահայտության բոլոր հնարավոր արժեքները:

Լուծում. Նկատենք, որ

$$(x-1)(z+1) = (2 - \frac{12}{y+3})(-2 - \frac{12}{y-3}) = -4 + \frac{24}{y+3} - \frac{24}{y-3} + \frac{144}{y^2-9} = -4 :$$

Խնդիր 2.2: Շախմատի տախտակի յուրաքանչյուր սև քառակուսու վրա կա մեկ բզեզ: Ամեն վայրկյան յուրաքանչյուր բզեզ տեղափոխվում է հարևան վանդակ, որը իր ներկայիս վանդակի հետ կիսում է գագաթ (բայց ոչ կողմ): Նույն վանդակում կարող են լինել մի քանի բզեզներ: Որքա՞ն է բզեզների առավելագույն քանակը, որոնք կարող են լինել մեկ վանդակում որոշ ժամանակ անց:

Լուծում. Դիտարկենք շախմատի տախտակը որպես 8×8 ցանց՝ (x, y) կոորդինատներով:

Սև վանդակները բավարարում են

$$x + y \equiv 0 \pmod 2 :$$

Բզեզների քայլը կատարվում է անկյունագծով, այսինքն՝

$$(x, y) \to (x \pm 1, y \pm 1) :$$

Այս քայլերի դեպքում վանդակի գույնը չի փոխվում, հետևաբար բոլոր բզեզները միշտ մնում են սև վանդակների վրա:

Այժմ բաժանենք սև վանդակները երկու խմբի՝ ըստ x-ի զույգության.

$$\text{Խումբ } A: \quad x \equiv 0 \pmod 2, \qquad \text{Խումբ } B: \quad x \equiv 1 \pmod 2 :$$

Յուրաքանչյուր քայլից հետո բզեզը անցնում է մի խմբից մյուսը, քանի որ x-ը փոխվում է ± 1-ով:

Այսպիսով, յուրաքանչյուր ժամանակի պահին բզեզները գտնվում են միայն մեկ խմբի վանդակներում:

Սկզբում ունենք 32 բզեզ՝

$$16 \text{ բզեզ } A \text{ խմբում}, \quad 16 \text{ բզեզ } B \text{ խմբում} :$$

Քանի որ նույն պահին տարբեր խմբերի բզեզները չեն կարող գտնվել նույն վանդակում, ապա մեկ վանդակում կարող են հավաքվել առավելագույնը միայն մեկ խմբի բզեզները:

Այսինքն՝ առավելագույնը հնարավոր է հավաքել 16 բզեզ:

Բացի այդ, հնարավոր է կազմակերպել շարժումները այնպես, որ այդ 16 բզեզները հասնեն նույն վանդակին:

Խնդիր 2.3: Գտնել բոլոր այն բազմանդամները, որոնց բոլոր արմատները իրական են և

$$P(x^2) = P(x)P(x+2) \quad \forall x \in \mathbb{R}:$$

Լուծում. Պարզ է, որ եթե P-ն հաստատուն է, ապա $P = 0$ կամ $P = 1$:

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը, երբ այն հաստատունից տարբեր է: Այդ դեպքում եթե a-ն արմատ է, ապա նաև արմատներ են $a, a^2, a^4, a^8, \cdots$ թվերը: Քանի որ P-ն չի կարող ունենալ անվերջ թվով արմատներ, ուրեմն կամ $a = 0$, կամ $a = \pm 1$: Ցույց տանք, որ միակ հնարավոր արմատը 1-ն է: Եթե 0-ն արմատ է,ապա արմատ է նաև $(-2)^2 = 4$, ինչը հնարավոր չէ: Նույն կերպ, եթե -1-ն արմատ է, ապա արմատ է նաև $(-3)^2 = 9$, ինչը ևս հնարավոր չէ:

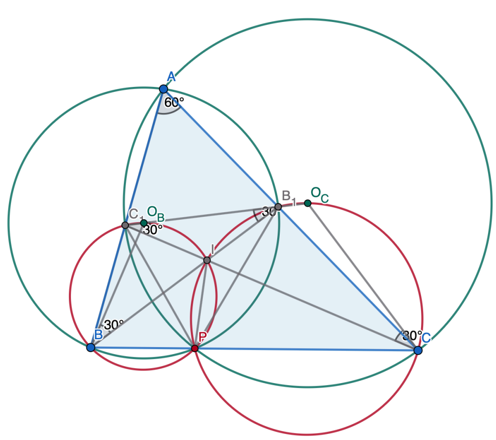
Խնդրի պայմանից ունենք, որ ավագ անդամի գործակցի քառակուսին հավասար է իրեն, ուստի, հաշվի առնելով, որ այն զրո չէ, կստանանք որ այն 1 է:

Այսպիսով հաստատունից տարբեր հնարավոր բազմադամներն են $P(x) = (x-1)^n$, որոնք նաև բավարարում են խնդրի պայմանին:

Խնդիր 2.4: Դիցուք ABC-ն սուրանկյուն եռանկյուն է և $\angle A = 60°$: Թող որ BB_1-ը և CC_1-ը լինեն համապատասխանաբար $\angle B$ և $\angle C$ անկյունների կիսորդները: Դիցուք I-ն $\triangle ABC$ եռանկյան ներգծած շրջանագծի կենտրոնն է: Թող որ O_B-ն լինի $\triangle ABB_1$-ի արտագծած շրջանագծի կենտրոնը, իսկ O_C-ն՝ $\triangle ACC_1$-ի արտագծած շրջագծի կենտրոնը: $\triangle BIO_B$ և $\triangle CIO_C$ եռանկյունների արտագծած շրջանագծերի I-ից տարբեր հատման կետը նշանակենք P-ով: Գտնել $\angle B_1PC_1$ անկյունը:

Ապացույց. Նկատենք որ $\angle BIC = 90° + \frac{\angle BAC}{2} = 120°$: Հետևաբար $\angle C_1AB_1 + \angle C_1IB_1 = 180°$ և A, C_1, I, B_1 կետերը գտնվում են մեկ շրջանագծի վրա: Հետևաբար $\angle B_1C_1I = \angle IAB_1 = \frac{\angle BAC}{2} = 30°$: Նույն ձևով ստանում ենք որ $\angle IB_1C_1 = 30°$: Այժմ նկատենք որ $\angle BO_BB_1 = 2\angle BAB_1 = 120°$ և $O_BB = O_BB_1$: Հետևաբար $\angle O_BB_1B = \angle O_BBB_1 = 30°$: Այսպիսով $\angle O_BB_1B = \angle C_1B_1B = 30°$, ուստի O_B կետը գտնվում է C_1B_1 ուղղի վրա: Նույն ձևով ստանում ենք որ O_C կետը նույնպես գտվնում է B_1C_1 ուղղի վրա: Քանի որ $\angle O_BC_1I = \angle O_BBI = 30°$ ստանում ենք որ C_1, O_B, I, B կետերը գտվնում են մեկ շրջանագծի վրա: Նույն ձևով ստանում ենք որ B_1, O_C, C, I կետերը նույնպես գտվնում են մեկ շրջանագծի վրա: Այժմ նկատենք որ

$$\angle C_1PB_1 = \angle C_1PI + \angle B_1PI = \angle C_1BI + \angle B_1CI = \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2} = \frac{180° - \angle BAC}{2} = 60°:$$



Խնդիր 2.5: Տրված է $n \geq 2$ բնական թիվը և $a_1, a_2, \ldots, a_n$ բնական թվերը: Հայտնի է, որ՝

a_1-ի բաժանարարների **կեսից ավելին** նաև a_2-ի բաժանարար է,
a_2-ի բաժանարարների **կեսից ավելին** նաև a_3-ի բաժանարար է,
$$\vdots$$
a_{n-1}-ի բաժանարարների **կեսից ավելին** նաև a_n-ի բաժանարար է,
a_n-ի բաժանարարների **կեսից ավելին** նաև a_1-ի բաժանարար է:

Ապացուցել, որ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ թվերի պարզ բաժանարարների բազմությունները համընկնում են:

Ապացույց. Հարմարության համար համարենք, որ a_n-ի հաջորդ թիվը a_1-ն է: Խնդիրը կապացուցենք հակասող ենթադրությամբ: Ենթադրենք՝ որևէ q պարզ թվի համար գոյություն ունեն $1 \leq i, j \leq n$ այնպես, որ $q \mid a_i$ և $q \nmid a_j$: Այդ դեպքում ֆիքսենք i-ն և կատարենք հետևյալ պրոցեսը. քանի դեռ a_i-ի հաջորդ թիվը ևս բաժանվում է q-ի, ապա a_i-ն փոխարինենք իր հաջորդ թվով: Քանի որ ոչ բոլոր թվերն են բաժանվում q-ի, ապա ինչ-որ պահի հասնելու ենք մի k-ի, որ a_k-ն բաժանվում է q-ի, բայց իր հաջորդը՝ ոչ: Նշանակենք a_k-ն x-ով, իր հաջորդ թիվը՝ y-ով:

Ըստ խնդրի պայմանի՝ x-ի բաժանարարների կեսից ավելին նաև y-ի բաժանարար է: Դա նշանակում է, որ
$$\frac{\sigma(\gcd(x,y))}{\sigma(x)} > \frac{1}{2},$$
որտեղ $\sigma(m)$-ը m-ի բաժանարարների քանակն է: Հայտնի է, որ
$$\sigma(m) = \prod_{p \in P} (V_p(m) + 1),$$
որտեղ $V_p(m)$-ը այն ամենամեծ $\alpha \geq 0$ թիվն է, որ $p^\alpha \mid m$, իսկ P-ն՝ պարզ թվերի բազմությունը: Այստեղից ունենք՝
$$\begin{aligned}
\frac{\sigma(\gcd(x,y))}{\sigma(x)} &= \frac{\prod_{p \in P}(V_p(\gcd(x,y) + 1)}{\prod_{p \in P}(V_p(x) + 1)} \\
&= \prod_{p \in P} \frac{V_p(\gcd(x,y)) + 1}{V_p(x) + 1} \\
&= \frac{V_q(\gcd(x,y)) + 1}{V_q(x) + 1} \cdot \prod_{p \in P \setminus \{q\}} \frac{V_p(\gcd(x,y)) + 1}{V_p(x) + 1} \\
&= \frac{\min(V_q(x), V_q(y)) + 1}{V_q(x) + 1} \cdot \prod_{p \in P \setminus \{q\}} \frac{\min(V_p(x), V_p(y)) + 1}{V_p(x) + 1} \\
&\leq \frac{0+1}{1+1} \cdot \left(\prod_{p \in P \setminus \{q\}} 1 \right) = \frac{1}{2} : \qquad (V_q(x) > 0, V_q(y) = 0)
\end{aligned}$$

Ստացանք, որ սկզբնական արտահայտությունը չի գերազանցում $\frac{1}{2}$-ը, ինչը հակասություն է, քանի որ ավելի վաղ ստացել էինք հակառակը:

Յուրաքանչյուր խնդրի լուծման համար տրվում է 10 միավոր:

Օլիմպիադայի հանձնաժողովի նախագահ՝ Կ. Քեռյան